TD4 : Anneaux noethériens et modules

Diego Izquierdo

Les exercices 1, 3 (sans la dernière question) et 12 sont à préparer avant le TD. Pendant la séance de TD, les exercices seront traités dans l'ordre suivant : 1, 3 (questions 1 et 2), 12, 7, 13, 8. L'exercice 18 est important, mais trop long pour être traité pendant la séance : il est donc vivement conseillé de le faire chez soi.

Exercice 1 (à préparer) : Vrai ou faux ?
Soit A un anneau.

1. Tout sous-anneau d'un anneau noethérien est noethérien.
2. Tout anneau intègre noethérien est factoriel.
3. Si A est intègre, toute famille libre maximale de A^n est de cardinal n.
4. Si A est intègre, toute famille génératrice minimale de A^n est de cardinal n.
5. Si M est un groupe abélien et M_{tor} est le sous-module de torsion de M, alors M_{tor} a un supplémentaire dans M.
6. Si A est intègre, tout sous-module d'un A-module libre est libre.
7. Il existe un $\mathbb{Z}$-module qui n'a pas de famille génératrice minimale.
8. Si $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ est une suite exacte de A-modules et M_1 et M_3 sont de type fini, alors M_2 est de type fini.
9. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est noethérien.
10. Si A est noethérien, un sous-A-module d'un A-module de type fini est de type fini.

Exercice 2 : Vrai ou faux ? Le retour
Soit A un anneau.

1. Tout quotient d'un anneau noethérien est noethérien.
2. Tout anneau factoriel est noethérien.
3. Tout anneau euclidien est noethérien.
4. Si I est un idéal de type fini de A et A/I est noethérien, alors A est noethérien.
5. Un produit fini d'anneaux noethériens est un anneau noethérien.
6. Toute famille génératrice minimale de A^n est de cardinal au moins n.
7. Toute famille libre maximale de A^n est une base de A^n.
8. Toute famille génératrice minimale de A^n est une base.
9. Il existe un $\mathbb{Z}$-module qui n'a pas de famille libre maximale.
10. Un $\mathbb{Z}$-module sans torsion est libre.

11. Si $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ est une suite exacte de A-modules et M_1 et M_3 sont libres de rang fini, alors M_2 est libre de rang $\mathrm{rg}(M_1) + \mathrm{rg}(M_3)$.

Exercice 3 (à préparer sans la question 3) : Un exemple d'anneau non noethérien

Soit $A = \{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(0) \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A n'est pas factoriel.

2. Montrer que A n'est pas noethérien.

3. Montrer que A est de Bézout, c'est-à-dire que tout idéal de type fini de A est principal.

Exercice 4 : Un autre exemple d'anneau non noethérien

On rappelle qu'un nombre complexe x est un *entier algébrique* s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que l'on ait $P(x) = 0$. On note $\overline{\mathbb{Z}}$ l'anneau des entiers algébriques.

1. Rappeler pourquoi $\overline{\mathbb{Z}}$ est un anneau.

2. Montrer que $\overline{\mathbb{Z}}$ n'est pas factoriel

3. Montrer que $\overline{\mathbb{Z}}$ n'est pas noethérien.

4. Comme dans l'exercice 3, on peut montrer que $\overline{\mathbb{Z}}$ est un anneau de Bézout, mais la preuve dépasse largement le cadre de ce cours.

Exercice 5 : Anneau des fonctions continues

Soit X un espace topologique métrisable. À quelle condition sur X l'anneau des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ est-il noethérien ?

Exercice 6 : Séries formelles

Soit A un anneau noethérien. Montrer que $A[[X]]$ est noethérien.

Exercice 7 : Idéaux premiers minimaux

Soit A un anneau noethérien.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que, pour tout idéal I de A, il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ vérifiant $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_{n_I} \subseteq I$.

2. Montrer que l'on peut exiger $I \subseteq \mathfrak{p}_i$ pour tout $1 \leq i \leq n_I$ dans la question précédente.

3. En déduire qu'il existe un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

Exercice 8 : Noethérianité et factorialité

Soit A un anneau intègre noethérien. Montrer que tout élément non nul de A s'écrit sous la forme $up_1...p_n$ avec $u \in A^\times$ et p_i irréductible pour chaque i. L'anneau A est-il forcément factoriel ?

Exercice 9 : Une caractérisation des anneaux noethériens
Soient A un anneau, I un idéal de A et a un élément de A. Montrer que si $I + (a)$ et $\{x \in A \mid ax \in I\}$ sont des idéaux de type fini de A, alors I est de type fini. En déduire que A est noethérien si, et seulement si, tous ses idéaux premiers sont de type fini.

Exercice 10 : Modules de type fini
Soient A un anneau, M un A-module de type fini et $n \in \mathbb{N}$. Considérons un morphisme surjectif de A-modules $u : M \to A^n$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ est un A-module de type fini.

Exercice 11 : Sous-groupes du groupe des racines de l'unité
Faire la liste des sous-groupes du groupe des racines de l'unité dans $\mathbb{C}^\times$.

Exercice 12 (à préparer) : Modules noethériens
Soit A un anneau. Soient M, N et P trois A-modules. Supposons qu'il existe un morphisme injectif de A-modules $i : M \to N$ et un morphisme surjectif de A-modules $p : N \to P$ tels que $p \circ i = 0$. Montrer que N est noethérien si, et seulement si, M, P et $\mathrm{Ker}(p)/\mathrm{Im}(i)$ sont noethériens.

Exercice 13 : Endomorphismes surjectifs d'un module noethérien
Considérons A un anneau et M un A-module noethérien. Soit $u : M \to M$ un morphisme de A-modules. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^n) \cap \mathrm{Im}(u^n) = 0$. En déduire que, si u est surjectif, alors u est un isomorphisme. Ce résultat subsiste-t'il si M n'est pas supposé noethérien ?

Exercice 14 : Modules noethériens et polynômes
Soient A un anneau et M un A-module. Montrer que $M[X]$ est un $A[X]$-module noethérien si, et seulement si, M est un A-module noethérien.

Exercice 15 : Chasses au diagramme

1. Soit A un anneau. Soient $f : M \to N$ et $g : N \to P$ des morphismes de A-modules. Montrer qu'il existe une suite exacte :

   $$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g \circ f) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g \circ f) \to \mathrm{Coker}(g) \to 0.$$

2. On considère un diagramme commutatif de A-modules à lignes exactes :

   $$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5. \end{tikzcd}$$

On suppose que les morphismes f_1, f_2, f_4, f_5 sont des isomorphismes. Montrer que f_3 est un isomorphisme.

Exercice 16 : Déterminant
Soient R un anneau et n un entier naturel non nul. Soit $f : R^n \to R^n$ un morphisme de R-modules. Soit A la matrice de f dans la base canonique de R^n.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est surjectif;
(ii) f est un isomorphisme;
(iii) $\det(A) \in R^\times$.

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est injectif;
(ii) $\det(A)$ n'est pas un diviseur de 0 dans R.

Exercice 17 : Théorème de Cayley-Hamilton
Soit R un anneau.

1. Soit M un R-module de type fini. Soient $m_1, ..., m_n$ des générateurs de M. Soit f un endomorphisme de M, et considérons une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(R)$ telle que $f(m_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} m_j$ pour $1 \leq i \leq n$. On note $P(X) = \det(XI_n - A)$. Montrer que $P(f) = 0$.

2. Soit M un R-module de type fini.
(a) Soit I un idéal de R tel que $IM = M$. Montrer qu'il existe $a \in I$ tel que $(1 - a)M = 0$.
(b) Déduire qu'un endomorphisme surjectif de M est un isomorphisme. Comparer ce résultat à la question 1. de l'exercice précédent.

3. Montrer que, si m et n sont deux entiers naturels et $g : R^m \to R^n$ est un morphisme injectif de R-modules, alors $m \leq n$.

Exercice 18 (important) : Modules projectifs et injectifs
Soit A un anneau.

1. Soient M, N et P trois A-modules. Si l'on a une suite exacte $0 \to M \to N \to P \to 0$, peut-on en déduire que $N \cong M \oplus P$?

2. Soient M, N et P trois A-modules. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
- il existe un isomorphisme $N \cong M \oplus P$.
- il existe une suite exacte de A-modules $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ et un morphisme de A-modules $s : P \to N$ tel que $g \circ s = \mathrm{Id}_P$.
- il existe une suite exacte de A-modules $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ et un morphisme de A-modules $t : N \to M$ tel que $t \circ f = \mathrm{Id}_M$.

3. On dit qu'un A-module P est *projectif* si la propriété suivante est vérifiée : si M et N sont des A-modules tels qu'il existe une suite exacte $0 \to M \to N \to P \to 0$, alors il existe un isomorphisme $N \cong M \oplus P$.

(a) Montrer qu'un A-module est projectif si, et seulement si, il est un facteur direct d'un A-module libre.

(b) Montrer que si A est un corps, alors tout A-module est projectif.

(c) Montrer que si $A = \mathbb{Z}$, un A-module de type fini est projectif si, et seulement si, il est libre. En utilisant la classification des modules de type fini sur un anneau principal que vous verrez en cours cette semaine, on peut montrer que ce résultat subsiste si A est principal.

(d) Supposons que $A = B \times C$ où B et C sont des anneaux non nuls. Montrer que B est un A-module projectif non libre.

On se place dans le cas où A est l'anneau des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(e) Soit P le A-module formé des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x + 2\pi) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En construisant un isomorphisme de A-modules $P \oplus P \cong A \oplus A$, montrer que P est projectif. Est-il libre ?

(f) Soit N le A-module constitué des fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à décroissance rapide (c'est-à-dire telles que, pour tout $n \geq 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} x^n f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n f(x) = 0$). Montrer qu'il existe un facteur direct du A-module N isomorphe à P.

4. On dit qu'un A-module M est *injectif* si la propriété suivante est vérifiée : si N et P sont des A-modules tels qu'il existe une suite exacte $0 \to M \to N \to P \to 0$, alors il existe un isomorphisme $N \cong M \oplus P$.

(a) Montrer qu'un A-module M est injectif si, et seulement si, pour tout idéal I de A, tout morphisme de A-modules $I \to M$ s'étend en un morphisme de A-modules $A \to M$.

(b) Montrer que si A est un corps, alors tout A-module est injectif.

(c) Est-ce que $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module injectif ? Pour $n > 0$, est-ce que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module injectif ?

On se place maintenant dans le cas $A = \mathbb{Z}$.

(d) Montrer qu'un groupe abélien M est injectif si, et seulement si, il est divisible, c'est-à-dire que pour tout $m \in M$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m' \in M$ tel que $m = nm'$.

(e) Quels sont les groupes abéliens de type fini injectifs ?

(f) Montrer que le groupe abélien $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ possède un facteur direct isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Exercice 19 : Le groupe $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas abélien libre

On considère le groupe abélien $M = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Le but de cet exercice est de montrer que M n'est pas abélien libre. On procède par l'absurde en supposant que M admet une base B. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note e_n l'élément de M dont tous les termes sont nuls, sauf le n-ème qui vaut 1. On écrit alors e_n comme combinaison linéaire d'une partie finie B_n de B, et on note N le sous-groupe de M engendré par les éléments de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

1. Soit $S = \{(\epsilon_n n!)_{n\in\mathbb{N}} \mid \epsilon_n \in \{-1,1\}\}$. Montrer qu'il existe $s \in S$ tel que $s \notin N$.

2. Montrer que, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $y \in M/N$ tel que $\overline{s} = ky$.

3. En déduire une contradiction.

Exercice 20 (culturel) : Sous-groupes d'un groupe abélien libre

Dans cet exercice, nous allons montrer que tout sous-groupe d'un groupe abélien libre est abélien libre. Considérons donc A un groupe abélien libre, et soit X une base de A. Soit A_0 un sous-groupe de A. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des triplets (Y, B, ϕ), où Y est une partie de X telle que $A_0 \cap A^{(Y)}$ est abélien libre, B est une base de $A_0 \cap A^{(Y)}$ et $\phi : B \to X$ une injection. Si (Y, B, ϕ) et (Y', B', ϕ') sont deux éléments de $\mathcal{E}$, on dira que $(Y, B, \phi) \preceq (Y', B', \phi')$ si $Y \subseteq Y'$, $B \subseteq B'$ et $\phi = \phi'|_B$. Cela définit une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ possède un élément maximal pour $\preceq$.

2. En déduire que A_0 est abélien libre.

Nous allons maintenant appliquer ce résultat pour montrer que le groupe $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas abélien libre par une méthode différente de celle de l'exercice 19. Pour chaque entier x, on note $v_2(x)$ la valuation 2-adique de x (avec la convention $v_2(0) = +\infty$).

3. Soit N le sous-groupe de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_2(x_n) = +\infty$. Montrer que $N/2N$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension dénombrable.

4. En déduire que $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas abélien libre.