TD4 : Anneaux noethériens et modules, complétions

Diego Izquierdo

L'exercice 1 est à préparer avant la séance de TD. Nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : 1, 4, 6, 7, 11. Si le temps le permet nous traiterons les exercices 12 et 14.

Exercice 1 (à préparer) : Vrai ou faux ?
Soit A un anneau.

1. Tout sous-anneau d'un anneau noethérien est noethérien.
2. Tout anneau intègre noethérien est factoriel.
3. Si A est intègre, toute famille libre maximale de A^n est de cardinal n.
4. Si A est intègre, toute famille génératrice minimale de A^n est de cardinal n.
5. Si M est un groupe abélien et M_{tor} est le sous-module de torsion de M, alors M_{tor} a un supplémentaire dans M.
6. Si A est intègre, tout sous-module d'un A-module libre est libre.
7. Il existe un $\mathbb{Z}$-module qui n'a pas de famille génératrice minimale.
8. Si $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ est une suite exacte de A-modules et M_1 et M_3 sont de type fini, alors M_2 est de type fini.
9. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est noethérien.
10. Si A est noethérien, un sous-A-module d'un A-module de type fini est de type fini.

Exercice 2 : Vrai ou faux ? Le retour
Soit A un anneau.

1. Tout quotient d'un anneau noethérien est noethérien.
2. Tout anneau factoriel est noethérien.
3. Si I est un idéal de type fini de A et A/I est noethérien, alors A est noethérien.
4. Un produit fini d'anneaux noethériens est un anneau noethérien.
5. Toute famille génératrice minimale de A^n est de cardinal au moins n.
6. Toute famille libre maximale de A^n est une base de A^n.
7. Toute famille génératrice minimale de A^n est une base.
8. Il existe un $\mathbb{Z}$-module qui n'a pas de famille libre maximale.
9. Un $\mathbb{Z}$-module sans torsion est libre.
10. Si $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ est une suite exacte de A-modules et M_1 et M_3 sont libres de rang fini, alors M_2 est libre de rang $\mathrm{rg}(M_1) + \mathrm{rg}(M_3)$.
11. Si $A[X]$ est noethérien, alors A est noethérien.

Exercice 3 : Noethérianité et factorialité
Soit A un anneau intègre noethérien. Montrer que tout élément non nul de A s'écrit sous la forme $up_1...p_n$ avec $u \in A^\times$ et p_i irréductible pour chaque i. L'anneau A est-il forcément factoriel ?

Exercice 4 : Idéaux premiers minimaux
Soit A un anneau noethérien.

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que, pour tout idéal I de A, il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ vérifiant $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_{n_I} \subseteq I$.
2. Montrer que l'on peut exiger $I \subseteq \mathfrak{p}_i$ pour tout $1 \leq i \leq n_I$ dans la question précédente.
3. En déduire qu'il existe un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.

Exercice 5 : Une caractérisation des anneaux noethériens
Soient A un anneau, I un idéal de A et a un élément de A. Montrer que si $I + (a)$ et $\{x \in A \mid ax \in I\}$ sont des idéaux de type fini de A, alors I est de type fini. En déduire que A est noethérien si, et seulement si, tous ses idéaux premiers sont de type fini.

Exercice 6 : Modules noethériens
Soit A un anneau. Soient M, N et P trois A-modules. Supposons qu'il existe un morphisme injectif de A-modules $i : M \to N$ et un morphisme surjectif de A-modules $p : N \to P$ tels que $p \circ i = 0$. Montrer que N est noethérien si, et seulement si, M, P et $\mathrm{Ker}(p)/\mathrm{Im}(i)$ sont noethériens.

Exercice 7 : Endomorphismes surjectifs d'un module noethérien
Considérons A un anneau et M un A-module noethérien. Soit $u : M \to M$ un morphisme de A-modules. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^n) \cap \mathrm{Im}(u^n) = 0$. En déduire que, si u est surjectif, alors u est un isomorphisme. Ce résultat subsiste-t'il si M n'est pas supposé noethérien ?

Exercice 8 : Modules noethériens et polynômes
Soient A un anneau et M un A-module. Montrer que $M[X]$ est un $A[X]$-module noethérien si, et seulement si, M est un A-module noethérien.

Exercice 9 : L'anneau $\hat{\mathbb{Z}}$
Pour n et m deux entiers naturels non nuls tels que $n|m$, on note $\pi_{m,n}$ la

projection naturelle $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On pose :

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{(x_n)_n \in \prod_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, n|m \Rightarrow \pi_{m,n}(x_m) = x_n\}.$$

En notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, montrer que $\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$.

Exercice 10 : Une question de convergence
Pour quels nombres premiers p la suite (10^n) converge-t'elle dans $\mathbb{Z}_p$?

Exercice 11 : Entiers p-adiques et équations
Soit p un nombre premier.

1. Rappeler pourquoi $\mathbb{Z}_p$ est compact.
2. Soit $m > 0$. Soit $f \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_m]$. Montrer que l'équation $f(x_1, ..., x_m) = 0$ a des solutions dans $\mathbb{Z}_p$ si, et seulement si, elle a des solutions dans $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ pour tout r.

Exercice 12 : Lemme de Hensel et applications

1. Soient A un anneau et I un idéal de A.
   (i) Soit n entier naturel non nul. Soient $f \in A[X]$ et $x \in A$ tels que $f(x) \equiv 0 \mod I^n$ et $f'(x) \in (A/I)^\times$. Montrer qu'il existe $y \in A$ tel que $y \equiv x \mod I^n$ et $f(y) \equiv 0 \mod I^{n+1}$. Montrer que si $z \in A$ est tel que $z \equiv x \mod I^n$ et $f(z) \equiv 0 \mod I^{n+1}$, alors $z \equiv y \mod I^{n+1}$.
   (ii) Soient $f \in A[X]$ et $x \in A$ tels que $f(x) \equiv 0 \mod I$ et $f'(x) \in (A/I)^\times$. Déduire de la question précédente qu'il existe un unique $y \in \varprojlim_n A/I^n$ tel que son image dans A/I coïncide avec celle de x et $f(y) = 0$.
2. Est-ce que 14 possède une racine carrée dans $\mathbb{Z}_5$? Dans $\mathbb{Z}_7$? Dans $\mathbb{Z}_{11}$?
3. Soit p un nombre premier. En utilisant le lemme de Hensel, montrer que $\mathbb{Z}_p$ possède $p-1$ racines $p-1$-ièmes de l'unité.
4. Montrer qu'il existe $f(T) \in \mathbb{Z}[[T]]$ tel que $f(T)^5 + f(T) + T = 0$. En écrivant $f(T) = \sum_{n\geq 0} a_n T^n$, calculer a_n pour $n \leq 6$.

Exercice 13 (difficile) : Complétion et produit
Soient A un anneau et I un idéal. Montrer que, si A/I est un produit non trivial de deux anneaux, il en est de même pour $\hat{A} = \varprojlim_n A/I^n$.

Exercice 14 : L'anneau des entiers p-adiques

1. Rappeler pourquoi $\mathbb{Z}_p$ est un anneau intègre.

Soit $\mathbb{Q}_p$ le corps des fractions de $\mathbb{Z}_p$.

2. Pour $x = (x_n)_n \in \mathbb{Z}_p$, on pose $v_p(x) = \max\{n \in \mathbb{N}/x_n = 0\}$. Montrer que v_p étend la valuation p-adique sur $\mathbb{Z}$. Vérifier que la topologie de

$\mathbb{Z}_p$ est induite par la distance :

$$d_p(x,y) = p^{-v_p(x-y)}.$$

3. Montrer que la fonction $v_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{N}$ s'étend en un morphisme de groupes surjectif $v_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p / v_p(x) \geq 0\}$ et que $\mathbb{Z}_p^\times = \mathrm{Ker}(v_p)$.
4. En déduire que l'anneau $\mathbb{Z}_p$ est principal. Quels sont ses idéaux ? Montrer que, pour chaque $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $\mathbb{Z}_p/(x) \cong \mathbb{Z}/p^{v_p(x)}\mathbb{Z}$.
5. Quels sont les idéaux premiers (resp. maximaux) de $\mathbb{Z}_p$?
6. La surjection $\pi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ induit par restriction un morphisme de groupes surjectif $\pi : \mathbb{Z}_p^\times \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Montrer qu'il possède une section, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de groupes $s : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $\pi \circ s = Id$.
7. On pose $s(0) = 0$. Montrer que la fonction :

$$\phi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}_p, (x_n)_n \mapsto \sum_n s(x_n)p^n$$

est une bijection. S'agit-il d'un isomorphisme d'anneaux ?
8. Il est intéressant de comprendre quelle structure d'anneau il faut mettre sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ pour que ϕ soit un isomorphisme. C'est la théorie des vecteurs de Witt qui y répond, mais elle dépasse très largement le cadre de ce cours.

Exercice 15 : Séries formelles le retour
Soit k un corps. Pour $x \in k[[T]]$ et $y \in k[[T]]$, on pose $v(x) = \max\{n \in \mathbb{N} / x \in (T^n)\}$ et $d(x,y) = e^{-v(x-y)}$. Montrer que d définit une distance sur $k[[T]]$ et que $k[[T]]$ est alors un anneau qui s'identifie au complété de $k[T]$ pour la distance d. Quand $k[[T]]$ est-il compact ?

Exercice 16 : Séries et rayon de convergence
Soit p un nombre premier. Soit (a_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge si, et seulement si, la suite (a_n) converge vers 0. Dire pour quels $x \in \mathbb{Q}_p$ les séries suivantes convergent :
1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$.
2. $\sum_{n\geq 0} nx^n$.
3. $\sum_{n\geq 0} n!x^n$.
4. $\sum_{n\geq 0} 10^n x^n$.

Exercice 17 : Structure de $\mathbb{Z}_p^\times$
Soit p un nombre premier impair. On note $U^{(1)} = 1 + p\mathbb{Z}_p$.

1. Montrer que le groupe des racines de l'unité dans $\mathbb{Z}_p$ est cyclique d'ordre $p-1$. En déduire que, si p et l sont deux nombres premiers impairs distincts, alors $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{Q}_l$ ne sont pas isomorphes.

2. Montrer que :
$$\mathbb{Z}_p^\times = \mu_{p-1} \times U^{(1)},$$
où μ_{p-1} désigne le sous-groupe des racines $(p-1)$-ièmes de l'unité. A quoi est isomorphe μ_{p-1} ? Le groupe $U^{(1)}$ peut-il avoir des éléments de torsion ?

3. On considère les séries :
$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},$$
$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$
Montrer que $\exp : p\mathbb{Z}_p \to U^{(1)}$ et $\log : U^{(1)} \to p\mathbb{Z}_p$ définissent des isomorphismes de groupes continus, inverses l'un de l'autre.

Exercice 18 : Condition de Mittag-Leffler

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux systèmes projectifs de groupes abéliens indexés par $\mathbb{N}$. On note $f_n : A_{n+1} \to A_n$ et $g_n : B_{n+1} \to B_n$ les morphismes de transition. Un morphisme de systèmes projectifs $h : (A_n) \to (B_n)$ est la donnée d'un morphisme de groupes $h_n : A_n \to B_n$ pour chaque n de sorte que $h_n \circ f_n = g_n \circ h_{n+1}$.

1. Montrer qu'un morphisme de systèmes projectifs $h : (A_n) \to (B_n)$ induit un morphisme de groupes abéliens $h : \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n B_n$.

2. On dit qu'une suite de morphismes de systèmes projectifs $0 \to (A_n) \to (B_n) \to (C_n) \to 0$ est exacte si, pour chaque n, la suite $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$ est exacte. Montrer qu'une suite exacte de systèmes projectifs $0 \to (A_n) \to (B_n) \to (C_n) \to 0$ induit une suite exacte de groupes abéliens $0 \to \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n B_n \to \varprojlim_n C_n$. Montrer que le dernier morphisme n'est pas nécessairement surjectif.

3. Soit $0 \to (A_n) \to (B_n) \to (C_n) \to 0$ une suite exacte de systèmes projectifs. On note $f_n : A_{n+1} \to A_n$ les morphismes de transition. On suppose que f_n est surjectif pour n assez grand. Montrer que la suite $0 \to \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n B_n \to \varprojlim_n C_n \to 0$ est exacte.

4. Soit $0 \to (A_n) \to (B_n) \to (C_n) \to 0$ une suite exacte de systèmes projectifs. On note $f_n : A_{n+1} \to A_n$ les morphismes de transition. On pose $f_{m,n} = f_n \circ f_{n+1} \circ ... \circ f_{m-1}$ pour $m \geq n$. On suppose que le système (A_n) vérifie la condition de Mittag-Leffler : pour chaque $n \geq 0$, la suite $(f_{m,n}(A_m))_{m\in\mathbb{N}}$ stationne. Montrer que la suite $0 \to \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n B_n \to \varprojlim_n C_n \to 0$ est exacte.

Exercice 19 : Complétion et noethérianité

1. Soit G un groupe abélien topologique. La complétion de G est un groupe abélien topologique séparé complet K muni d'un morphisme continu $\phi : G \to K$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour chaque morphisme continu h de G dans un groupe abélien topologique séparé complet K', il existe un unique morphisme continu $h' : K \to K'$ tel que $h = h' \circ \phi$.
On suppose que G est muni d'une suite décroissante $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes qui forme une base de voisinages ouverts de 0. On note $\hat{G} = \varprojlim_n G/G_n$, et :

$$\hat{G}_n = \{(a_m)_m \in \hat{G} | a_m = 0 \text{ pour } m \leq n\}.$$

Les sous-groupes $\hat{G}_n$ de $\hat{G}$ définissent une structure de groupe topologique sur $\hat{G}$ telle que les $\hat{G}_n$ forment une base de voisinages ouverts de 0. Soit $\pi : G \to \hat{G}$ le morphisme naturel. Montrer que $\hat{G}$ muni de π est la complétion de G, puis que π induit un isomorphisme $G/G_n \to \hat{G}/\hat{G}_n$ pour chaque entier n.

Si A est un anneau et I un idéal, la complétion I-adique de A est $\varprojlim_n A/I^n$: c'est donc la complétion de A au sens de la question précédente à condition de munir A de la structure de groupe topologique pour laquelle les I^n forment une base de voisinages ouverts de 0.

2. Soit A un anneau. Soient $B = A[T_1, ..., T_n]$ et $J = (T_1, ..., T_n) \subseteq B$. Montrer que la complétion J-adique de B est $\hat{B} = A[[T_1, ..., T_n]]$.

3. Montrer que, si A est noethérien, alors $A[[T_1, ..., T_n]]$ l'est aussi.

4. Soient M et N des groupes abéliens munis respectivement de filtrations (ie de suites décroissantes de sous-groupes) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\phi : M \to N$ un morphisme de groupes tel que, pour un certain $n_0 \geq 0$, on ait $N = \phi(N)+N_n$ et $N_n = \phi(M_n)+N_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$. Montrer que le morphisme naturel $\varprojlim_n M/M_n \to \varprojlim_n N/N_n$ est surjectif. On pourra utiliser la question 3 de l'exercice 20.

5. Soient A un anneau noethérien et I un idéal de A. Déduire des questions précédentes que $\hat{A} = \varprojlim_n A/I^n$ est noethérien.