Variétés abéliennes sur les corps de fonctions de courbes sur des corps locaux supérieurs

Diego Izquierdo
École Normale Supérieure
45, Rue d'Ulm - 75005 Paris - France
diego.izquierdo@ens.fr

0. Introduction

0.1 Contexte et motivations

Depuis les travaux de John Tate dans les années 1960, les théorèmes de dualité arithmétique pour la cohomologie galoisienne des groupes algébriques commutatifs sur des corps locaux ou globaux ont joué un rôle central en arithmétique. Les groupes algébriques concernés sont divers : les groupes finis, les tores, les variétés abéliennes. Rappelons brièvement les résultats portant sur ces dernières.

Dans le cadre local, Tate montre en 1958, dans l'exposé [Tat58], qu'étant donnée une variété abélienne A sur un corps p-adique k de variété abélienne duale A^t, il existe un accouplement canonique $H^0(k,A)\times H^1(k,A^t) \rightarrow \mathrm{Br}(k) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui met en dualité parfaite le groupe profini $H^0(k,A)$ et le groupe de torsion $H^1(k,A^t)$. Dans le cadre global, en généralisant des travaux de Cassels pour les courbes elliptiques, il construit pour chaque variété abélienne A sur un corps de nombres K de variété duale A^t un accouplement $Ш^1(K,A) \times Ш^1(K,A^t) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ puis annonce au Congrès International des Mathématiciens de 1962 ([Tat63]) la non-dégénérescence de ce dernier modulo divisibles. Ici, $Ш^1(K,A)$ désigne le groupe de Tate-Shafarevich constitué des classes d'isomorphismes de torseurs sous A triviales dans tous les complétés de K. Des résultats analogues ont aussi été établis pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{F}_p((u))$ et sur $\mathbb{F}_p(u)$ (Remarque I.3.6 et Théorème I.6.13 de [Mil06]).

Par ailleurs, ces dernières années, nous avons été témoins d'un regain d'intérêt pour les théorèmes de dualité sur d'autres corps de caractéristique 0 que les corps p-adiques et les corps de nombres. Citons par exemple les travaux de Scheiderer et van Hamel ([SvH03]) et Harari et Szamuely ([HSz13]) pour $\mathbb{Q}_p((u))$ et $\mathbb{Q}_p(u)$, ceux de Colliot-Thélène et Harari ([CTH14]) pour $\mathbb{C}((t))((u))$ et $\mathbb{C}((t))(u)$, et ceux de l'auteur ([Izq14]) pour les corps de la forme $k((u))$ et $k(u)$ avec $k = \mathbb{Q}_p((t_1))...((t_d))$ ou $k = \mathbb{C}((t_1))...((t_d))$. Cependant, aucun de ces travaux ne porte sur les variétés abéliennes. En fait, à la connaissance de l'auteur, on ne dispose jusqu'à présent que de résultats pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((u))$ et $\mathbb{C}(u)$: cela remonte à des travaux de Ogg dans les années 1960 ([Ogg62]). Le but du présent article est donc d'établir des théorèmes de dualité, analogues à ceux de Tate rappelés ci-dessus, pour les variétés abéliennes sur les corps de la forme $k((u))$ et $k(u)$ avec $k = \mathbb{Q}_p$ ou $k = \mathbb{C}((t))$, voire avec $k = \mathbb{Q}_p((t_1))...((t_d))$ ou $k = \mathbb{C}((t_1))...((t_d))$.

Remarque 0.1. Il est vrai qu'on peut déjà trouver des résultats similaires pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p((t_1))...((t_d))$ dans [Koy00], mais l'article en question contient un grand nombre d'erreurs et soit le théorème principal soit la principale proposition permettant de le prouver semble erroné (voir la remarque 5.18).

0.2 Organisation de l'article

Cet article est constitué de 7 sections.

La première partie permet de faire quelques rappels et d'établir quelques résultats préliminaires. On y étudie notamment la cohomologie des tores sur des corps (dits d-locaux) de la forme $\mathbb{C}((t_0))...((t_d))$ ou $\mathbb{Q}_p((t_2))...((t_d))$.

La deuxième partie porte sur les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$ et sur $\mathbb{C}((t_0))(t)$. Voici les principaux résultats obtenus, où, pour B groupe topologique abélien (éventuellement muni de la topologie discrète), on a noté $B^\wedge$ la limite projective des B/n, B^D l'ensemble des morphismes continus de B dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et $\overline{B}$ le quotient de B par son sous-groupe divisible maximal :

Théorème 0.2. *(théorèmes 2.3, 2.12 et 2.23 et corollaire 2.25)*
(i) Soient $k = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$ et A une variété abélienne sur k. Soit A^t sa variété abélienne duale. Les groupes $H^1(k, A)$ et $(H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ sont isomorphes modulo divisibles. Plus précisément, on a une suite exacte :

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)} \to H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D \to 0,$$

où $m(A)$ est un entier naturel compris entre 0 et $4 \dim A$ dépendant de la géométrie de A. L'entier $m(A)$ est nul si, et seulement si, la variété abélienne sur $\mathbb{C}((t_0))$ apparaissant dans la réduction du modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A modulo t_1 a très mauvaise réduction. Lorsque la fibre spéciale de $\mathcal{A}$ est connexe, le noyau de $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ est un groupe contenant $H^1_{nr}(k, A)$ qui peut être décrit explicitement : on le note $H^1_{nrs}(k, A)$.
(ii) Soient $k = \mathbb{C}((t_0))$ et K le corps des fonctions d'une courbe projective lisse géométriquement intègre X sur k. On note $X^{(1)}$ l'ensemble des points fermés de X. Soit A une variété abélienne sur K, de variété abélienne duale A^t. Soit Z l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que $m(A \times_K K_v) = 0$. On suppose que, pour toute

place $v \in X^{(1)} \setminus Z$, la fibre spéciale du modèle de Néron de $A \times_K K_v$ est connexe, et on pose :

$$Ш^1(K,A) := Ker\left(H^1(K,A) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v,A)\right),$$

$$Ш^1(K,A^t) := Ker\left(H^1(K,A^t) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^1(K_v,A^t)\right),$$

$$Ш^1_{nrs}(A) := Ker\left(H^1(K,A) \to \prod_{v \in X^{(1)} \setminus Z} H^1(K_v,A)/H^1_{nrs}(K_v,A) \times \prod_{v \in Z} H^1(K_v,A)\right),$$

$$Ш^1_{nrs}(A^t) := Ker\left(H^1(K,A^t) \to \prod_{v \in X^{(1)} \setminus Z} H^1(K_v,A^t)/H^1_{nrs}(K_v,A^t) \times \prod_{v \in Z} H^1(K_v,A^t)\right).$$

On remarquera que $Ш^1(K,A) \subseteq Ш^1_{nrs}(A)$ et que $Ш^1(K,A^t) \subseteq Ш^1_{nrs}(A^t)$. Alors il existe une dualité parfaite :

$$\overline{Ш^1(K,A)} \times \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ainsi qu'un accouplement $Ш^1(K,A) \times Ш^1(K,A^t) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dont le noyau à gauche (resp. à droite) est constitué des éléments de $Ш^1(K,A)$ (resp. $Ш^1(K,A^t)$) qui sont divisibles dans $Ш^1_{nrs}(A)$ (resp. $Ш^1_{nrs}(A^t)$).

Remarque 0.3. L'énoncé précédent est moins général que les énoncés qui seront démontrés dans l'article : il est en fait possible d'affaiblir l'hypothèse de connexité des fibres spéciales des modèles de Néron. On remarquera aussi que l'hypothèse ne concerne que les places de mauvaise réduction.

Les parties 3 et 5 sont consacrées à une généralisation de (i) du théorème 0.2 aux variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t_0))...((t_d))$ ou $k'((t_2))...((t_d))$ avec k' corps p-adique. Plus précisément, elles permettent de construire un accouplement entre la cohomologie d'une variété abélienne et la cohomologie d'un certain faisceau qui lui est associé puis :

- de démontrer que ledit accouplement induit toujours une dualité parfaite modulo divisibles (corollaires 3.1 et 5.4 et théorèmes 3.5 et 5.7),
- de déterminer quand c'est un accouplement parfait (sans quotienter par les sous-groupes divisbles) (corollaire 3.17, théorèmes 3.18, 5.17 et 5.21 et proposition 5.19),
- de calculer dans certains cas les noyaux à gauche et à droite de l'accouplement (théorèmes 3.25 et 5.29).

Les parties 4 et 6 sont consacrées à une généralisation de (ii) du théorème 0.2 aux variétés abéliennes sur $k(X)$ où $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$ ou $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' corps p-adique et X est une courbe projective lisse géométriquement intègre sur

k (théorèmes 4.7, 6.9 et 6.15 et corollaires 4.8 et 6.16).

Finalement, dans la septième partie, on s'intéresse à la finitude du premier groupe de Tate-Shafarevich d'une variété abélienne sur $k(X)$ où $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$ ou $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' corps p-adique et X est une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k.

0.3 Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu David Harari pour son soutien et ses conseils, ainsi que sa lecture soigneuse de ce texte : sans lui, ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Je suis aussi très reconnaissant à Jean-Louis Colliot-Thélène et à Tamás Szamuely pour leurs commentaires et leurs remarques. Je voudrais finalement remercier l'École Normale Supérieure pour ses excellentes conditions de travail.

0.4 Notations

Corps. Si l est un corps, on notera l^s sa clôture séparable. Si de plus l est un corps de valuation discrète complet, on notera l^{nr} son extension non ramifiée maximale.

Groupes abéliens. Pour M un groupe topologique abélien (éventuellement muni de la topologie discrète), $n > 0$ un entier et ℓ un nombre premier, on notera :
- M_{tors} la partie de torsion de M.
- ${}_nM$ la partie de n-torsion de M.
- $M\{\ell\}$ la partie de torsion ℓ-primaire de M.
- $M_{\text{non}-\ell} = \bigoplus_{p \neq \ell} M\{p\}$ où p décrit les nombres premiers différents de ℓ.
- $M^{(\ell)} := \varprojlim_r M/\ell^r$ le complété pour la topologie ℓ-adique de M.
- $M^\wedge$ la limite projective des M/nM.
- $T_\ell M$ la limite projective des ${}_{\ell^r}M$.
- M_{div} le sous-groupe divisible maximal de M.
- $\overline{M} = M/M_{div}$ le quotient de M par son sous-groupe divisible maximal.
- M^D le groupe des morphismes continus $M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Un groupe abélien de torsion sera dit de type cofini si, pour tout entier naturel $n > 0$, sa n-torsion est finie. La partie ℓ-primaire d'un tel groupe est la somme directe d'un ℓ-groupe abélien fini et d'une puissance finie de $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$.

Faisceaux et cohomologie. Sauf indication du contraire, tous les faisceaux sont considérés pour le petit site étale. Soit $r \geq 0$. Pour F et G deux faisceaux fppf sur un schéma X, on note $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(F,G)$ (ou $\underline{\mathrm{Ext}}^r(F,G)$ s'il n'y a pas d'ambigüité) le faisceau associé pour la topologie étale au préfaisceau $T \mapsto \mathrm{Ext}^r_{T_{fppf}}(F,G)$. On rappelle qu'avec cette définition, la formule de Barsotti-Weil garantit que, si A est une variété abélienne sur un corps k, alors la variété abélienne duale A^t représente le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_k(A,\mathbb{G}_m)$ (voir par exemple le théorème III.18.1 de [Oor66]). Par ailleurs, en mimant les notations pour les groupes abéliens, on pose, pour F un faisceau sur un schéma X et l un nombre premier, $H^r(X,T_lF) = \varprojlim_n H^r(X,{}_{l^n}F)$

et $H^r(X, F\{l\}) = \varinjlim_n H^r(X, {}_{l^n}F)$.

Catégories dérivées. Nous serons amenés quelques fois à considérer des catégories dérivées bornées. On notera alors $- \otimes^{\mathbf{L}} -$ le produit tensoriel dérivé.

Corps locaux supérieurs. Les corps 0-locaux sont par définition les corps finis et le corps $\mathbb{C}((t))$. Pour $d \geq 1$, un corps d-local est un corps complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel est $(d-1)$-local. *On remarquera que cette définition est plus générale que la définition standard.* Lorsque k est un corps d-local, on notera k_0, k_1, ..., k_d les corps tels que k_0 est fini ou $\mathbb{C}((t))$, $k_d = k$, et pour chaque i le corps k_i est le corps résiduel de k_{i+1}. On rappelle le théorème de dualité sur un corps d-local k : pour tout $\text{Gal}(k^s/k)$-module fini M d'ordre n non divisible par $\text{Car}(k_1)$, le groupe abélien fini $\text{Hom}(M, \mu_n^{\otimes d})$ est naturellement muni d'une structure de module galoisien sur k et on a un accouplement parfait de groupes finis $H^r(k, M) \times H^{d+1-r}(k, \text{Hom}(M, \mu_n^{\otimes d})) \to H^{d+1}(k, \mu_n^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ce théorème est énoncé et démontré dans [Mil06] (théorème 2.17) lorsque $k_0 \neq \mathbb{C}((t))$. Il se prouve exactement de la même manière dans ce dernier cas : en effet, il suffit de procéder par récurrence à l'aide du lemme 2.18 de [Mil06], l'initialisation étant réduite à la dualité évidente $H^r(k_{-1}, M) \times H^{-r}(k_{-1}, \text{Hom}(M, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \to H^0(k_{-1}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour le corps "-1-local" $k_{-1} = \mathbb{C}$.

Groupes de Tate-Shafarevich. Lorsque L est le corps des fonctions d'une variété projective lisse géométriquement intègre Y sur un corps l et M est un $\text{Gal}(L^s/L)$-module discret, le r-ième groupe de Tate-Shafarevich de M est, par définition, le groupe $Ш^r(L, M) = \text{Ker}(H^r(L, M) \to \prod_{v \in Y^{(1)}} H^r(L_v, M))$, où $Y^{(1)}$ désigne l'ensemble des points de codimension 1 de Y.

Groupe de Brauer. Lorsque Z est un schéma, on note $\text{Br}(Z)$ le groupe de Brauer cohomologique $H^2(Z, \mathbb{G}_m)$. Si Z est une l-variété géométriquement intègre pour un certain corps l, on note $\text{Br}_1(Z)$ le groupe de Brauer algébrique $\text{Ker}(\text{Br}(Z) \to \text{Br}(Z \times_l l^s))$.

Cadre. Dans toute la suite, d désignera un entier naturel fixé (éventuellement nul), k un corps d-local et X une courbe projective lisse géométriquement intègre sur k. On notera K son corps des fonctions. *Lorsque k_0 est fini, on supposera que le corps k_1 est de caractéristique 0* : autrement dit, ou bien $k_0 = \mathbb{C}((t))$, ou bien $d \geq 1$ et k_1 est un corps p-adique. Lorsque M est un $\text{Gal}(K^s/K)$-module discret, on notera parfois $Ш^r(M)$ au lieu de $Ш^r(K, M)$.

Cohomologie à support compact. Pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et $\mathcal{F}$ un faisceau sur U, le r-ième groupe de cohomologie à support compact est, par définition, le groupe $H^r_c(U, \mathcal{F}) = H^r(X, j_!\mathcal{F})$. On remarquera que, contrairement à la définition classique de la cohomologie à support compact, cette définition ne dépend pas du choix d'une compactification lisse de U (plus précisément, nous avons choisi X comme compactification lisse de U).

Tores algébriques. On dit qu'un groupe algébrique T sur un corps l est un tore si $T \times_l l^s$ est isomorphe à $\mathbb{G}_m^r$ pour un certain $r \geq 0$. On rappelle que le foncteur $T \mapsto \hat{T} = \mathrm{Hom}_{l^s,gr}(T \times l^s, \mathbb{G}_{m,l^s})$ établit une équivalence de catégories entre les tores algébriques sur l et les $\mathrm{Gal}(l^s/l)$-modules qui, en tant que groupes abéliens, sont libres de type fini. Si T est un tore sur l, on appelle rang de T la dimension d'un sous-tore déployé maximal : c'est aussi le rang de $H^0(l, \hat{T})$. Par ailleurs, on dit qu'un tore T sur l est quasi-trivial s'il est isomorphe à $R_{L/l}\mathbb{G}_m$ pour une certaine l-algèbre finie séparable L.

1. Préliminaires

1.1 Groupes de torsion de type cofini

Dans cet article, nous étudierons souvent la structure des groupes de cohomologie par des arguments de comptage. Ainsi, les lemmes qui suivent, qui ne sont que des exercices d'algèbre élémentaire, seront utilisés très souvent sans référence explicite :

Lemme 1.1. *(Théorème 25.1 de [Fuc70])*
Soit A un groupe de torsion de type cofini. Pour chaque nombre premier ℓ, il existe un groupe fini F_ℓ et un entier naturel r_ℓ tels que $A\{\ell\} \cong F_\ell \oplus (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{r_\ell}$.

Lemme 1.2. *Avec les notations du lemme précédent, pour tout entier naturel non nul n, on a :*

$$\frac{|{}_nA|}{|A/n|} = \prod_\ell \ell^{r_\ell v_\ell(n)}.$$

Ici, $v_\ell(n)$ désigne la valuation ℓ-adique de n.

Lemme 1.3. *Soient A et A' deux groupes de torsion de type cofini. Si $|{}_nA| = |{}_nA'|$ pour tout entier naturel n, alors A et A' sont (non canoniquement) isomorphes.*

1.2 Caractéristique d'Euler-Poincaré

On rappelle brièvement la définition de la caractéristique d'Euler-Poincaré :

Définition 1.4. ***(Caractéristique d'Euler-Poincaré)***
*Soit F un $Gal(k^s/k)$-module fini. La **caractéristique d'Euler-Poincaré** de F est :*

$$\chi(k, F) = \prod_{r=0}^{\infty} |H^r(k, F)|^{(-1)^r}.$$

Cette quantité est bien définie car $H^r(k, F)$ est fini pour chaque $r \geq 0$ et k est de dimension cohomologique finie (égale à $d+1$).

Proposition 1.5. *Soit F un $Gal(k^s/k)$-module fini.*

(i) Si k_0 est fini et $d \geq 2$, alors $\chi(k,F)=1$.
(ii) Si $k_0 = \mathbb{C}((t))$, alors $\chi(k,F)=1$.

Démonstration. (i) Notons κ le corps résiduel de k et procédons par récurrence sur d.

- Supposons que $d=2$. On dispose de la suite spectrale de Hochschild-Serre $H^r(\kappa, H^s(k^{nr},F)) \Rightarrow H^{r+s}(k,F)$, qui dégénère en une suite exacte longue :

$$... \to H^r(\kappa, H^0(k^{nr},F)) \to H^r(k,F) \to H^{r-1}(\kappa, H^1(k^{nr},F)) \to ...$$

  On a donc $\chi(k,F) = \frac{\chi(\kappa,H^0(k^{nr},F))}{\chi(\kappa,H^1(k^{nr},F))}$. Or $H^0(k^{nr},F)$ et $H^1(k^{nr},F)$ ont même cardinal puisque $\mathrm{Gal}(k^s/k^{nr}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ (cela découle aisément de la proposition 1.7.7(i) de [NSW08]). Par conséquent, d'après le théorème 2.8 de [Mil06], on a $\chi(\kappa, H^0(k^{nr},F)) = \chi(\kappa, H^1(k^{nr},F))$, et donc $\chi(k,F)=1$.
- Soit $d>2$ et supposons que la proposition soit vraie pour tout corps $(d-1)$-local. Comme avant, la suite spectrale $H^r(\kappa, H^s(k^{nr},F)) \Rightarrow H^{r+s}(k,F)$ dégénère en une suite exacte longue :

$$... \to H^r(\kappa, H^0(k^{nr},F)) \to H^r(k,F) \to H^{r-1}(\kappa, H^1(k^{nr},F)) \to ...$$

  On a donc $\chi(k,F) = \frac{\chi(\kappa,H^0(k^{nr},F))}{\chi(\kappa,H^1(k^{nr},F))}$. Par hypothèse de récurrence, on a l'égalité $\chi(\kappa, H^0(k^{nr},F)) = \chi(\kappa, H^1(k^{nr},F)) = 1$, et donc $\chi(k,F)=1$.

(ii) L'énoncé est vrai pour $d=0$ puisque $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}((t))^s/\mathbb{C}((t))) \cong \hat{\mathbb{Z}}$. On procède ensuite par récurrence comme dans (i).

□

1.3 Tores algébriques

Dans ce paragraphe, nous allons calculer le sous-groupe divisible maximal de $H^r(k,T)$ pour T un k-tore et r un entier naturel. Pour ce faire, on commence par rappeller le lemme d'Ono, qui sera utilisé à de nombreuses reprises :

Lemme 1.6. ***(Lemme d'Ono - théorème 1.5.1 de [Ono61])***
Soient l un corps et T un tore sur l. Il existe un entier naturel non nul m, des l-tores quasi-triviaux T_0 et R et un l-schéma en groupes fini commutatif F tels que l'on ait une suite exacte :

$$0 \to F \to R \to T^m \times_l T_0 \to 0.$$

1.3.1 Cas où $k_0 = \mathbb{C}((t))$

Nous nous plaçons d'abord dans le cas, plus simple, où $k_0 = \mathbb{C}((t))$.

Lemme 1.7. *Pour chaque entier naturel non nul n, l'ordre de $H^1(k,\mu_n)$ est n^{d+1}.*

Démonstration. On procède par récurrence sur d. Pour $d = 0$, le lemme est clairement vrai. Supposons-le prouvé pour un certain d, et considérons un corps $(d+1)$-local k avec $k_0 = \mathbb{C}((t))$. En notant κ le corps résiduel de k, on a une suite exacte (paragraphe 2 de l'annexe du chapitre II de [Ser94]) :

$$0 \to H^1(\kappa, \mu_n) \to H^1(k, \mu_n) \to H^0(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0.$$

Comme κ est d-local, l'hypothèse de récurrence impose que $|H^1(\kappa, \mu_n)| = n^{d+1}$, et donc $|H^1(k, \mu_n)| = n|H^1(\kappa, \mu_n)| = n^{d+2}$. □

Proposition 1.8. *Soient T un tore sur k et ρ son rang. On a alors pour chaque entier naturel non nul n :*

$$\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{-d\rho}.$$

Démonstration.
- Le lemme 1.7 implique que :

$$\frac{|{}_n\mathbb{G}_m(k)|}{|\mathbb{G}_m(k)/n|} = \frac{|H^0(k, \mu_n)|}{|H^1(k, \mu_n)|} = \frac{n}{|H^1(k, \mu_n)|} = n^{-d}.$$

  Cela montre que la proposition est vraie pour $T = \mathbb{G}_m$, et donc aussi pour tout tore quasi-trivial d'après le lemme de Shapiro.
- On se place maintenant dans le cas général, où T est un tore quelconque. Soient m un entier naturel non nul et T_0 un tore quasi-trivial sur k tels que l'on ait une suite exacte :

$$0 \to F \to R \to T^m \times_k T_0 \to 0$$

  avec F un schéma en groupes fini commutatif sur k et R un tore quasi-trivial sur k. Notons ρ_R le rang de R. En passant à la cohomologie et en appliquant le lemme de Shapiro et le théorème de Hilbert 90, on obtient une suite exacte :

$$0 \to F(k) \to R(k) \to T(k)^m \times T_0(k) \to H^1(k, F) \to 0.$$

  Comme F est fini, les groupes $F(k)$ et $H^1(k, F)$ sont finis. On déduit alors du lemme du serpent que :

$$\left(\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)/n|}\right)^m \times \frac{|{}_nT_0(k)|}{|T_0(k)/n|} = \frac{|{}_nR(k)|}{|R(k)/n|}.$$

  Or nous avons montré que $\frac{|{}_nT_0(k)|}{|T_0(k)/n|} = n^{-d(\rho_R - \rho m)}$ et $\frac{|{}_nR(k)|}{|R(k)/n|} = n^{-d\rho_R}$, puisque T_0 et R sont des tores quasi-triviaux de rangs respectifs $\rho_R - \rho m$ et ρ_R. On en déduit que $\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{-d\rho}$.

□

Proposition 1.9. *Soit T un tore de rang ρ sur k. On a alors pour chaque entier naturel non nul n :*

$$\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)_{tors}/n|} = n^{\rho}.$$

Démonstration. • La propriété est évidente pour $T = \mathbb{G}_m$. Elle est donc aussi vraie pour tout tore quasi-trivial.

• On se place maintenant dans le cas général. Soient m un entier naturel non nul et T_0 un tore quasi-trivial sur k tels que l'on ait une suite exacte :

$$0 \to F \to R \to T^m \times_k T_0 \to 0$$

avec F un schéma en groupes fini commutatif sur k et R un tore quasi-trivial sur k. Comme $F(k^s)$ est fini, on déduit une suite exacte :

$$0 \to F(k^s)_{tors} \to R(k^s)_{tors} \to T^m(k^s)_{tors} \times T_0(k^s)_{tors} \to 0.$$

En passant à la cohomologie, on obtient l'exactitude de :

$$0 \to F(k)_{tors} \to R(k)_{tors} \to T(k)^m_{tors} \times T_0(k)_{tors} \to H^1(k, F(k^s)_{tors}).$$

Or $F(k^s)_{tors}$ est fini. Donc il en est de même du groupe $H^1(k, F(k^s)_{tors})$, et il existe une suite exacte :

$$0 \to F(k)_{tors} \to R(k)_{tors} \to T(k)^m_{tors} \times T_0(k)_{tors} \to Q \to 0,$$

où Q est fini. On déduit du lemme du serpent que :

$$\left(\frac{|_nT(k)|}{|T(k)_{tors}/n|}\right)^m \times \frac{|_nT_0(k)|}{|T_0(k)_{tors}/n|} = \frac{|_nR(k)|}{|R(k)_{tors}/n|}.$$

Or, en notant ρ_R le rang de R, nous avons montré que $\frac{|_nT_0(k)|}{|T_0(k)_{tors}/n|} = n^{\rho_R - \rho m}$ et $\frac{|_nR(k)|}{|R(k)_{tors}/n|} = n^{\rho_R}$. On en déduit que $\frac{|_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{\rho}$.

□

Remarque 1.10. Comme $T(k)_{tors}$ est un groupe de torsion de type cofini, on déduit de la proposition précédente que $T(k)_{tors} \cong F \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho}$ pour un certain groupe abélien F dépendant de T tel que, pour chaque nombre premier ℓ, la torsion ℓ-primaire de F est finie. On peut en fait montrer que F est fini. En effet, si $x \in F$ et L est une extension finie galoisienne de k déployant T, on remarque que x est divisible dans $T(L)_{tors}$. Par conséquent, $[L : k]x$ est divisible dans $T(k)_{tors}$. Comme $[L : k]x \in F$, on déduit que x est de $[L : k]$-torsion, ce qui montre que F est d'exposant fini, donc fini.

Proposition 1.11. *Soit T un tore de rang ρ sur k. Soit $r \geq 1$. On note $c_{r,d} = 0$ si $r = 1$ et $c_{r,d} = \binom{d+1}{r}$ si $r > 1$. Il existe un groupe abélien fini F (qui dépend de r et de T) tel que :*

$$H^r(k, T) \cong F \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{c_{r,d}\cdot\rho}.$$

De plus, si $T = \mathbb{G}_m$ (ou si T est quasi-trivial), alors $F = 0$.

Démonstration. On procède en deux étapes :

(A) Montrons d'abord la proposition pour $T = \mathbb{G}_m$ en procédant par double récurrence sur d et r. Pour $d = 0$, la proposition est vraie par le théorème de Hilbert 90 et par dimension cohomologique. Supposons-la donc vraie pour un certain $d \geq 0$, et considérons k un corps $d+1$-local.

- Pour $r = 1$, on a bien $H^1(k, \mathbb{G}_m) = 0$ par le théorème de Hilbert 90.
- Pour $r = 2$, si l'on note κ le corps résiduel de k, on a pour chaque $n \geq 1$ la suite exacte (voir le paragraphe 2 de l'annexe du chapitre II de [Ser94]) :

$$0 \to H^2(\kappa, \mu_n) \to H^2(k, \mu_n) \to H^1(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0.$$

Comme $H^2(\kappa, \mu_n) = {}_nH^2(\kappa, \mathbb{G}_m)$, $H^2(k, \mu_n) = {}_nH^2(k, \mathbb{G}_m)$ et $|H^1(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})| = n^{d+1}$ d'après le lemme 1.7, on obtient que $|{}_nH^2(k, \mathbb{G}_m)| = n^{d+1}|{}_nH^2(\kappa, \mathbb{G}_m)| = n^{d+1+\binom{d+1}{2}} = n^{\binom{d+2}{2}}$. On en déduit que $H^2(k, \mathbb{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\binom{d+2}{2}}$ d'après le lemme 1.3.
- Supposons que l'on ait montré que $H^r(k, \mathbb{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\binom{d+2}{r}}$ pour un certain $r \geq 2$. On a alors la suite exacte :

$$0 \to H^{r+1}(\kappa, \mu_n) \to H^{r+1}(k, \mu_n) \to H^r(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0.$$

Par hypothèse de récurrence, les groupes $H^r(\kappa, \mathbb{G}_m)$, $H^r(k, \mathbb{G}_m)$ et $H^{r-1}(\kappa, \mathbb{G}_m)$ sont divisibles, et donc on a $H^{r+1}(\kappa, \mu_n) = {}_nH^{r+1}(\kappa, \mathbb{G}_m)$, $H^{r+1}(k, \mu_n) = {}_nH^{r+1}(k, \mathbb{G}_m)$ et $H^r(\kappa, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H^r(\kappa, \mu_n) = {}_nH^r(\kappa, \mathbb{G}_m)$. On en déduit, toujours à l'aide de l'hypothèse de récurrence, que $|{}_nH^{r+1}(k, \mathbb{G}_m)| = n^{\binom{d+1}{r+1}+\binom{d+1}{r}} = n^{\binom{d+2}{r+1}}$, et donc que $H^{r+1}(k, \mathbb{G}_m) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\binom{d+2}{r+1}}$.

Cela achève la démonstration de la proposition pour $T = \mathbb{G}_m$. Le lemme de Shapiro montre alors que la proposition est vraie pour tout tore quasi-trivial.

(B) On se place maintenant dans le cas général. Soient m un entier naturel non nul et T_0 un tore quasi-trivial sur k tels que l'on ait une suite exacte :

$$0 \to F_0 \to R \to T^m \times_k T_0 \to 0$$

avec F_0 un schéma en groupes fini commutatif sur k et R un tore quasi-trivial sur k. Notons ρ_R le rang de R. En passant à la cohomologie, on obtient une suite exacte :

$$H^r(k, F_0) \to H^r(k, R) \to H^r(k, T)^m \times H^r(k, T_0) \to H^{r+1}(k, F_0).$$

Comme F_0 est fini, on déduit du lemme du serpent que :

$$\left(\frac{|{}_nH^r(k, T)|}{|H^r(k, T)/n|}\right)^m \times \frac{|{}_nH^r(k, T_0)|}{|H^r(k, T_0)/n|} = \frac{|{}_nH^r(k, R)|}{|H^r(k, R)/n|}.$$

Par conséquent, comme le rang de T_0 est $\rho_R - m\rho$:

$$\left(\frac{|{}_nH^r(k, T)|}{|H^r(k, T)/n|}\right)^m = n^{c_{r,d}(-\rho_R+m\rho)} n^{c_{r,d}\cdot\rho_R} = n^{mc_{r,d}\cdot\rho},$$

et on a $\frac{|_nH^r(k,T)|}{|H^r(k,T)/n|} = n^{c_{r,d}\cdot\rho}$. On en déduit que $H^r(k,T) \cong F \oplus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{c_{r,d}\cdot\rho}$ pour un certain groupe abélien F tel que, pour chaque premier ℓ, la partie ℓ-primaire de F est finie. Soit L une extension finie galoisienne de k déployant T. Alors, comme $H^r(L,\mathbb{G}_m)$ est divisible, un argument de restriction-corestriction montre que tout élément de $[L:k]F$ est divisible. Par conséquent, $[L:k]F = 0$, et F est fini.

□

Proposition 1.12. *Soit T un tore de rang ρ sur k. On a alors pour chaque entier naturel naturel non nul n :*

$$\frac{|_nH^1(k,T(k^s)_{tors})|}{|H^1(k,T(k^s)_{tors})/n|} = n^{(d+1)\rho}.$$

Démonstration. Pour $T = \mathbb{G}_m$, on a $H^1(k,\mu_n) = {}_nH^1(k,\mathbb{G}_m(k^s)_{tors})$, et donc $H^1(k,\mathbb{G}_m(k^s)_{tors}) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{d+1}$ d'après le lemme 1.7. La formule est donc vraie pour les tores quasi-triviaux. En procédant comme dans les propositions précédentes, on obtient le résultat désiré. □

1.3.2 Cas où k_1 est un corps p-adique

On se place maintemant dans le cas où k_0 est un corps fini de caractéristique p, et on rappelle que l'on a supposé que k_1 est un corps p-adique.

Lemme 1.13. *Pour chaque entier naturel non nul n, l'ordre de $H^1(k,\mu_n)$ est :*

$$n^d \cdot |\mu_n(k_1)| \cdot p^{[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)}.$$

Démonstration. En procédant exactement comme dans le lemme 1.7, on a l'égalité $|H^1(k,\mu_n)| = n^{d-1}\cdot|H^1(k_1,\mu_n)|$. En utilisant alors le théorème I.2.8 de [Mil06] et la dualité de Tate sur k_1, on obtient :

$$|H^1(k,\mu_n)| = n^{d-1}\cdot|H^0(k_1,\mu_n)|\cdot|H^2(k_1,\mu_n)|\cdot p^{[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)} = n^d\cdot|\mu_n(k_1)|\cdot p^{[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)}.$$

□

Proposition 1.14. *Soit T un k-tore de rang ρ.*
(i) Pour chaque entier naturel non nul n, on a :

$$\frac{|_n\mathbb{G}_m(k)|}{|\mathbb{G}_m(k)/n|} = n^{-d}\cdot p^{-[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)}.$$

(ii) Pour chaque entier naturel n non divisible par p :

$$\frac{|_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{-d\rho}.$$

(iii) Si $d=1$ (c'est-à-dire k est p-adique), alors pour chaque entier naturel non nul n :

$$\frac{|_nT(k)|}{|T(k)/n|} = n^{-\rho}\cdot p^{-[k:\mathbb{Q}_p]\dim T\cdot v_p(n)}.$$

Démonstration. Pour (i), il suffit d'appliquer le lemme 1.13 et de remarquer que $|\mu_n(k)| = |\mu_n(k_1)|$. Pour (ii) et (iii), les preuves sont analogues à celle de 1.8. $\square$

Remarque 1.15. On a $\frac{|{}_nT(k)|}{|T(k)_{tors}/n|} = 1$ pour tout tore T et tout entier naturel n non nul puisque $T(k)_{tors}$ est fini.

Proposition 1.16. *Soit T un k-tore de rang ρ.*
(i) Pour $r \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, ℓ un nombre premier différent de p et $t \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{|{}_{\ell^t}H^r(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(i))|}{|H^r(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(i))/\ell^t|} = \begin{cases} \ell^{t\binom{d}{i}} & si\ r \in \{i, i+1\} \\ 1 & sinon, \end{cases}$$

$$\frac{|{}_{p^t}H^r(k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))|}{|H^r(k, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))/p^t|} = \begin{cases} p^{t\left(\binom{d}{i}+\binom{d-1}{r-1}[k_1:\mathbb{Q}_p]\right)} & si\ r \in \{i, i+1\} \\ p^{t\binom{d-1}{r-1}[k_1:\mathbb{Q}_p]} & sinon. \end{cases}$$

(ii) Pour $r \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, ℓ un nombre premier différent de p et $t \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{|{}_{\ell^t}H^r(k, \varinjlim_s {}_{\ell^s}T(k^s) \otimes \mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}(i))|}{|H^r(k, \varinjlim_s {}_{\ell^s}T(k^s) \otimes \mathbb{Z}/\ell^s\mathbb{Z}(i))/\ell^t|} = \begin{cases} \ell^{t\binom{d}{i+1}\rho} & si\ r \in \{i+1, i+2\} \\ 1 & sinon. \end{cases}$$

(iii) Si $d = 1$ (ie k est p-adique), alors pour $r \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{|{}_{p^t}H^r(k, \varinjlim_s {}_{p^s}T(k^s) \otimes \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(i))|}{|H^r(k, \varinjlim_s {}_{p^s}T(k^s) \otimes \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}(i))/p^t|} = \begin{cases} p^{t((\delta_{i,-1}+\delta_{i,0})\rho+\delta_{r,1}[k:\mathbb{Q}_p]\dim T)} & si\ r \in \{i+1, i+2\} \\ p^{t\delta_{r,1}[k:\mathbb{Q}_p]\dim T} & sinon, \end{cases}$$

où $\delta_{a,b}$ désigne le symbole de Kronecker.

Démonstration. Pour (i), on vérifie d'abord que la propriété est vraie dans le cas où $d = 1$:
- la vérification est évidente pour $r \notin \{0, 1, 2\}$ par dimension cohomologique ;
- pour $r = 0$, il suffit de remarquer que k possède un nombre fini de racines de l'unité ;
- pour $r = 2$, on se ramène au cas $r = 0$ grâce à la dualité de Tate $H^2(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))^D \cong H^0(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1-i))$;
- pour $r = 1$, on exploite la caractéristique d'Euler-Poincaré sur k (théorème I.2.8 de [Mil06]) :

$$\frac{|H^0(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))| \cdot |H^2(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))|}{|H^1(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))|} = [\mathcal{O}_k : n\mathcal{O}_k]^{-1}.$$

Une fois la propriété prouvée pour $d = 1$, il suffit de procéder par récurrence sur d grâce à la suite exacte (paragraphe 2 de l'annexe du chapitre II de [Ser94]) :

$$0 \to H^r(k_{d-1}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)) \to H^r(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)) \to H^{r-1}(k_{d-1}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i-1)) \to 0.$$

Pour (ii) et (iii), la preuve est analogue à celle de la proposition 1.11. $\square$

Corollaire 1.17. *Fixons des entiers $n \geq 1$ et $r \geq 3$.*

(i) On a :

$$\frac{|{}_nH^2(k,\mathbb{G}_m)|}{|H^2(k,\mathbb{G}_m)/n|} = n^d \cdot p^{(d-1)[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)}, \qquad \frac{|{}_nH^r(k,\mathbb{G}_m)|}{|H^r(k,\mathbb{G}_m)/n|} = p^{\binom{d-1}{r-1}[k_1:\mathbb{Q}_p]v_p(n)}.$$

(ii) Soit T un k-tore. Si p ne divise pas n ou si $d=1$:

$$\frac{|{}_nH^2(k,T)|}{|H^2(k,T)/n|} = n^{d\rho}, \qquad \frac{|{}_nH^r(k,T)|}{|H^r(k,T)/n|} = 1.$$

1.4 Variétés abéliennes

1.4.1 Réduction des variétés abéliennes

Soient l un corps complet de valuation discrète et A une variété abélienne sur l. Notons $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A et A_0 sa fibre spéciale. Soit A_0^0 la composante connexe du neutre dans A_0. On rappelle que A_0/A_0^0 est un groupe algébrique fini et qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to U \times_l T \to A_0^0 \to B \to 0,$$

où U est un groupe abélien unipotent, T un tore et B une variété abélienne. Dans le cas où l est de caractéristique résiduelle nulle, U est une puissance de $\mathbb{G}_a$.

Définition 1.18. *On dit que A a **très mauvaise réduction** si $T=0$ et $B=0$. On dit que A est **à réduction scindée** si la suite exacte $0 \to T \to A_0^0 \to A_0^0/T \to 0$ est scindée.*

Théorème 1.19. ***(Théorème de Ogg - Théorème 1 de [Ogg62])***
Soient l un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et A une variété abélienne sur $l((t))$. Soient $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A et A_0 la fibre spéciale de $\mathcal{A}$. Soit A_0^0 la composante connexe du neutre dans A_0. On considère la suite exacte $0 \to U \times_l T \to A_0^0 \to B \to 0$ où U est une puissance de $\mathbb{G}_a$, T est un tore et B une variété abélienne. Soient r la dimension de T, s la dimension de U et $\epsilon = r+2s$. Alors $H^1(l((t)),A) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\dim A-\epsilon}$. En particulier, le groupe $H^1(l((t)),A) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\dim A-\epsilon}$ est nul si, et seulement si, la variété abélienne A a très mauvaise réduction.

Remarque 1.20. Dans le théorème précédent, lorsque l'on remplace $l((t))$ par un corps L complet de valuation dicrète de corps résiduel algébriquement clos de caractéristique $p>0$, on a un isomorphisme $H^1(L,A)_{\text{non}-p} \cong ((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\text{non}-p})^{2\dim A-\epsilon}$.

Définition 1.21. *On appellera ϵ l'**entier de Ogg** de A.*

1.4.2 Variétés abéliennes sur un corps fini

Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p et de cardinal q. Soient ℓ un nombre premier différent de p et i un entier relatif. Le but de ce paragraphe est d'établir la proposition suivante :

Proposition 1.22. *Soit A une variété abélienne sur $\mathbb{F}$. On note $A\{\ell\}(i)$ le module galoisien $\varinjlim_r {}_{\ell^r}A(\mathbb{F}^s) \otimes \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(i)$. Alors le groupe $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ est fini.*

Démonstration. Supposons que $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ soit infini. Cela signifie que le groupe $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$, et donc que $A(\mathbb{F}^s)$ possède un sous-module galoisien isomorphe à $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-i)$. Par conséquent, le module de Tate $T_\ell A(\mathbb{F}^s)$ contient $\mathbb{Z}_\ell(-i)$ comme module galoisien. Comme le Frobenius géométrique agit sur $\mathbb{Z}_\ell(1)$ par multiplication par q^{-1}, on déduit que le Frobenius géométrique sur $T_\ell A(\mathbb{F}^s) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ possède une valeur propre de module complexe q^i. Mais l'accouplement de Weil fournit un isomorphisme entre les modules galoisiens $T_\ell A(\mathbb{F}^s)$ et $H^1(A^t \times_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^s, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1)$, et d'après les conjectures de Weil (théorème IV.1.2 de [FK88]), les valeurs propres du Frobenius géométrique sur $H^1(A^t \times_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^s, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ sont de module complexe $q^{-1/2}$: absurde ! Donc $H^0(\mathbb{F}, A\{\ell\}(i))$ est fini. □

Remarque 1.23. Ce résultat sera notamment utile dans la section 5 afin de déterminer quand il y a un bon théorème de dualité pour les groupes de cohomologie d'une variété abélienne sur un corps de la forme $\mathbb{Q}_p((t_1))...((t_{d-1}))$.

2. Variétés abéliennes sur le corps des fonctions d'une courbe sur $\mathbb{C}((t))$

2.1 Étude locale

Le but de cette partie est d'établir un théorème de dualité pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t_0))((t_1))$ (théorème 2.3). Il s'agit d'un résultat analogue aux théorèmes de dualité pour les variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p$ et sur $\mathbb{F}_p((t))$. En fait, c'est essentiellement le "dernier" cas de corps local de dimension cohomologique 2 non compris, et il se trouve qu'il pose certaines difficultés supplémentaires par rapport aux cas déjà connus.

On se place donc dans le cas où $k = \mathbb{C}((t_0))((t_1))$ (et alors $d = 1$). Soient $\kappa = \mathbb{C}((t_0))$ et A une variété abélienne sur k. Soit A^t sa variété abélienne duale, qui, d'après le théorème de Barsotti-Weil, représente le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_k(A, \mathbb{G}_m)$ (on rappelle que $\underline{\mathrm{Ext}}^r_k(A, \mathbb{G}_m)$ est le faisceau sur le petit site étale associé à $T \mapsto \mathrm{Ext}^r_{T_{fppf}}(F, G)$). Comme $\underline{\mathrm{Ext}}^r_k(A, \mathbb{G}_m) = 0$ pour $r \neq 1$, on dispose d'un accouplement $A \otimes^{\mathbf{L}} A^t \to \mathbb{G}_m[1]$, d'où un accouplement :

$$H^r(k, A) \times H^{1-r}(k, A^t) \to \mathrm{Br}\, k \cong H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Lemme 2.1. *Pour chaque entier naturel n et chaque entier r, le morphisme $H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{2-r}(k, A^t))^D$ est injectif et ${}_nH^r(k, A) \to (H^{1-r}(k, A^t)/n)^D$ est surjectif.*

Démonstration. On remarque que $\underline{\mathrm{Hom}}({}_nA, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = {}_nA^t$. On en déduit que, dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{r-1}(k,A)/n \arrow[r] \arrow[d] & H^r(k,{}_nA) \arrow[r] \arrow[d] & {}_nH^r(k,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & ({}_nH^{2-r}(k,A^t))^D \arrow[r] & H^{2-r}(k,{}_nA^t)^D \arrow[r] & (H^{1-r}(k,A^t)/n)^D \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

la flèche verticale centrale est un isomorphisme. Par conséquent, $H^{r-1}(k,A)/n \to ({}_nH^{2-r}(k,A^t))^D$ est injectif et ${}_nH^r(k,A) \to (H^{1-r}(k,A^t)/n)^D$ est surjectif. □

Notons $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A et A_0 sa fibre spéciale. On dispose alors d'une filtration $A_0 \supseteq A_0^0 \supseteq A_0^1$ de A_0, où :
- A_0^0 est la composante connexe de l'élément neutre de A_0,
- $F = A_0/A_0^0$ est un groupe fini,
- A_0^1 est de la forme $U \times T$ où U est un groupe additif (c'est-à-dire une puissance de $\mathbb{G}_a$) et T un tore,
- $B = A_0^0/A_0^1$ est une variété abélienne.

On note ϵ l'entier de Ogg de B.
De même, on note $\mathcal{A}^*$ le modèle de Néron de A^t et A_0^* sa fibre spéciale. On dispose alors d'une filtration $A_0^* \supseteq A_0^{0*} \supseteq A_0^{1*}$ de A_0^*, où :
- A_0^{0*} est la composante connexe de l'élément neutre de A_0^*,
- $F^* = A_0^*/A_0^{0*}$ est un groupe fini,
- A_0^{1*} est de la forme $U^* \times T^*$ où U^* est un groupe additif et T^* un tore,
- $B^* = A_0^{0*}/A_0^{1*}$ est une variété abélienne.

On note ϵ^* l'entier de Ogg de B^*.

Remarque 2.2. Ainsi, B, B^* et toutes les variétés indexées par 0 sont définies sur κ.

Théorème 2.3. *On a une suite exacte :*

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{m(A)} \to H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D \to 0$$

avec $m(A) = 2 \cdot (dim\ B + dim\ B^*) - \epsilon - \epsilon^*$.

Remarque 2.4. La multiplication par n sur A^t est étale puisque k est de caractéristique 0. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, le groupe $nA^t(k)$ est ouvert dans $A^t(k)$. De plus, il est d'indice fini. On en déduit que $H^0(k,A^t)^\wedge$ coïncide avec le complété profini de $H^0(k,A^t)$.

Démonstration. La surjectivité du morphisme $H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$ découle immédiatement du lemme précédent par passage à la limite inductive. Nous voulons maintenant calculer son noyau N.
D'après la propriété universelle du modèle de Néron, on a l'égalité $A(k) = \mathcal{A}(\mathcal{O}_k)$, ainsi qu'une suite exacte :

$$0 \to D \to \mathcal{A}(\mathcal{O}_k) \to A_0(\kappa) \to 0,$$

où D désigne un groupe abélien uniquement divisible (paragraphe 3 de [Lan58]). Le lemme du serpent impose donc que :

$$\frac{|A(k)/n|}{|{}_nA(k)|} = \frac{|A_0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0(\kappa)|}.$$

Nous allons maintenant dévisser A_0.

- En exploitant la suite exacte $0 \to A_0^0(\kappa) \to A_0(\kappa) \to F(\kappa)$, le lemme du serpent et la finitude de $F(\kappa)$, on obtient que :
$$\frac{|A_0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0(\kappa)|} = \frac{|A_0^0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0^0(\kappa)|}.$$
- Comme $H^1(\kappa, U) = 0$ et $H^1(\kappa, T) = 0$ (puisque d'une part $H^1(\kappa, T)$ est d'exposant fini d'après le théorème de Hilbert 90 et d'autre part c'est un groupe divisible car κ est de dimension cohomologique 1), on a une suite exacte :
$$0 \to U(\kappa) \times T(\kappa) \to A_0^0(\kappa) \to B(\kappa) \to 0.$$
Par conséquent :
$$\frac{|A_0^0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0^0(\kappa)|} = \frac{|B(\kappa)/n|}{|{}_nB(\kappa)|} \cdot \frac{|U(\kappa)/n|}{|{}_nU(\kappa)|} \cdot \frac{|T(\kappa)/n|}{|{}_nT(\kappa)|}.$$
Or :
  - on a $\frac{|U(\kappa)/n|}{|{}_nU(\kappa)|} = 1$;
  - comme $\chi(\kappa, {}_nT) = 1$ et $H^1(\kappa, T) = 0$, on a $\frac{|T(\kappa)/n|}{|{}_nT(\kappa)|} = \frac{1}{|{}_nH^1(\kappa,T)|} = 1$;
  - d'après le théorème de Ogg, on a $H^1(\kappa, B) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\cdot\dim B-\epsilon}$; étant donné que $\chi(\kappa, {}_nB) = 1$, on obtient $\frac{|B(\kappa)/n|}{|{}_nB(\kappa)|} = \frac{1}{|{}_nH^1(\kappa,B)|} = \frac{1}{n^{2\cdot\dim B-\epsilon}}$.

  On en déduit que :
$$\frac{|A(k)/n|}{|{}_nA(k)|} = \frac{|A_0^0(\kappa)/n|}{|{}_nA_0^0(\kappa)|} = \frac{1}{n^{2\cdot\dim B-\epsilon}}.$$

On montre de même que :
$$\frac{|A^t(k)/n|}{|{}_nA^t(k)|} = \frac{1}{n^{2\cdot\dim B^*-\epsilon^*}}.$$

On a alors :
$$\begin{aligned}\chi(k, {}_nA) &= \frac{|{}_nA(k)||H^2(k, {}_nA)|}{|A(k)/n||{}_nH^1(k,A)|}\\ &= n^{2\cdot\dim B-\epsilon}\frac{|H^2(k, {}_nA)|}{|{}_nH^1(k,A)|}\\ &= n^{2\cdot\dim B-\epsilon}\frac{|{}_nA^t(k))|}{|{}_nH^1(k,A)|} \qquad \text{(par dualité sur } k)\\ &= n^{2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*}\frac{|A^t(k)/n|}{|{}_nH^1(k,A)|}.\end{aligned}$$

Comme $\chi(k, {}_nA) = 1$ (d'après la proposition 1.5), on en déduit l'égalité :
$$|{}_nH^1(k,A)| = n^{2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*}|A^t(k)/n|.$$

Par conséquent, $|{}_nN| = n^{2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*}$. Cela étant vrai pour tout n, comme N est de torsion de type cofini, on a $N \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2\cdot(\dim B+\dim B^*)-\epsilon-\epsilon^*}$, ce qui achève la preuve avec $m(A) = 2 \cdot (\dim B + \dim B^*) - \epsilon - \epsilon^*$. □

Remarque 2.5. Comme A et A^t sont isogènes (paragraphe 10 de [Mil86]), on a :

$$\frac{|A^t(k)/n|}{|{}_nA^t(k)|} = \frac{|A(k)/n|}{|{}_nA(k)|}$$

pour tout n. Cela montre que $2 \cdot \dim B^* - \epsilon^* = 2 \cdot \dim B - \epsilon$, et donc $m(A) = 2(2 \cdot \dim B - \epsilon)$

Corollaire 2.6. *(i) Si A a bonne réduction, alors $m(A) = 4 \cdot dim\ A - 2\epsilon$. Si de plus B a bonne réduction, alors $m(A) = 4 \cdot dim\ A$, et il y a donc une suite exacte de groupes de torsion de type cofini :*

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{4 \cdot dim\ A} \to H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D \to 0.$$

(ii) En général, on a un isomorphisme $\overline{H^1(k, A)} \cong \overline{(H^0(k, A^t)^\wedge)^D}$.
(iii) Le morphisme $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ est un isomorphisme si, et seulement si, B a très mauvaise réduction.

Dans certains cas, il est possible d'expliciter le noyau de $H^1(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$. Pour ce faire, il convient d'établir quelques résultats préliminaires :

Lemme 2.7. *Le morphisme naturel $H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}) \to H^1(k, A)$ est injectif d'image le sous-groupe $H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr}))$ de $H^1(k, A)$.*

Démonstration. Notons $g : \text{Spec } k \to \text{Spec } \mathcal{O}_k$ et $i : \text{Spec } \kappa \to \text{Spec } \mathcal{O}_k$. Comme $\mathcal{A} \cong g_*A$ (d'après la propriété universelle du modèle de Néron), il suffit de remarquer que :

$$H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}) \cong H^1(\mathcal{O}_k, g_*A) \cong H^1(\kappa, i^*g_*A) \cong H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr}))$$

où le deuxième isomorphisme découle de la proposition II.1.1 de [Mil06] et le troisième de l'exemple II.8.1.9 de [Tam94]. □

Proposition 2.8. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F|$.*
(i) Les groupes $A(k^{nr})$ et $A^t(k^{nr})$ sont ℓ-divisibles.
(ii) Il existe un morphisme fonctoriel injectif

$$(T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D.$$

Démonstration.

(i) Montrons d'abord que $A(k^{nr})$ est ℓ-divisible. Comme $A(k^{nr}) = \mathcal{A}(\mathcal{O}_{k^{nr}})$ et comme il existe un morphisme surjectif $\mathcal{A}(k^{nr}) \to A_0(\kappa^s)$ à noyau divisible, cela revient à montrer que $A_0(\kappa^s)$ est ℓ-divisible. En exploitant la suite exacte $0 \to A_0^0 \to A_0 \to F \to 0$ et le fait que ℓ ne divise pas $|F|$, on remarque alors qu'il suffit de prouver que $A_0^0(\kappa^s)$ est ℓ-divisible. Mais cela découle immédiatement de l'exactitude de $0 \to U \times T \to A_0^0 \to B \to 0$. Donc $A(k^{nr})$ est ℓ-divisible.
D'après le paragraphe IX.11.3 de [SGA7], on a $|F^*| = |F|$. On en déduit que ℓ ne divise pas $|F^*|$ et donc que le groupe $A^t(k^{nr})$ est ℓ-divisible.

(ii) D'après (i), on a une suite exacte :

$$0 \to {}_{\ell^r}A^t(k^{nr}) \to A^t(k^{nr}) \to A^t(k^{nr}) \to 0.$$

Comme ${}_{\ell^r}H^1(k^{nr}/k, A^t(k^{nr}))$ et $H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))$ sont finis (puisque ce sont des sous-quotients de $H^1(k, {}_{\ell^r}A)$), en passant à la limite projective, on obtient une surjection $\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})) \to T_\ell H^1(k^{nr}/k, A^t(k^{nr}))$. En utilisant 2.7, cela permet de réaliser $(T_\ell H^1(k^{nr}/k, A^t(k^{nr})))^D = (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D$ comme un sous-groupe de $(\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D$. □

Lemme 2.9. *On obtient un isomorphisme :*

$$\iota_\ell : H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))\{\ell\} \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D$$

par composition des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))\{\ell\} &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, A)) \\ &\xleftarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \\ &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})^D) \\ &\xrightarrow{\sim} (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D. \end{aligned}$$

Démonstration. Le premier isomorphisme est évident. Le deuxième découle du fait que $A(k^{nr})$ est ℓ-divisible. Les deux derniers sont obtenus par dualité sur $\mathrm{Gal}(k^s/k^{nr}) \cong \mathrm{Gal}(k^{nr}/k) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ (voir exemple 1.10 de [Mil06]). □

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire la définition suivante :

Définition 2.10. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F|$. On appelle* ***ℓ-groupe de cohomologie non ramifiée symétrisé de*** *A le groupe :*

$$H^1_{nrs}(k, A, \ell) := (\iota_\ell \circ Res)^{-1}((T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D) \subseteq H^1(k, A)\{\ell\}$$

où $Res : H^1(k, A) \to H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))$ désigne la restriction et ι_ℓ l'isomorphisme du lemme précédent. Comme κ est de dimension cohomologique 1, le morphisme Res est surjectif et on a une suite exacte :

$$0 \to H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\} \to H^1_{nrs}(k, A, \ell) \to (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D \to 0.$$

Remarque 2.11. • Le ℓ-groupe de cohomologie non ramifiée symétrisé de A est bien défini quel que soit ℓ lorsque F est trivial, c'est-à-dire lorsque A_0 est connexe.

• La suite exacte :

$$0 \to H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A})\{\ell\} \to H^1_{nrs}(k, A, \ell) \to (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D \to 0$$

s'identifie à la suite exacte de groupes abstraits :

$$0 \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A)/2} \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A)} \to (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{m(A)/2} \to 0.$$

Théorème 2.12. *Pour ℓ premier ne divisant pas $|F|$, la partie ℓ-primaire du noyau de $H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$ est $H^1_{nrs}(k,A,\ell)$.*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr},A)) & \\
H^1(k,A)\{\ell\} \arrow[ur, "Res"] \arrow[ddd, "f_4"] & & \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \arrow[ul, "f_1"', "\cong"] \arrow[ddd, "f_6"', "\cong"] \\
 & \varinjlim_r H^1(k, {}_{\ell^r}A) \arrow[ul, "f_2"] \arrow[ur, "f_3"'] \arrow[d, "f_5"] & \\
 & (\varprojlim_r H^1(k, {}_{\ell^r}A^t))^D \arrow[dl, "f_7"] \arrow[dr, "f_8"] & \\
(H^0(k,A^t)^{(\ell)})^D \arrow[dr, equal] & & (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D \arrow[dl, "f_9"] \\
 & (H^0(k^{nr}/k, A^t(k^{nr}))^{(\ell)})^D &
\end{tikzcd}$$

où le morphisme f_6 est obtenu par composition des isomorphismes

$$\varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^0(k^{nr}/k, ({}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))^D) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_r (H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D$$

provenant de la dualité pour la cohomologie du groupe profini $\hat{\mathbb{Z}}$. On vérifie aisément que ce diagramme est commutatif.

Soit maintenant $x \in {}_{\ell^r}H^1(k,A)$. Comme f_2 est surjectif, on peut relever x en $z \in H^1(k, {}_{\ell^r}A)$. On remarque alors que $f_3(z) = f_1^{-1}(Res(x))$. Donc, par définition de ι_ℓ :

$$\begin{aligned} f_9(\iota_\ell(Res(x))) &= f_9(f_6(f_1^{-1}(Res(x))) = f_9(f_6(f_3(z))) \\ &= f_9(f_8(f_5(z))) = f_7(f_5(z)) = f_4(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $x \in \mathrm{Ker}(f_4)$ si, et seulement si,

$$\iota_\ell(Res(x)) \in \mathrm{Ker}(f_9) = (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}^*))^D.$$

□

Remarque 2.13. Pour ℓ divisant $|F|$, le noyau de $H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$ ne contient pas forcément $H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A})\{\ell\}$: par exemple, si ℓ divise $|F(\kappa)|$ et A a très mauvaise réduction, le groupe $H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A})\{\ell\}$ est non trivial alors que le morphisme $H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$ est injectif. En fait, pour ℓ divisant $|F|$, il semble difficile de caractériser la partie ℓ-primaire du noyau de $H^1(k,A) \to (H^0(k,A^t)^\wedge)^D$: en particulier, il serait intéressant de déterminer si elle contient forcément $H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A})\{\ell\}_{div}$.

Pour alléger les notations dans la section suivante, nous noterons :

$$H^1_{nrs}(k,A) := \bigoplus_{\ell \wedge |F|=1} H^1_{nrs}(k,A,\ell).$$

C'est le groupe de torsion dont la partie ℓ-primaire est $H^1_{nrs}(k,A,\ell)$ si ℓ ne divise pas $|F|$, triviale sinon.

2.2 Étude globale

Supposons maintenant que $k = \mathbb{C}((t))$ (et donc que $d = 0$). Soient A une variété abélienne sur $K = k(X)$ et A^t sa variété abélienne duale. Le but de ce paragraphe est d'établir un théorème de dualité à la Cassels-Tate pour A : plus précisément, nous voulons déterminer, sous certaines hypothèses géométriques et modulo divisibles, le dual du groupe de Tate-Shafarevich $Ш^1(A)$.
Pour chaque $v \in X^{(1)}$, notons :
• $\mathcal{A}_v$ le modèle de Néron de A sur $\mathcal{O}_v$,
• F_v le groupe algébrique fini des composantes connexes de la fibre spéciale de $\mathcal{A}_v$,
• B_v la variété abélienne qui apparaît dans la filtration de la fibre spéciale de $\mathcal{A}_v$.
Notons aussi U l'ouvert de bonne réduction de A, de sorte que le modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A sur U est un schéma abélien. Soit $\mathcal{A}^t$ le schéma abélien dual.
Fixons maintenant un nombre premier ℓ et faisons l'hypothèse suivante :

(H 2.14)$_\ell$ *pour chaque $v \in X \setminus U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
- *ℓ ne divise pas $|F_v|$,*
- *B_v a très mauvaise réduction.*

Remarque 2.15. Étant donnée une variété abélienne A, l'hypothèse précédente est vérifiée pour presque tout ℓ. Par conséquent, les résultats que nous allons montrer sont vrais pour presque tout ℓ.

Soit Z l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que B_v a très mauvaise réduction. Pour chaque ouvert V de U, on introduit les groupes suivants :

$$Ш^1_{nr}(V,A) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K,A) \to \prod_{v \in X \setminus V} H^1(K_v,A) \times \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v,A)/H^1_{nr}(K_v,A))\right),$$

$$Ш^1_{nrs}(V,A^t) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K,A^t) \to \prod_{v \in Z \setminus V} H^1(K_v,A^t) \times \prod_{v \in X \setminus (V \cup Z)} H^1(K_v,A^t)/H^1_{nrs}(K_v,A^t) \right.$$
$$\left. \times \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v,A^t)/H^1_{nr}(K_v,A^t))\right),$$

$$Ш^1_{nrs}(A^t) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K, A^t) \to \prod_{v \in Z} H^1(K_v, A^t) \times \prod_{v \in X^{(1)} \setminus Z} H^1(K_v, A^t)/H^1_{nrs}(K_v, A^t) \right).$$

Ici, $H^1_{nr}(K_v, A)$ désigne $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{A}_v) = H^1(K_v^{nr}/K_v, A(K_v^{nr}))$.

Remarque 2.16. • L'intersection $Z \cap U$ n'est pas forcément vide.
• La définition de $Ш^1_{nrs}(A^t)$ est prise de telle sorte que $Ш^1_{nrs}(A^t) = \bigcup_{V \subseteq U} Ш^1_{nrs}(V, A^t)$.

Fixons V un ouvert non vide de U.

Lemme 2.17. *(i) Pour $r > 0$, le groupe $H^r(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.*
(ii) Le groupe $H^2_c(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.

Démonstration. (i) On note $g : \mathrm{Spec}\, K \to V$. On sait que $\mathcal{A}$ représente le faisceau g_*A sur V. On peut alors écrire la suite spectrale de Leray :

$$H^r(V, R^s g_* A) \Rightarrow H^{r+s}(K, A).$$

En calculant les tiges de $R^s g_* A$ grâce au théorème II.6.4.1 de [Tam94], on prouve aisément que, pour $s > 0$, $R^s g_* A$ est un faisceau de torsion. Comme V est quasi-compact, cela entraîne que $H^r(V, R^s g_* A)$ est de torsion pour $r \geq 0$ et $s > 0$. De plus, $H^r(K, A)$ est de torsion pour $r > 0$. La suite spectrale entraîne alors que $H^r(V, \mathcal{A})$ est bien de torsion.
Reste à prouver que ${}_nH^r(V, \mathcal{A})$ est fini pour chaque $n \geq 1$. La suite exacte :

$$0 \to {}_n\mathcal{A} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A} \to 0.$$

montre que ${}_nH^r(V, \mathcal{A})$ est un quotient de $H^r(V, {}_n\mathcal{A})$. Or ce dernier est fini. Donc ${}_nH^r(V, \mathcal{A})$ est fini, et $H^r(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.
(ii) En utilisant le lemme 2.7 de [HSz05], on a une suite exacte :

$$... \to \bigoplus_{v \in X^{(1)} \setminus V} H^1(K_v, A) \to H^2_c(V, \mathcal{A}) \to H^2(V, \mathcal{A}) \to ...$$

Comme les $H^1(K_v, A)$ sont de torsion de type cofini, grâce à (i), on conclut que $H^2_c(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.

□

Lemme 2.18. *Il existe des suites exactes :*

$$0 \to H^0(V, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \to H^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \to 0,$$

$$0 \to H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to H^2_c(V, T_\ell \mathcal{A}) \to T_\ell H^2_c(V, \mathcal{A}) \to 0.$$

Ici, $H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\})$ et $H^2_c(V, T_\ell\mathcal{A})$ désignent $\varinjlim_n H^1(V, {}_{\ell^n}\mathcal{A}^t)$ et $\varprojlim_n H^2_c(V, {}_{\ell^n}\mathcal{A})$ respectivement.

Démonstration. • En utilisant la suite de Kummer, pour chaque entier naturel r on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to H^0(V, \mathcal{A}^t)/\ell^r \to H^1(V, {}_{\ell^r}\mathcal{A}^t) \to {}_{\ell^r}H^1(V, \mathcal{A}^t) \to 0.$$

En prenant la limite inductive, on obtient la suite exacte :

$$0 \to H^0(V, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \to H^1(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \to 0.$$

• Pour chaque entier naturel r on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to H^1_c(V, \mathcal{A})/\ell^r \to H^2_c(V, {}_{\ell^r}\mathcal{A}) \to {}_{\ell^r}H^2_c(V, \mathcal{A}) \to 0.$$

Par passage à la limite projective, on dispose d'une suite exacte :

$$0 \to H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to H^2_c(V, T_\ell\mathcal{A}) \to T_\ell H^2_c(V, \mathcal{A}) \to 0.$$

□

Lemme 2.19. *Il existe un accouplement canonique :*

$$H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \times H^2_c(V, T_\ell\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Démonstration. Le théorème 2.1 de [Izq14] fournit pour chaque $r \geq 0$ un accouplement parfait de groupes finis :

$$H^1(V, {}_{\ell^r}\mathcal{A}^t) \times H^2_c(V, {}_{\ell^r}\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Il suffit alors de passer à la limite pour obtenir un accouplement non dégénéré :

$$H^1(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \times H^2_c(V, T_\ell\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

De plus, d'après la formule de Barsotti-Weil et la nullité de $\underline{\mathrm{Hom}}_V(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m)$, on a un accouplement canonique $\mathcal{A}^t \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{A} \to \mathbb{G}_m[1]$ qui induit donc un accouplement :

$$H^1(V, \mathcal{A}^t) \times H^1_c(V, \mathcal{A}) \to H^3_c(V, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Posons maintenant :

$$D^1(V, \mathcal{A}) = \mathrm{Im}(H^1_c(V, \mathcal{A}) \to H^1(V, \mathcal{A})) = \mathrm{Ker}(H^1(V, \mathcal{A}) \to \bigoplus_{v \in X \setminus V} H^1(K_v, A)),$$

$$D^1_{nrs}(V, \mathcal{A}^t) = \mathrm{Ker}\left(H^1(V, \mathcal{A}^t) \to \bigoplus_{v \in Z \setminus V} H^1(K_v, A^t) \oplus \bigoplus_{v \in X \setminus (V \cup Z)} H^1(K_v, A^t)/H^1_{nrs}(K_v, A^t))\right).$$

Ce sont bien sûr des groupes de torsion de type cofini.

Lemme 2.20. *(i) La suite suivante est exacte :*

$$0 \to H^1(V, \mathcal{A}) \to H^1(K, A) \to \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr}, A).$$

(ii) L'application naturelle $H^1(V, \mathcal{A}) \to H^1(K, A)$ induit un isomorphisme $D^1(V, \mathcal{A}) \cong$ $Ш^1_{nr}(V, A)$.
(iii) L'application naturelle $H^1(V, \mathcal{A}^t) \to H^1(K, A^t)$ induit un isomorphisme

$$D^1_{nrs}(V, \mathcal{A}^t) \cong Ш^1_{nrs}(V, A^t).$$

Démonstration. (i) Soit $g : \operatorname{Spec} K \to V$. La suite spectrale de Leray s'écrit :

$$H^r(V, R^s g_* A) \Rightarrow H^{r+s}(K, A).$$

Cela fournit alors une suite exacte courte :

$$0 \to H^1(V, \mathcal{A}) \to H^1(K, A) \to H^0(V, R^1 g_* A).$$

Soit P un ensemble de points géométriques tels que, pour tout $v \in V$, il existe un unique élément de P d'image v. On sait alors que $R^1 g_* A$ s'injecte dans $\prod_{u \in P} u_* u^* R^1 g_* A$ (c'est le premier terme de la résolution de Godement). On en déduit que $H^0(V, R^1 g_* A)$ s'injecte dans $\prod_{u \in P} u_* u^* R^1 g_* A(V) = \prod_{v \in V} (R^1 g_* A)_{\overline{v}} =$ $\prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr}, A)$. On obtient donc une suite exacte :

$$0 \to H^1(V, \mathcal{A}) \to H^1(K, A) \to \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr}, A).$$

(ii) Cela découle aisément de (i) et de la suite d'inflation-restriction :

$$0 \to H^1_{nr}(K_v, A) \to H^1(K_v, A) \to H^1(K_v^{nr}, A),$$

pour $v \in V^{(1)}$.
(iii) Cela découle aisément des suites exactes :

$$0 \to H^1(V, \mathcal{A}^t) \to H^1(K, A^t) \to \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v^{nr}, A^t),$$
$$0 \to H^1_{nr}(K_v, A^t) \to H^1(K_v, A^t) \to H^1(K_v^{nr}, A^t).$$

□

Afin d'établir un théorème de dualité pour les groupes de Tate-Shafarevich, il convient donc d'établir un théorème de dualité pour les groupes $D^1(U, \mathcal{A})$ et $D^1_{nrs}(V, \mathcal{A}^t)$:

Proposition 2.21. *Il existe un accouplement canonique :*

$$\overline{D^1_{nrs}(V, \mathcal{A}^t)}\{\ell\} \times \overline{D^1(V, \mathcal{A})}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Il convient d'établir préalablement le lemme suivant :

Lemme 2.22. *La suite :*

$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}\setminus V} H^0(K_v,A)^{(\ell)} \to H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)} \to D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)} \to 0$$

est exacte.

Démonstration. Nous disposons d'une suite exacte :

$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}\setminus V} H^0(K_v,A) \to H^1_c(U,\mathcal{A}) \to D^1(U,\mathcal{A}) \to 0,$$

d'où des suites exactes pour tout r :

$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}\setminus V} H^0(K_v,A)/\ell^r \to H^1_c(U,\mathcal{A})/\ell^r \to D^1(U,\mathcal{A})/\ell^r \to 0.$$

En passant à la limite projective on obtient l'exactitude de :

$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}\setminus V} H^0(K_v,A)^{(\ell)} \to H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)} \to D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)} \to 0.$$

□

Démonstration. (De la proposition 2.21)

- Rappelons que, d'après le lemme 2.19, nous disposons d'un accouplement non dégénéré :

  $$H^1(V,\mathcal{A}^t\{\ell\}) \times H^2_c(V,T_\ell\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

  d'où un isomorphisme $H^1(V,\mathcal{A}^t\{\ell\}) \to H^2_c(V,T_\ell\mathcal{A})^D$. On dispose aussi d'un accouplement :

  $$H^1(V,\mathcal{A}^t) \times H^1_c(V,\mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

  qui induit pour chaque entier naturel n un accouplement :

  $${}_{\ell^n}H^1(V,\mathcal{A}^t) \times H^1_c(V,\mathcal{A})/\ell^n \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

  d'où un accouplement obtenu par passage à la limite :

  $$H^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \times H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

  Ainsi on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes (que l'on appellera diagramme (1)) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(V,\mathcal{A}^t)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \arrow[r] \arrow[d] & H^1(V,\mathcal{A}^t\{\ell\}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A}))^D \arrow[r] & (H^2_c(V,T_\ell\mathcal{A}))^D \arrow[r] & (H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

De plus, nous disposons aussi d'un autre diagramme commutatif à lignes exactes (que l'on appellera diagramme (2)) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & H^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & \bigoplus_{v\in X\setminus V}(H^0(K_v,A)^{(\ell)})^D,
\end{tikzcd}$$

où $W=\bigoplus_{v\in Z\setminus V}H^1(K_v,A^t)\{\ell\}\oplus\bigoplus_{v\in X\setminus(V\cup Z)}H^1(K_v,A^t)\{\ell\}/H^1_{nrs}(K_v,A^t)\{\ell\}$. La flèche verticale de droite est un isomorphisme d'après le corollaire 2.6(iii), le théorème 2.12 et l'hypothèse (H 2.14)$_\ell$, et la flèche verticale centrale est surjective d'après le diagramme (1). Cela montre immédiatement que la flèche verticale de gauche est surjective. Nous allons à présent calculer son noyau.

- Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}(D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\}\to(D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D)$ est divisible. En utilisant les diagrammes (1) et (2) et le lemme du serpent, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\}\to(D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D)&\cong\mathrm{Ker}(H^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\}\to(H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D)\\&\cong\mathrm{Coker}(H^0(V,\mathcal{A}^t)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\to(T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A}))^D).\end{aligned}$$

  Or le groupe $(T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A}))^D$ est divisible (puisque $T_\ell H^2_c(V,\mathcal{A})$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini sans torsion), et il en est donc de même de $\mathrm{Ker}(D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\}\to(D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D)$.
- Remarquons maintenant que $D^1(V,\mathcal{A})$ est de torsion de type cofini. Cela entraîne que le morphisme naturel $D^1(V,\mathcal{A})\{\ell\}\to D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)}$ induit un isomorphisme $\overline{D^1(V,\mathcal{A})}\{\ell\}\cong D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)}$. Ce groupe étant fini, le noyau de $D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\}\to(D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D$ est $(D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\})_{\mathrm{div}}$, et on a bien un accouplement non dégénéré :

$$\overline{D^1_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)}\{\ell\}\times\overline{D^1(V,\mathcal{A})}\{\ell\}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

□

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

Théorème 2.23. *On rappelle que $k=\mathbb{C}((t))$, que $K=k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X et que V est un ouvert non vide de X On suppose (H 2.14)$_\ell$. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$\overline{Ш^1_{nrs}(V,A^t)}\{\ell\}\times\overline{Ш^1_{nr}(V,A)}\{\ell\}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

De plus, $Ш^1_{nrs}(V,A^t)$ et $Ш^1_{nr}(V,A)$ sont de torsion de type cofini.

Démonstration. Cela découle immédiatement de la proposition 2.21 et du lemme 2.20. □

Corollaire 2.24. *On rappelle que $k=\mathbb{C}((t))$ et que $K=k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On suppose (H 2.14)$_\ell$. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$\overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\}\times\overline{Ш^1(A)}\{\ell\}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Pour $V \subseteq V'$ deux ouverts de U, on remarque que $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\}$ et $Ш^1_{nr}(V',A)\{\ell\}$ sont des sous-groupes du groupe de torsion de type cofini $Ш^1_{nr}(U,A)\{\ell\}$ tels que $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\} \subseteq Ш^1_{nr}(V',A)\{\ell\}$. Comme toute suite décroissante de sous-groupes d'un groupe de torsion de type cofini ℓ-primaire est stationnaire (Lemme 3.7 de [HSz13]), on en déduit qu'il existe un ouvert non vide V_0 de U tel que, pour tout ouvert non vide V de V_0, on a $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\} = Ш^1_{nr}(V_0,A)\{\ell\}$. Cela implique que $Ш^1_{nr}(V_0,A)\{\ell\} = Ш^1(A)\{\ell\}$.
Par ailleurs, on remarque que, pour $V \subseteq V'$ deux ouverts non vides de V_0, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ш^1_{nrs}(V',A^t)\{\ell\}_{div} \arrow[r] \arrow[d, hook] & Ш^1_{nrs}(V',A^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \overline{Ш^1_{nrs}(V',A^t)}\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Ш^1_{nrs}(V,A^t)\{\ell\}_{div} \arrow[r] & Ш^1_{nrs}(V,A^t)\{\ell\} \arrow[r] & \overline{Ш^1_{nrs}(V,A^t)}\{\ell\} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Comme $Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\} = \bigcup_{V\subseteq V_0} Ш^1_{nrs}(V,A^t)\{\ell\}$, en passant à la limite inductive, on obtient que l'injection naturelle $\overline{Ш^1_{nrs}(V_0,A^t)}\{\ell\} \hookrightarrow \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\}$ induit un isomorphisme $\overline{Ш^1_{nrs}(V_0,A^t)}\{\ell\} \xrightarrow{\sim} \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\}$. Par conséquent, d'après le théorème 2.23, il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :

$$\overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

On peut aussi obtenir un énoncé symétrique en A et A^t :

Corollaire 2.25. *On rappelle que $k = \mathbb{C}((t))$ et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On suppose (H 2.14)$_\ell$ et on note $i : Ш^1(A) \hookrightarrow Ш^1_{nrs}(A)$ (resp. $i^t : Ш^1(A^t) \hookrightarrow Ш^1_{nrs}(A^t)$) l'injection canonique. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$Ш^1(A^t)\{\ell\}/(i^t)^{-1}(Ш^1_{nrs}(A^t)\{\ell\}_{div}) \times Ш^1(A)\{\ell\}/i^{-1}(Ш^1_{nrs}(A)\{\ell\}_{div}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ \overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} \arrow[u, "i^t"] & \times & \overline{Ш^1_{nrs}(A)}\{\ell\} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

commute. On définit des accouplements CT et CT^t par les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CT} : & \overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} \arrow[d, equal] & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ & \overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} & \times & \overline{Ш^1_{nrs}(A)}\{\ell\} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \overline{Ш^1_{nrs}(A^t)}\{\ell\} & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ \mathrm{CT}^t : & \overline{Ш^1(A^t)}\{\ell\} \arrow[u, "i^t"] & \times & \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

Pour établir le corollaire, il suffit de montrer que CT et CT^t coïncident. En procédant comme dans 2.24, on choisit un ouvert V de U tel que $D^1(V,\mathcal{A})\{\ell\} = Ш^1(A)\{\ell\}$ et $D^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} = Ш^1(A^t)\{\ell\}$. Puis en procédant comme pour 2.21, on a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^1(V,\mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & H^1(V,\mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v\in X\setminus V} H^1(K_v,A)\{\ell\} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (D^1(V,\mathcal{A}^t)^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^1_c(V,\mathcal{A}^t)^{(\ell)})^D \arrow[r] & \bigoplus_{v\in X\setminus V} (H^0(K_v,A^t)^{(\ell)})^D,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "j^t"] & H^1(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v\in X\setminus V} H^1(K_v,A^t)\{\ell\} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (D^1(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^1_c(V,\mathcal{A})^{(\ell)})^D \arrow[r] & \bigoplus_{v\in X\setminus V} (H^0(K_v,A)^{(\ell)})^D.
\end{tikzcd}$$

On vérifie alors aisément que CT est induit par j et que CT^t est induit par j^t. Il suffit donc d'établir le lemme qui suit. □

Lemme 2.26. *Soient $r,s\geq 0$. On a un diagramme commutatif au signe près :*

$$\begin{tikzcd}
H^r_c(V,\mathcal{A}) \arrow[d] & \times & H^s(V,\mathcal{A}^t) \arrow[r] & H^{r+s}_c(V,\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}}\mathcal{A}^t) \arrow[d, equal] \\
H^r(V,\mathcal{A}) & \times & H^s_c(V,\mathcal{A}^t) \arrow[r] \arrow[u] & H^{r+s}_c(V,\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}}\mathcal{A}^t).
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Démonstration. On note $j : V\to X$ l'immersion ouverte et on fait les identifications suivantes :

$$H^r_c(V,\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}[r]), \qquad H^s_c(V,\mathcal{A}^t) = \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}^t[s]),$$
$$H^r(V,\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}_{D(V)}(\mathbb{Z}, \mathcal{A}[r]), \qquad H^s(V,\mathcal{A}^t) = \mathrm{Hom}_{D(V)}(\mathbb{Z}, \mathcal{A}^t[s]),$$
$$H^{r+s}_c(V,\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}}\mathcal{A}^t) = \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!(\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}}\mathcal{A}^t)[r+s]),$$

où $D(U)$ et $D(X)$ désignent les catégories dérivées de faisceaux étales sur U et sur X respectivement. La commutativité de $(*)$ revient alors à montrer que, si $\alpha\in\mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}[r])$ et $\beta\in\mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathbb{Z}, j_!\mathcal{A}^t[s])$, alors le diagramme suivant commute dans $D(X)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & j_!\mathcal{A}[r] \arrow[r, "\cong"] & (j_!\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}} j_!\mathbb{Z})[r] \arrow[d, "j_!j^*\beta"] \\
j_!\mathcal{A}^t[s] \arrow[r, "\cong"] & (j_!\mathcal{A}^t\otimes^{\mathbf{L}} j_!\mathbb{Z})[s] \arrow[r, "j_!j^*\alpha"] & (j_!\mathcal{A}\otimes^{\mathbf{L}} j_!\mathcal{A}^t)[r+s].
\end{tikzcd}$$

Mais cette commutativité est évidente, ce qui achève la preuve. □

Exemple 2.27. • Les variétés abéliennes ayant bonne réduction partout vérifient les hypothèses des corollaires précédents. C'est par exemple le cas des variétés abéliennes isotriviales.

• Supposons que $X=\mathbb{P}^1_k$, c'est-à-dire que $K=\mathbb{C}((t))(u)$. La courbe elliptique d'équation $y^2=x^3+u$ vérifie les hypothèses des corollaires.

3. Variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t_0))...((t_d))$

On suppose dans cette section que $d \geq 2$ et que $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$. Soit A une variété abélienne sur k de variété abélienne duale A^t.

3.1 Dualité modulo divisibles

La formule de Barsotti-Weil impose que $A^t = \underline{\mathrm{Ext}}^1_k(A, \mathbb{G}_m)$. De plus, $\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{G}_m) = 0$. On dispose donc d'un morphisme dans la catégorie dérivée :

$$A \otimes^{\mathbf{L}} A^t \to \mathbb{G}_m[1],$$

induisant un accouplement :

$$H^r(k, A) \times H^{d-r}(k, A^t) \to H^{d+1}(k, \mathbb{G}_m) \cong H^{d+1}(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

On remarquera que pour obtenir l'isomorphisme $H^{d+1}(k, \mathbb{G}_m) \cong H^{d+1}(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))$ il faut choisir un système compatible de racines de l'unité.

Lemme 3.1. *Pour chaque entier naturel n et chaque entier r, le morphisme $H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{d+1-r}(k, A^t))^D$ est injectif et le morphisme ${}_nH^r(k, A) \to (H^{d-r}(k, A^t)/n)^D$ est surjectif.*

Remarque 3.2. Dans le lemme précédent (ainsi que dans toute la suite), lorsque M est un $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-module discret, on pose $H^s(k, M) = 0$ pour $s < 0$.

Démonstration. On a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{r-1}(k, A)/n \arrow[r] \arrow[d] & H^r(k, {}_nA) \arrow[r] \arrow[d] & {}_nH^r(k, A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & ({}_nH^{d+1-r}(k, A^t))^D \arrow[r] & H^{d+1-r}(k, {}_nA^t)^D \arrow[r] & (H^{d-r}(k, A^t)/n)^D \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où le morphisme vertical central est un isomorphisme d'après le théorème 2.17 de [Mil06] car ${}_nA^t \cong \underline{\mathrm{Hom}}_k({}_nA, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))$. On en déduit que le morphisme $H^{r-1}(k, A)/n \to ({}_nH^{d+1-r}(k, A^t))^D$ est injectif et le morphisme ${}_nH^r(k, A) \to (H^{d-r}(k, A^t)/n)^D$ est surjectif. □

Notation 3.3. Pour $r \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et M un $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-module discret tel que ${}_nH^r(k, M)$ et $H^r(k, M)/n$ sont finis, on note $\lambda_r(k, n, M) = \frac{|{}_nH^r(k,M)|}{|H^r(k,M)/n|}$.

Proposition 3.4. *Pour $r \in \mathbb{Z}$, il existe des familles d'entiers $(\beta_{r,\ell})_\ell$, $(\beta^t_{r,\ell})_\ell$, $(\beta^{tors}_{0,\ell})_\ell$ et $(\beta^{t,tors}_{0,\ell})_\ell$ indexées par les nombres premiers telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,* *on a :*

$$\lambda_r(k,n,A) = \prod_\ell \ell^{\beta_{r,\ell} v_\ell(n)},$$
$$\lambda_r(k,n,A^t) = \prod_\ell \ell^{\beta^t_{r,\ell} v_\ell(n)},$$
$$\lambda_0(k,n,A(k^s)_{tors}) = \prod_\ell \ell^{\beta^{tors}_{0,\ell} v_\ell(n)},$$
$$\lambda_0(k,n,A^t(k^s)_{tors}) = \prod_\ell \ell^{\beta^{t,tors}_{0,\ell} v_\ell(n)}.$$

Lorsque $r \geq 1$, les $\beta_{r,\ell}$, les $\beta^t_{r,\ell}$, les $\beta^{tors}_{0,\ell}$ et les $\beta^{t,tors}_{0,\ell}$ sont positifs. Pour $r \leq 0$, les entiers $\beta_{r,\ell}$ et $\beta^t_{r,\ell}$ sont nuls.

Démonstration. Les deux dernières égalités sont évidentes car $A(k)_{tors}$ et $A^t(k)_{tors}$ sont de torsion de type cofini. Montrons les deux premières. Pour $r \geq 1$, elles sont évidentes, puisque les groupes $H^r(k,A)$ et $H^r(k,A^t)$ sont de torsion de type cofini. Le cas $r=0$ découle alors des formules suivantes (que l'on obtient grâce à la suite exacte de Kummer) :

$$1 = \chi(k, {}_nA) = \prod_{r=0}^{d+1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r},$$
$$1 = \chi(k, {}_nA^t) = \prod_{r=0}^{d+1} \lambda_r(k,n,A^t)^{(-1)^r}.$$

□

Théorème 3.5. *Pour $r \geq 1$, le noyau du morphisme surjectif $H^r(k,A) \to (H^{d-r}(k,A^t)^\wedge)^D$ est un groupe de torsion de type cofini divisible.*

Démonstration. Soit $s \in \{-1,0,...,d+1\}$. On calcule la caractéristique d'Euler-Poincaré de ${}_nA$ pour chaque entier naturel n :

$$\begin{aligned}
1 &= \chi(k, {}_nA) \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=s+1}^{d+1} |H^r(k, {}_nA)|^{(-1)^r} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=0}^{d-s} |H^r(k, {}_nA^t)|^{(-1)^{d+1-r}} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=0}^{d-s} \lambda_r(k,n,A^t)^{(-1)^{d+1-r}} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} |H^{d-s}(k,A^t)/n|^{(-1)^{s+1}} \\
&= |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} |H^{d-s}(k,A^t)/n|^{(-1)^{s+1}} \cdot \prod_\ell \ell^{(-1)^{s+1}\gamma_{s,\ell} v_\ell(n)},
\end{aligned}$$

où $\gamma_{s,\ell} = \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{r,\ell} + \sum_{r=0}^{d-s}(-1)^{d+s-r}\beta^t_{r,\ell}$. Par conséquent, si $s \geq 1$ et si N_s désigne le noyau de $H^s(k,A) \to (H^{d-s}(k,A^t)^\wedge)^D$, on obtient :

$$|{}_nN_s| = \frac{|{}_nH^s(k,A)|}{|H^{d-s}(k,A^t)/n|} = \prod_\ell \ell^{\gamma_{s,\ell}v_\ell(n)}.$$

D'après le lemme 1.3, cela prouve que N_s est divisible. □

En reprenant les notations de la preuve précédente, on a alors :

$$N_s \cong \bigoplus_\ell (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\gamma_{s,\ell}},$$

et nous voulons calculer les $\gamma_{s,\ell} = \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{r,\ell} + \sum_{r=0}^{d-s}(-1)^{d+s-r}\beta^t_{r,\ell}$. Avant de passer à la suite, il est utile d'établir des équations reliant les différentes variables que nous avons introduites $(\beta_{r,\ell}, \beta^t_{r,\ell}, \beta^{tors}_{0,\ell}, \beta^{t,tors}_{0,\ell}, \gamma_{r,\ell})$.

Proposition 3.6. *Soit ℓ un nombre premier. Les entiers $(\beta_{r,\ell})_r$ et $(\beta^t_{r,\ell})_r$ vérifient les équations :*

$$\begin{cases} \gamma_{r,\ell} = \beta_{r,\ell} \quad \forall r \in \{-1\} \cup \{1,2,...,d-1\} \cup \{d+1\} \\ \gamma_{0,\ell} = \beta^{tors}_{0,\ell} \\ \beta_{r,\ell} = \beta^t_{d+1-r,\ell} \quad \forall r \in \{2,3,...,d-1\} \\ \beta_{1,\ell} - \beta_{0,\ell} = \beta^t_{d,\ell} - \beta^t_{d+1,\ell} \\ \beta^{t,tors}_{0,\ell} = \beta_{d+1,\ell} \\ \sum_{r=0}^{d+1}(-1)^r\beta_{r,\ell} = 0 \\ \beta_{r,\ell} = \beta^t_{r,\ell} = 0 \quad \forall r \geq d+2 \end{cases}$$

Démonstration. D'après la démonstration de 3.5, on a pour $r \in \{-1,0,1,...,d+1\}$ la relation :

$$1 = |{}_nH^r(k,A)|^{(-1)^r}|H^{d-r}(k,A^t)/n|^{(-1)^{r+1}} \cdot \prod_p p^{(-1)^{r+1}\gamma_{r,\ell}v_p(n)} \qquad (\star)$$

avec $\gamma_{r,\ell} = \sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{s,\ell} + \sum_{s=0}^{d-r}(-1)^{d+r-s}\beta^t_{s,\ell}$. Cela permet d'établir les résultats suivants :

(1) Soit $r \in \{1,2,...,d-1\} \cup \{-1,d+1\}$. L'équation $(\star)$ impose l'existence de deux fonctions bornées $h,g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1 = \left(\prod_p p^{\beta_{r,\ell}v_p(n)} \cdot h(n)\right)^{(-1)^r} \cdot g(n)^{(-1)^{r+1}} \cdot \prod_p p^{(-1)^{r+1}\gamma_{r,\ell}v_p(n)}.$$

Par conséquent, $\gamma_{r,\ell} = \beta_{r,\ell}$.

(2) Dans le cas $r = 0$, l'équation $(\star)$ impose l'existence de deux fonctions bornées $h,g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1 = \left(\prod_p p^{\beta^{tors}_{0,\ell}v_p(n)} \cdot h(n)\right) \cdot g(n)^{-1} \cdot \prod_p p^{-\gamma_{0,\ell}v_p(n)}.$$

On en déduit que $\beta^{tors}_{0,\ell} = \gamma_{0,\ell}$,

(3) On remarque que :

$$|H^0(k,A^t)/n| = |{}_nH^0(k,A^t)| \cdot \lambda_0(k,n,A^t)^{-1}.$$

Par conséquent, dans le cas $r = d$, l'équation $(\star)$ impose l'existence de deux fonctions bornées $h, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1 = \left(\prod_p p^{\beta_{d,\ell} v_p(n)} \cdot h(n)\right)^{(-1)^d} \cdot \left(\prod_p p^{(\beta_{0,\ell}^{t,tors} - \beta_{0,\ell}^t) v_p(n)} \cdot g(n)\right)^{(-1)^{d+1}} \cdot \prod_p p^{(-1)^{d+1}\gamma_{d,\ell} v_p(n)}.$$

On obtient donc que $\beta_{d,\ell} + \beta_{0,\ell}^t - \beta_{0,\ell}^{t,tors} = \gamma_{d,\ell}$.
En exploitant (1), on obtient que :

- pour $r \in \{2,3,...,d-1\}$, $\gamma_{r,\ell} + \gamma_{r-1,\ell} = \beta_{r,\ell} + \beta_{r-1,\ell}$, et donc $\beta_{r,\ell} = \beta_{d+1-r,\ell}^t$;
- $\gamma_{1,\ell} - \gamma_{-1,\ell} = \beta_{1,\ell}$, et donc $\beta_{1,\ell} - \beta_{0,\ell} = \beta_{d,\ell}^t - \beta_{d+1,\ell}^t$.
- $\gamma_{-1,\ell} = 0$, et donc $\sum_{r=0}^{d+1} (-1)^r \beta_{r,\ell} = 0$.

Avec (1) et (3), on a $\gamma_{d+1,\ell} + \gamma_{d,\ell} = \beta_{d+1,\ell} + \beta_{d,\ell} + \beta_{0,\ell}^t - \beta_0^{t,tors}$ et donc $\beta_{0,\ell}^{t,tors} = \beta_{d+1,\ell}$.
Finalement, la nullité de $\beta_{r,\ell}$ et $\beta_{r,\ell}^t$ pour $r \geq d+2$ est une conséquence immédiate du fait que k est de dimension cohomologique $d+1$. □

Proposition 3.7. *Pour tout premier ℓ, pour tout entier r, on a $\beta_{r,\ell} = \beta_{r,\ell}^t$. On a aussi $\beta_{0,\ell}^{tors} = \beta_{0,\ell}^{t,tors}$.*

Démonstration. Les variétés abéliennes A et A^t sont isogènes. Il existe donc une suite exacte $0 \to F \to A \to A^t \to 0$ où F est un schéma en groupes abélien fini. En passant à la cohomologie, on obtient donc un morphisme $H^r(k,A) \to H^r(k,A^t)$ de noyau et conoyau finis pour chaque r. Cela montre grâce au lemme du serpent que $\beta_{r,\ell} = \beta_{r,\ell}^t$ pour tout r.
Pour montrer que $\beta_{0,\ell}^{tors} = \beta_{0,\ell}^{t,tors}$, on procède de la même façon en remarquant que l'on a un morphisme $A(k)_{tors} \to A^t(k)_{tors}$ de noyau et conoyau finis. □

Des deux propositions précédentes, on déduit :

Corollaire 3.8. *Soit ℓ un nombre premier. Les entiers $(\beta_{r,\ell})_r$ vérifient les équations :*

$$\begin{cases} \beta_{r,\ell} = \beta_{d+1-r,\ell} \quad \forall r \in \{2,3,...,d-1\} \\ \beta_{1,\ell} - \beta_{0,\ell} = \beta_{d,\ell} - \beta_{d+1,\ell} \\ \beta_{0,\ell}^{tors} = \beta_{d+1,\ell} \\ \beta_{r,\ell} = 0 \quad \forall r \geq d+2 \end{cases}$$

3.2 Étude de $\beta_{0,\ell}$ et de $\beta_{0,\ell}^{tors}$

Pour chaque $i \in \{0,1,...,d\}$, on considère $\mathcal{A}_i$ (resp. A_i, F_i, U_i, T_i, B_i) un schéma en groupes commutatifs sur Spec $\mathcal{O}_{k_i}$ (resp. sur Spec k_i) tels que :

- on a $A_d = B_d = A$, $F_d = 0$, $U_d = 0$ et $T_d = 0$,
- pour $i \in \{0,1,...,d\}$, B_i est une variété abélienne,

- pour $i \in \{0,1,...,d\}$, $\mathcal{A}_i$ est le modèle de Néron de B_i,
- pour $i \in \{0,1,...,d-1\}$, A_i est la fibre spéciale de $\mathcal{A}_{i+1}$,
- pour $i \in \{0,1,...,d\}$, F_i (resp. U_i, T_i, B_i) est le groupe fini (resp. le groupe additif, le tore, la variété abélienne) apparaissant dans la filtration de A_i.

On note aussi A_{-1} la fibre spéciale de $\mathcal{A}_0$, et F_{-1}, U_{-1}, T_{-1}, B_{-1} les parties finie, unipotente, torique et abélienne apparaissant dans la filtration de A_{-1}. De même, pour chaque $i \in \{0,1,...,d\}$, on considère $\mathcal{A}_i^*$ (resp. A_i^*, F_i^*, U_i^*, T_i^*, B_i^*) un schéma en groupes commutatifs sur Spec $\mathcal{O}_{k_i}$ (resp. sur Spec k_i) tels que :

- on a $A_d^* = B_d^* = A^t$, $F_d^* = 0$, $U_d^* = 0$ et $T_d^* = 0$,
- pour $i \in \{0,1,...,d\}$, B_i^* est une variété abélienne,
- pour $i \in \{0,1,...,d\}$, $\mathcal{A}_i^*$ est le modèle de Néron de B_i^*,
- pour $i \in \{0,1,...,d-1\}$, A_i^* est la fibre spéciale de $\mathcal{A}_{i+1}^*$,
- pour $i \in \{0,1,...,d\}$, F_i^* (resp. U_i^*, T_i^*, B_i^*) est le groupe fini (resp. le groupe additif, le tore, la variété abélienne) apparaissant dans la filtration de A_i^*.

On note aussi A_{-1}^* la fibre spéciale de $\mathcal{A}_0^*$, et F_{-1}^*, U_{-1}^*, T_{-1}^*, B_{-1}^* les parties finie, unipotente, torique et abélienne apparaissant dans la filtration de A_{-1}^*.

Proposition 3.9. *(i) On a* $\lambda_0(k,n,A) = \lambda_0(k_{-1},n,B_{-1}) \cdot \prod_{r=-1}^{d-1} \lambda_0(k_r,n,T_r)$.
(ii) Le nombre $\frac{\lambda_0(k_{-1},n,B_{-1}(k_{-1})_{tors})\cdot\prod_{r=-1}^{d-1}\lambda_0(k_r,n,T_r(k_r^s)_{tors})}{\lambda_0(k,n,A(k^s)_{tors})}$ *est entier. Si B_i est à réduction scindée pour $i \in \{1,...,d\}$, alors*

$$\lambda_0(k,n,A(k^s)_{tors}) = \lambda_0(k_{-1},n,B_{-1}(k_{-1}^s)_{tors}) \cdot \prod_{r=-1}^{d-1} \lambda_0(k_r,n,T_r(k_r^s)_{tors}).$$

Démonstration. (i) Exactement comme dans le théorème 2.3, on montre que :

$$\lambda_0(k,n,A) = \lambda_0(k_{d-1},n,B_{d-1})\lambda_0(k_{d-1},n,T_{d-1})\lambda_0(k_{d-1},n,U_{d-1}).$$

Comme U_{d-1} est unipotent, $\lambda_0(k_{d-1},n,U_{d-1}) = 1$, et donc :

$$\lambda_0(k,n,A) = \lambda_0(k_{d-1},n,B_{d-1})\lambda_0(k_{d-1},n,T_{d-1}).$$

Il suffit alors de procéder par récurrence.

(ii) Comme $\mathcal{A}_d(\mathcal{O}_k) = A(k)$ et le morphisme $\mathcal{A}_d(\mathcal{O}_k) \to A_{d-1}(k_{d-1})$ est surjectif à noyau uniquement divisible, on a $\lambda_0(k,n,A(k^s)_{tors}) = \lambda_0(k_{d-1},n,A_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})$. On procède maintenant par dévissage.

- Comme $0 \to A_{d-1}^0 \to A_{d-1} \to F_{d-1} \to 0$ est exacte, le morphisme $A_{d-1}^0(k_{d-1})_{tors} \to A_{d-1}(k_{d-1})_{tors}$ est injectif à conoyau fini, et donc :

$$\lambda_0(k_{d-1},n,A_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}) = \lambda_0(k_{d-1},n,A_{d-1}^0(k_{d-1}^s)_{tors}).$$

- On a une suite exacte $0 \to U_{d-1} \times T_{d-1} \to A_{d-1}^0 \to B_{d-1} \to 0$. Comme $U_{d-1}(k_{d-1}^s)$ et $T_{d-1}(k_{d-1}^s)$ sont divisibles, on en déduit l'exactitude de $0 \to T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors} \to A_{d-1}^0(k_{d-1}^s)_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors} \to 0$. En passant à la cohomologie, on obtient une suite exacte :

$$0 \to T_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to A_{d-1}^0(k_{d-1})_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to H^1(k_{d-1},T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}).$$

  Donc $\lambda_0(k_{d-1},n,A_{d-1}^0(k_{d-1}^s)_{tors})$ divise $\lambda_0(k_{d-1},n,T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})\lambda_0(k_{d-1},n,B_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})$.

En procédant par récurrence, $\lambda_0(k_{d-1}, n, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ divise $\lambda_0(k_{-1}, n, B_{-1}(k^s_{-1})_{tors}) \cdot \prod_{r=-1}^{d-1} \lambda_0(k_r, n, T_r(k^s_r)_{tors})$.
Si $A = B_d$ est à réduction scindée, on remarque que la flèche $B_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to H^1(k_{d-1}, T_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ est nulle, et on a donc une suite exacte courte :

$$0 \to T_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to A^0_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to 0.$$

Donc en procédant par récurrence, si B_i est à réduction scindée pour $i \in \{1, ..., d\}$, on obtient l'égalité :

$$\lambda_0(k, n, A(k^s)_{tors}) = \lambda_0(k_{-1}, n, B_{-1}(k^s_{-1})_{tors}) \cdot \prod_{r=-1}^{d-1} \lambda_0(k_r, n, T_r(k^s_r)_{tors}).$$

□

Corollaire 3.10. *Notons ρ_r le rang du tore T_r pour $r \in \{-1, 0, ..., d-1\}$. On a pour tout premier ℓ :*

$$\beta_{0,\ell} = 2dimB_{-1} - \sum_{r=-1}^{d-1} r\rho_r,$$

$$\beta_{0,\ell}^{tors} = \beta_{d+1,\ell} \leq 2dimB_{-1} + \sum_{r=-1}^{d-1} \rho_r.$$

Si B_i est à réduction scindée pour $i \in \{1, ..., d\}$, alors pour tout premier ℓ :

$$\beta_{0,\ell}^{tors} = \beta_{d+1,\ell} = 2dimB_{-1} + \sum_{r=-1}^{d-1} \rho_r.$$

Démonstration. Cela découle de la proposition 3.9, du corollaire 3.8, des propositions 1.8 et 1.9, et du fait que $B_{-1}(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{R}/\mathbb{C})^{2\dim B_{-1}}$. □

Corollaire 3.11. *On a $2dimB_{-1} - \sum_{r=-1}^{d-1} r\rho_r = 2dimB^*_{-1} - \sum_{r=-1}^{d-1} r\rho^*_r$. Si B_i et B^*_i sont à réduction scindée pour $i \in \{1, ..., d\}$, alors $2dimB_{-1} + \sum_{r=-1}^{d-1} \rho_r = 2dimB^*_{-1} + \sum_{r=-1}^{d-1} \rho^*_r$.*

Démonstration. Cela découle immédiatement du corollaire 3.10 et du lemme 3.7. □

Remarque 3.12. Plus généralement, la quantité $2\mathrm{dim}B_{-1} - \sum_{r=-1}^{d-1} r\rho_r$ est invariante par isogénie.

3.3 Majorations des $\beta_{r,\ell}$ pour $r \geq 1$

Lemme 3.13. *Les parties divisibles des groupes* $(\varprojlim_m H^{d-r}(k_{d-1}, {}_m A^t(k^{nr})))^D$ *et de* $H^{d-r}(k_{d-1}, A(k^{nr})_{tors})$ *sont (non canoniquement) isomorphes.*

Démonstration. Fixons un nombre premier ℓ. Pour chaque entier naturel s, on a une suite exacte :

$$0 \to {}_{\ell^s}A^t(k^{nr}) \to A^t(k^{nr})_{tors} \to A^t(k^{nr})_{tors} \to A^t(k^{nr})_{tors}/\ell^s \to 0.$$

En notant Q_{ℓ^s} le groupe $\ell^s A^t(k^{nr})_{tors}$, on a des suites exactes :

$$0 \to {}_{\ell^s}A^t(k^{nr}) \to A^t(k^{nr})_{tors} \to Q_{\ell^s} \to 0, \qquad (\star)$$
$$0 \to Q_{\ell^s} \to A^t(k^{nr})_{tors} \to A^t(k^{nr})_{tors}/\ell^s \to 0. \qquad (\star\star)$$

La suite exacte $(\star\star)$ et la finitude de $A^t(k^{nr})_{tors}/\ell^s$ montrent que, pour chaque entier u, les deux groupes :

$$\mathrm{Ker}(H^u(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^u(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),$$
$$\mathrm{Coker}(H^u(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^u(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),$$

sont finis. Par ailleurs, en exploitant la suite $(\star)$, on a un diagramme commutatif à colonne exacte dont les flèches diagonales sont la multiplication par ℓ^s :

$$\begin{tikzcd}
H^{d-r-1}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}) \arrow[d] \arrow[dr, "\ell^s"] & \\
H^{d-r-1}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \arrow[d] \arrow[r] & H^{d-r-1}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}) \\
H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \arrow[d] & \\
H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}) \arrow[d] \arrow[dr, "\ell^s"] & \\
H^{d-r}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \arrow[r] & H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}).
\end{tikzcd}$$

Il existe $s_0 \geq 1$ tel que, pour tout $s \geq s_0$, le module galoisien $A^t(k^{nr})_{tors}/\ell^s$ est isomorphe à $A^t(k^{nr})_{tors}/\ell^{s_0}$. Par conséquent, il existe une constante entière $C_\ell > 0$ telle que, pour tout $s \geq 0$, les ordres des groupes :

$$\mathrm{Ker}(H^{d-r-1}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{d-r-1}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),$$
$$\mathrm{Coker}(H^{d-r-1}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{d-r-1}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),$$
$$\mathrm{Ker}(H^{d-r}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),$$
$$\mathrm{Coker}(H^{d-r}(k_{d-1}, Q_{\ell^s}) \to H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),$$

sont majorés par C_ℓ. En particulier, les quatre groupes précédents sont de $(C_\ell!)$-torsion. On en déduit que :

$$|\mathrm{Coker}(H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}))| \leq |{}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})/C_\ell!|,$$
$$|\mathrm{Ker}(H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}))| \leq C_\ell |H^{d-r-1}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})/\ell^s|,$$

d'où l'existence d'une contante D_ℓ telle que, pour tout $s \geq 0$:

$$|\mathrm{Coker}(H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}))| \leq D_\ell,$$
$$|\mathrm{Ker}(H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors}))| \leq D_\ell.$$

On en déduit que les groupes :

$$\mathrm{Ker}(\varprojlim_s H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to \varprojlim_s {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),$$
$$\mathrm{Coker}(\varprojlim_s H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})) \to \varprojlim_s {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})),$$

sont finis. Cela montre que les parties divisibles de $(\varprojlim_s H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})))^D$ et de $(\varprojlim_s {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})))^D$ sont isomorphes. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que la partie divisible de $(\varprojlim_s {}_{\ell^s}H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})))^D$ est isomorphe à celle de $H^{d-r}(k_{d-1}, A^t(k^{nr})_{tors})$, et donc à celle de $H^{d-r}(k_{d-1}, A(k^{nr})_{tors})$ car A et A^t sont isogènes. □

Lemme 3.14. *Pour chaque entier naturel $r < d-1$, les parties divisibles de groupes de type cofini $H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ et $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1}))$ sont (non canoniquement) isomorphes. Pour $r = d-1$ et $r = d$, les parties divisibles de groupes de type cofini $H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ et $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ sont (non canoniquement) isomorphes.*

Démonstration. Soit $r \geq 0$. D'après [Ogg62], on a un isomorphisme $H^1(k^{nr}, A) \cong (\varinjlim_m {}_mA^t(k^{nr}))^D$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A)) &= H^r(k_{d-1}, (\varprojlim_m {}_mA^t(k^{nr}))^D) \\ &\cong \varinjlim_m H^r(k_{d-1}, {}_mA^t(k^{nr})^D) \\ &\cong \varinjlim_m H^{d-r}(k_{d-1}, {}_mA^t(k^{nr}))^D \\ &\cong (\varprojlim_m H^{d-r}(k_{d-1}, {}_mA^t(k^{nr})))^D. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le lemme 3.13, les parties divisibles de $H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ et de $H^{d-r}(k_{d-1}, A(k^{nr})_{tors}) \cong H^{d-r}(k_{d-1}, A_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ sont isomorphes.
On remarque maintenant que l'on a la suite exacte :

$$0 \to A^0_{d-1}(k^s_{d-1}) \to A_{d-1}(k^s_{d-1}) \to F_{d-1}(k^s_{d-1}) \to 0,$$

où A^0_{d-1} désigne la composante connexe du neutre dans A_{d-1}. Il existe donc un $\mathrm{Gal}(k^s_{d-1}/k_{d-1})$-module fini F tel que :

$$0 \to A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to A_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to F \to 0.$$

On en déduit que les parties divisibles des groupes de torsion de type cofini $H^{d-r}(k_{d-1}, A_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ et $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ sont (non canoniquement) isomorphes.
Supposons maintenant que $r < d-1$. On a une suite exacte :

$$0 \to U_{d-1}(k^s_{d-1}) \times T(k^s_{d-1}) \to A^0_{d-1}(k^s_{d-1}) \to B_{d-1}(k^s_{d-1}) \to 0,$$

qui montre que $A^0_{d-1}(k^s_{d-1})$ est divisible. On en déduit que $A^0_{d-1}(k^s_{d-1})/A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}$ est uniquement divisible, et donc que $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ est isomorphe à $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1}))$, ce qui achève la preuve. □

Lemme 3.15. *Pour chaque entier $r > 0$, on a un isomorphisme $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})) \cong H^r(k_{d-1}, A_{d-1})$. De plus, les parties divisibles de $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr}))$ et $H^r(k_{d-1}, A_{d-1})$ sont isomorphes.*

Démonstration. Comme l'extension k^{nr}/k est non ramifiée par définition, on sait que $A(k^{nr}) = \mathcal{A}_d(\mathcal{O}_{k^{nr}})$ et que le morphisme $\mathcal{A}_d(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \to A_{d-1}(k^s_{d-1})$ est surjectif de noyau uniquement divisible. On en déduit que $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})) \cong H^r(k_{d-1}, A_{d-1})$. Il suffit alors d'exploiter la suite exacte $0 \to A^0_{d-1} \to A_{d-1} \to F_{d-1} \to 0$ pour montrer que les parties divisibles des groupes $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr}))$ et $H^r(k_{d-1}, A_{d-1})$ sont isomorphes. □

Théorème 3.16. *On a, pour $r \geq 2$:*

$$\beta_{r,\ell} \leq \binom{d+1}{r} \left(\sum_{e \geq 0} \rho_{e-1} + 2 \dim B_{-1} \right).$$

Pour $r = 1$:

$$\beta_{r,\ell} \leq \sum_{e \geq 0} (d+1-e)\rho_{e-1} + 2(d+1) \dim B_{-1}.$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur $d+r$.
Pour $d+r = 0$ (c'est-à-dire $d = -1$ et $r = 1$), le théorème est évident.
Soit $s \geq 0$ tel que le théorème est vrai pour r et d tels que $r+d \leq s$. Soient $r \geq 1$ et $d \geq -1$ des entiers tels que $d+r = s+1$. La suite spectrale $H^r(k_{d-1}, H^s(k^{nr}, A)) \Rightarrow H^{r+s}(k, A)$ dégénère en une suite exacte longue :

$$... \to H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})) \to H^r(k, A) \to H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A)) \to ....$$

Étudions les termes $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr}))$ et $H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$.

- D'après le lemme 3.15, la partie divisible de $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr}))$ est isomorphe à celle de $H^r(k_{d-1}, A^0_{d-1})$. De plus, la suite exacte $0 \to U_{d-1} \times T_{d-1} \to A^0_{d-1} \to B_{d-1} \to 0$ montre l'exactitude de :
$$H^r(k_{d-1}, T_{d-1}) \to H^r(k_{d-1}, A^0_{d-1}) \to H^r(k_{d-1}, B_{d-1}),$$
et on a vu dans la proposition 1.11 que $\lambda_r(k_{d-1}, n, T_{d-1})) = \frac{|_nH^r(k_{d-1},T_{d-1})|}{|H^r(k_{d-1},T_{d-1})/n|}$ vaut $n^{\binom{d}{r}\rho_{d-1}}$ si $r > 1$ et 1 si $r = 1$.
- Supposons que $r < d$. Alors, d'après le lemme 3.14, la partie divisible de $H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ est isomorphe à celle de $H^{d-r+1}(k_{d-1}, A^0_{d-1})$, et le groupe $H^{d-r+1}(k_{d-1}, A^0_{d-1})$ s'insère dans une suite exacte :
$$H^{d-r+1}(k_{d-1}, T_{d-1}) \to H^{d-r+1}(k_{d-1}, A^0_{d-1}) \to H^{d-r+1}(k_{d-1}, B_{d-1}),$$
où $\lambda_{d-r+1}(k_{d-1}, n, T_{d-1})) = n^{\binom{d}{r-1}\rho_{d-1}}$ d'après la proposition 1.11.
- D'après le lemme 3.14, la partie divisible de $H^{d-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ est isomorphe à celle de $H^1(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$. L'exactitude de la suite
$$0 \to T_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to 0$$
entraîne l'exactitude de la suite :
$$H^1(k_{d-1}, T_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}) \to H^1(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}) \to H^1(k_{d-1}, B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}),$$
où on a $\lambda_1(k_{d-1}, n, T_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})) = n^{d\rho_{d-1}}$ d'après la proposition 1.12. Pour calculer $\lambda_1(k_{d-1}, n, B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}))$, on remarque que l'on a une suite exacte :
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \arrow[r] & B_{d-1}(k_{d-1}) \arrow[rr] & & D \arrow[d] \\ & & 0 & H^1(k_{d-1}, B_{d-1}) \arrow[l] & H^1(k_{d-1}, B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}) \arrow[l] \end{tikzcd}$$
où $D = H^0(k_{d-1}, B_{d-1}(k^s_{d-1})/B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})$ est uniquement divisible. Donc, en utilisant le corollaire 3.10, le nombre $\lambda_1(k_{d-1}, n, B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}))$ divise la quantité $n^{\sum_{e=0}^{d-1} e\rho_{e-1}}\lambda_1(k_{d-1}, n, B_{d-1})$.
- D'après le lemme3.14, la partie divisible de $H^d(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A))$ est isomorphe à celle de $A^0_{d-1}(k_{d-1})_{tors}$. L'exactitude de la suite $0 \to T_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to A^0_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors} \to 0$ entraîne l'exactitude de la suite :
$$0 \to T_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to A^0_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1})_{tors},$$
où on a l'égalité $\lambda_0(k_{d-1}, n, T_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors})) = n^{\rho_{d-1}}$ d'après la proposition1.9 et où le nombre $\lambda_0(k_{d-1}, n, B_{d-1}(k^s_{d-1})_{tors}))$ divise $n^{\sum_{e=0}^{d-1}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}}$ d'après le corollaire 3.10.

On obtient donc, par hypothèse de récurrence :
- si $r = 1$:
$$\beta_{1,\ell} \leq \sum_{e=0}^{d-1}(d-e)\rho_{e-1} + 2d\dim B_{-1} + \rho_{d-1} + \sum_{e=0}^{d-1}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}$$

et donc :

$$\beta_{1,\ell} \leq \sum_{e\geq 0}(d+1-e)\rho_{e-1} + 2(d+1)\dim B_{-1}.$$

- si $1 < r < d$:

$$\begin{aligned}\beta_{r,\ell} \leq & \binom{d}{r}\rho_{d-1} + \binom{d}{r}\left(\sum_{e=0}^{d-1}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}\right)\\ & + \binom{d}{r-1}\rho_{d-1} + \binom{d}{r-1}\left(\sum_{e=0}^{d-1}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}\right)\end{aligned}$$

et donc :

$$\beta_{r,\ell} \leq \binom{d+1}{r}\left(\sum_{e\geq 0}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}\right).$$

- pour $r = d$:

$$\begin{aligned}\beta_{d,\ell} \leq & \rho_{d-1} + \left(\sum_{e=0}^{d-1}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}\right)\\ & + d\rho_{d-1} + \sum_{e=0}^{d-1} e\rho_{e-1} + \sum_{e=0}^{d-1}(d-e)\rho_{e-1} + 2d\dim B_{-1}\end{aligned}$$

et donc :

$$\beta_{d,\ell} \leq (d+1)\left(\sum_{e\geq 0}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}\right).$$

- pour $r = d+1$:

$$\begin{aligned}\beta_{d+1,\ell} &\leq \rho_{d-1} + \sum_{e=0}^{d-1}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}\\ &\leq \sum_{e\geq 0}\rho_{e-1} + 2\dim B_{-1}.\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.17. *Si* $\dim B_{-1} = \rho_{-1} = \rho_0 = ... = \rho_{d-1} = 0$, *alors* $\beta_{0,\ell}^{tors} = 0$ *et* $\beta_{r,\ell} = 0$ *pour tout* $r \geq 0$ *et tout premier* ℓ.

Démonstration. Cela découle immédiatement du théorème 3.16 et du corollaire 3.10. □

3.4 Nullité des $\beta_{r,\ell}$

Théorème 3.18. *Soit* ℓ *un nombre premier. Supposons que* $\beta_{0,\ell}^{tors} = 0$. *Alors* $\dim B_{-1} = \rho_{-1} = \rho_0 = \rho_1 = ... = \rho_{d-1} = 0$.

Démonstration. On procède par récurrence sur d.

- Dans le cas $d = 0$, le théorème est évident puisqu'on a $\beta_{0,\ell}^{tors} = 2 \dim B_{-1} + \rho_{-1}$ d'après le corollaire 3.10.
- Supposons maintenant la propriété démontrée au rang $d-1$. Montrons-la au rang d. On suppose donc que k est d-local et que $\beta_{0,\ell}^{tors} = 0$. On a $A(k)_{tors} \cong \mathcal{A}_d(\mathcal{O}_k)_{tors} \cong A_{d-1}(k_{d-1})_{tors}$ puisque le morphisme $\mathcal{A}_d(\mathcal{O}_k) \to A_{d-1}(k_{d-1})$ est surjectif à noyau uniquement divisible. Par conséquent, l'hypothèse $\beta_{0,\ell}^{tors} = 0$ entraîne que la partie ℓ-primaire de $A_{d-1}(k_{d-1})_{tors}$ est finie. Comme la suite $0 \to T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors} \to A_{d-1}^0(k_{d-1}^s)_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors} \to 0$ est exacte, on a une suite de cohomologie :

  $$0 \to T_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to A_{d-1}^0(k_{d-1})_{tors} \to B_{d-1}(k_{d-1})_{tors} \to H^1(k_{d-1}, T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}).$$

  On en déduit que la partie ℓ-primaire de $T_{d-1}(k_{d-1})_{tors}$ et le noyau du morphisme $B_{d-1}(k_{d-1})\{\ell\} \to H^1(k_{d-1}, T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})\{\ell\}$ sont finis. Étant donné que $\lambda_0(k_{d-1}, n, T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}) = n^{\rho_{d-1}}$ d'après la proposition 1.9, on en déduit que $\rho_{d-1} = 0$. En utilisant que le noyau de $B_{d-1}(k_{d-1})\{\ell\} \to H^1(k_{d-1}, T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors})\{\ell\}$ est fini et en remarquant que $\lambda_1(k_{d-1}, n, T_{d-1}(k_{d-1}^s)_{tors}) = n^{d\rho_{d-1}} = 1$ d'après 1.12, on obtient que $B_{d-1}(k_{d-1})\{\ell\}$ est fini. Par hypothèse de récurrence, cela impose que $\dim B_{-1} = \rho_{-1} = \rho_0 = \rho_1 = ... = \rho_{d-2} = 0$, ce qui achève la preuve. □

Corollaire 3.19. *(i) Soit ℓ un nombre premier. Supposons que $\beta_{d+1,\ell} = 0$. Alors $\beta_{r,p} = 0$ pour tout entier r et tout premier p.*
(ii) Supposons que $\dim B_{-1} = 0$ *et que $\rho_r = 0$ pour tout entier r. Alors* $\dim B_{-1}^* = 0$ *et $\rho_r^* = 0$ pour tout r.*

Démonstration. (i) Cela découle immédiatement du théorème 3.18 et des corollaires 3.17 et 3.8.
(ii) D'après le corollaire 3.17, $\beta_{d+1,\ell}$ est nul pour tout premier ℓ. On déduit alors du lemme 3.7 que $\beta_{d+1,\ell}^t$ est nul pour tout premier ℓ. Le théorème 3.18 et le corollaire 3.8 permettent donc de conclure. □

Remarque 3.20. Plus généralement, la propriété que $\dim B_{-1} = \rho_{-1} = \rho_0 = ... = \rho_{d-1} = 0$ est préservée par les isogénies.

3.5 Le noyau de $H^d(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$

Dans certains cas, il est possible d'expliciter le noyau de $H^d(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$. Pour ce faire, il convient d'établir quelques propriétés préliminaires :

Lemme 3.21. *Pour chaque $r \geq 0$, on a un isomorphisme $H^r(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d) \to H^r(k^{nr}/k, A(k^{nr}))$ faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} H^r(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d) \arrow[r, "Res"] \arrow[d, "\cong"] & H^r(k, A) \\ H^r(k^{nr}/k, A(k^{nr})) \arrow[ur, "Inf"'] & \end{tikzcd}$$

.

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 2.7. □

Proposition 3.22. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$.*
(i) Les groupes $A(k^{nr})$ et $A^t(k^{nr})$ sont ℓ-divisibles.
(ii) Il existe un morphisme fonctoriel injectif

$$(T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d^*))^D \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D.$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 2.8. □

Lemme 3.23. *On obtient un isomorphisme :*

$$\iota_\ell : H^0(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))\{\ell\} \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D$$

par composition des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))\{\ell\} &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr}, A)) \\ &\xleftarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \\ &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})^D) \\ &\xrightarrow{\sim} (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D. \end{aligned}$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.9. □

Comme dans 2.10, nous sommes maintenant en mesure d'introduire la définition suivante :

Définition 3.24. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$. On appelle **ℓ-groupe de cohomologie non ramifiée symétrisé de** A le groupe :*

$$H^d_{nrs}(k, A, \ell) := (\iota_\ell \circ \varphi)^{-1}((T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d^*))^D) \subseteq H^d(k, A)\{\ell\}$$

où $\varphi : H^d(k, A) \to H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, A))$ désigne le morphisme induit par la suite spectrale $H^r(k^{nr}/k, H^s(k^{nr}, A)) \Rightarrow H^{r+s}(k, A)$. On a alors une suite exacte :

$$0 \to \frac{H^d(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d)}{\delta(H^{d-1}(\mathcal{O}_k, R^1 g_* A))}\{\ell\} \to H^d_{nrs}(k, A, \ell) \to (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d^*))^D \to 0$$

où $\delta : H^{d-1}(\mathcal{O}_k, R^1 g_* A) \to H^d(\mathcal{O}_k, \mathcal{A}_d)$ est le morphisme de bord provenant de la suite spectrale $H^r(\mathcal{O}_k, R^s g_* A) \Rightarrow H^{r+s}(k, A)$.

Théorème 3.25. *Pour ℓ premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$, la partie ℓ-primaire du noyau de $H^d(k, A) \to (H^0(k, A^t)^\wedge)^D$ est $H^d_{nrs}(k, A, \ell)$.*

Démonstration. La preuve est très similaire à celle de 2.12. Il suffit de remarquer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr},A)) & \\
H^d(k,A)\{\ell\} \arrow[ur] \arrow[ddd] & & \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \arrow[ul, "\cong"'] \arrow[ddd, "\cong"] \\
& \varinjlim_r H^d(k, {}_{\ell^r}A) \arrow[ul, two heads] \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& (\varprojlim_r H^1(k, {}_{\ell^r}A^t))^D \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(H^0(k,A^t)^{(\ell)})^D \arrow[dr, equal] & & (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr})))^D \arrow[dl] \\
& (H^0(k^{nr}/k, A^t(k^{nr}))^{(\ell)})^D &
\end{tikzcd}$$

où le morphisme $\varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) \to \varinjlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))^D$ est obtenu par composition des isomorphismes

$$\begin{aligned}
\varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}A)) &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, ({}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))^D) \\
&\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A^t(k^{nr}))^D.
\end{aligned}$$

□

Pour alléger les notations dans la section suivante, nous noterons :

$$H^d_{nrs}(k,A) := \bigoplus_{\ell \wedge |F_{d-1}|=1} H^d_{nrs}(k,A,\ell).$$

C'est le groupe de torsion dont la partie ℓ-primaire est $H^d_{nrs}(k,A,\ell)$ si ℓ ne divise pas $|F_{d-1}|$, triviale sinon.

4. Variétés abéliennes sur $\mathbb{C}((t_0))...((t_d))(u)$

Supposons dans cette partie que $d \geq 1$ et que $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$. Soient A une variété abélienne sur $K = k(X)$ et A^t sa variété abélienne duale. Le but de ce paragraphe est d'établir un théorème de dualité à la Cassels-Tate pour A : plus précisément, nous voulons déterminer, sous certaines hypothèses géométriques et modulo divisibles, le dual du groupe de Tate-Shafarevich $Ш^1(A)$.
Pour chaque $v \in X^{(1)}$, on adopte des notations analogues à celles de la section 3.2 pour la variété abélienne $A_v = A \times_K K_v$ sur le corps $d+1$-local K_v (on prendra

garde au fait que K_v n'est pas d-local). Ainsi, on introduit les schémas en groupes $\mathcal{A}_{v,i}, A_{v,i}, F_{v,i}, U_{v,i}, T_{v,i}, B_{v,i}$ pour $i \in \{0, 1, ..., d+1\}$ et les schémas en groupes $A_{v,-1}, F_{v,-1}, U_{v,-1}, T_{v,-1}, B_{v,-1}$.
Notons aussi U l'ouvert de bonne réduction de A, de sorte que le modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A sur U est un schéma abélien. Soit $\mathcal{A}^t$ le schéma abélien dual.
Fixons maintenant un nombre premier ℓ et faisons l'hypothèse suivante :

(H 4.1)$_\ell$ *pour chaque $v \in X \setminus U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
- *ℓ ne divise pas $|F_{v,d}|$,*
- *la variété abélienne $B_{v,-1}$ est nulle et les tores $T_{v,d}, ..., T_{v,-1}$ sont anisotropes.*

Soit Z l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que la variété abélienne $B_{v,-1}$ est nulle et les tores $T_{v,d}, ..., T_{v,-1}$ sont anisotropes. Pour chaque ouvert V de U, on introduit les groupes suivants :

$$Ш^1_{nr}(V, A) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K, A) \to \prod_{v \in X \setminus V} H^1(K_v, A) \times \prod_{v \in V^{(1)}} H^1(K_v, A)/H^1_{nr}(K_v, A))\right),$$

$$Ш^{d+1}_{nrs}(A^t) := \mathrm{Ker}\left(H^{d+1}(K, A^t) \to \prod_{v \in Z} H^{d+1}(K_v, A^t) \times \prod_{v \in X^{(1)} \setminus Z} H^{d+1}(K_v, A^t)/H^{d+1}_{nrs}(K_v, A^t)\right),$$

où $H^1_{nr}(K_v, A^t)$ désigne $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{A}_v) = H^1(K_v^{nr}/K_v, A(K_v^{nr}))$.

Fixons V un ouvert non vide de U.

Lemme 4.2. *(i) Pour $r > 0$, le groupe $H^r(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.*
(ii) Le groupe $H^2_c(V, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 2.17. □

Lemme 4.3. *Il existe des suites exactes :*

$$0 \to H^d(V, \mathcal{A}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\{\ell\} \to H^{d+1}(V, \mathcal{A}^t\{\ell\}) \to H^{d+1}(V, \mathcal{A}^t)\{\ell\} \to 0,$$

$$0 \to H^1_c(V, \mathcal{A})^{(\ell)} \to H^2_c(V, T_\ell \mathcal{A}) \to T_\ell H^2_c(V, \mathcal{A}) \to 0.$$

Ici, $H^{d+1}(V, \mathcal{A}^t\{\ell\})$ et $H^2_c(V, T_\ell\mathcal{A})$ désignent $\varinjlim_n H^{d+1}(V, {}_{\ell^n}\mathcal{A}^t)$ et $\varprojlim_n H^2_c(V, {}_{\ell^n}\mathcal{A})$ respectivement.

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 2.18. □

Lemme 4.4. *Il existe un accouplement canonique :*

$$H^1(V, \mathcal{A}\{\ell\}) \times H^{d+2}_c(V, T_\ell \mathcal{A}^t) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 2.19. □

De plus, d'après la formule de Barsotti-Weil et la nullité de $\underline{\mathrm{Hom}}_V(\mathcal{A}, \mathbb{G}_m)$, on a un accouplement canonique $\mathcal{A}^t \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{A} \to \mathbb{G}_m[1]$ qui induit donc un accouplement :

$$H^1(V, \mathcal{A}) \times H_c^{d+1}(V, \mathcal{A}^t) \to H_c^{d+3}(V, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Posons maintenant :

$$D^1(V, \mathcal{A}) = \mathrm{Im}(H_c^1(V, \mathcal{A}) \to H^1(V, \mathcal{A})) = \mathrm{Ker}(H^1(V, \mathcal{A}) \to \bigoplus_{v \in X \setminus V} H^1(K_v, A)),$$

$$D_{nrs}^{d+1}(V, \mathcal{A}^t) = \mathrm{Ker}\left(H^{d+1}(V, \mathcal{A}^t) \to \bigoplus_{v \in Z \setminus V} H^{d+1}(K_v, A^t) \oplus \bigoplus_{v \in X \setminus (V \cup Z)} H^{d+1}(K_v, A^t)/H_{nrs}^{d+1}(K_v, A^t)) \right)$$

Ce sont bien sûr des groupes de torsion de type cofini.

Lemme 4.5. *L'application naturelle $H^1(V, \mathcal{A}) \to H^1(K, A)$ induit un isomorphisme $D^1(V, \mathcal{A}) \cong Ш_{nr}^1(V, A)$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 2.20. □

Afin d'établir un théorème de dualité pour les groupes de Tate-Shafarevich, il convient donc d'établir un théorème de dualité pour les groupes $D^1(V, \mathcal{A})$ et $D_{nrs}^{d+1}(V, \mathcal{A}^t)$:

Proposition 4.6. *Il existe un accouplement canonique :*

$$\overline{D_{nrs}^{d+1}(V, \mathcal{A}^t)}\{\ell\} \times \overline{D^1(V, \mathcal{A})}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 2.21. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

Théorème 4.7. *On rappelle que $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$ et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On suppose (H 4.1)$_\ell$. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$\overline{Ш_{nrs}^{d+1}(A^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. D'après la proposition 4.6 et le lemme 4.5, on a un accouplement parfait de groupes finis :

$$\overline{D_{nrs}^{d+1}(V, \mathcal{A}^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш_{nr}^1(V, A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Pour $V \subseteq V'$ deux ouverts de U, on remarque que $Ш_{nr}^1(V, A)\{\ell\}$ et $Ш_{nr}^1(V', A)\{\ell\}$ sont des sous-groupes du groupe de torsion de type cofini $Ш_{nr}^1(U, A)\{\ell\}$ tels que $Ш_{nr}^1(V, A)\{\ell\} \subseteq Ш_{nr}^1(V', A)\{\ell\}$. On en déduit qu'il existe un ouvert non vide V_0 de

U tel que, pour tout ouvert non vide V de V_0, on a $Ш^1_{nr}(V,A)\{\ell\} = Ш^1_{nr}(V_0,A)\{\ell\}$. Cela implique que $Ш^1(V_0,A)\{\ell\} = Ш^1(A)\{\ell\}$.
Par ailleurs, on remarque que, pour $V \subseteq V'$ deux ouverts non vides de V_0, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D^{d+1}_{nrs}(V',\mathcal{A}^t)\{\ell\}_{div} \arrow[r] \arrow[d] & D^{d+1}_{nrs}(V',\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{D^{d+1}_{nrs}(V',\mathcal{A}^t)}\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\}_{div} \arrow[r] & D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\} \arrow[r] & \overline{D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)}\{\ell\} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Comme $Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)\{\ell\} = \varinjlim_{V\subseteq V_0} D^{d+1}_{nrs}(V,\mathcal{A}^t)\{\ell\}$, en passant à la limite inductive, on obtient que la restriction $\overline{D^{d+1}_{nrs}(V_0,\mathcal{A}^t)}\{\ell\} \to Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)\{\ell\}$ induit un isomorphisme $\overline{D^{d+1}_{nrs}(V_0,\mathcal{A}^t)}\{\ell\} \xrightarrow{\sim} \overline{Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)}\{\ell\}$. On obtient donc un accouplement non dégénéré de groupes finis :

$$\overline{Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)}\{\ell\} \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

Corollaire 4.8. *On rappelle que $k = \mathbb{C}((t_0))...((t_d))$ et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. On suppose (H 4.1)$_\ell$ et on note $i^t : Ш^{d+1}(A^t) \hookrightarrow Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)$ l'injection canonique. Alors il existe un accouplement non dégénéré à gauche de groupes finis :*

$$Ш^{d+1}(A^t)\{\ell\}/(i^t)^{-1}(Ш^{d+1}_{nrs}(A^t)\{\ell\}_{div}) \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 2.25. □

Question : Quel est le noyau à droite dans l'accouplement précédent ?

5. Variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p((t_2))...((t_d))$

On suppose dans cette section que $d \geq 2$ et que $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' corps p-adique, p étant un nombre premier fixé. Soit A une variété abélienne sur k. On introduit, pour $i \in \{1,2,...,d\}$, les notations $\mathcal{A}_i, A_i, F_i, U_i, T_i, B_i$ analogues à celles du début de la section 3.2. On note aussi ρ_i le rang du tore T_i pour $i \in \{1,...,d\}$. On note A_0 la fibre spéciale de $\mathcal{A}_1$. La composante connexe du neutre A_0^0 de A_0 s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to U_0 \times_{k_0} T_0 \to A_0 \to B_0 \to 0$$

où U_0 est groupe abélien unipotent, T_0 est un tore et B_0 est une variété abélienne sur k_0.
Par ailleurs, si M est un module galoisien sur un corps l, ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de l et i un entier, on notera $M\{\ell\}(i) = \varinjlim_r {}_{\ell^r}M \otimes \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}(i)$. En tant que groupe abélien, il est isomorphe à $M\{\ell\}$. Par abus de notation, quand G est un groupe algébrique abélien sur l, on écrira $G\{\ell\}(i)$ au lieu de $G(l^s)\{\ell\}(i)$.

5.1 Dualité modulo divisibles

Posons ${}_{(n)}\tilde{A} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))$ pour chaque entier naturel n non nul et notons $\tilde{A} = \varinjlim_n {}_{(n)}\tilde{A}$.

Remarque 5.1. En tenant compte de la formule de Barsotti-Weil, il serait plus naturel de considérer $\underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))$ au lieu de $\tilde{A}$. Il se trouve en fait que ces deux faisceaux coïncident, comme le montre l'annexe à la fin de ce texte.

Comme $\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) = 0$, on a un morphisme naturel dans la catégorie dérivée ${}_{(n)}\tilde{A} \to \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))[1]$, d'où un morphisme :

$$A \otimes^{\mathbf{L}} {}_{(n)}\tilde{A} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)[1],$$

induisant un accouplement :

$$H^r(k, A) \times H^{d-r}(k, {}_{(n)}\tilde{A}) \to H^{d+1}(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

En passant à la limite inductive sur n, on obtient un accouplement :

$$H^r(k, A) \times H^{d-r}(k, \tilde{A}) \to H^{d+1}(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Lemme 5.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ non nul. On a l'égalité :*

$${}_{(n)}\tilde{A} = \underline{Hom}_k({}_nA, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) = {}_nA^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1)$$

et la multiplication par n sur $\tilde{A}$ induit une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to {}_{(n)}\tilde{A} \to \tilde{A} \to \tilde{A} \to 0.$$

Démonstration. La suite exacte courte $0 \to {}_nA \to A \to A \to 0$ induit une suite exacte de cohomologie :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_k({}_nA, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \to {}_{(n)}\tilde{A} \to {}_{(n)}\tilde{A}.$$

Comme $\underline{\mathrm{Hom}}_k(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) = 0$, on en déduit que :

$${}_{(n)}\tilde{A} = \underline{\mathrm{Hom}}_k({}_nA, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) = {}_nA^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1).$$

Cela impose aussi que $\tilde{A} = \varinjlim_n {}_nA^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1)$. Comme $A^t(k^s)_{tors}$ est divisible, cela montre immédiatement que la multiplication par n sur $\tilde{A}$ induit une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to {}_{(n)}\tilde{A} \to \tilde{A} \to \tilde{A} \to 0.$$

□

Cela montre que ${}_{(n)}\tilde{A}$ est la n-torsion de $\tilde{A}$. On notera donc par la suite ${}_n\tilde{A}$ au lieu de ${}_{(n)}\tilde{A}$.

Remarque 5.3. En fait, on a montré que $\tilde{A}\{\ell\} = A^t\{\ell\}(d-1)$ pour chaque premier ℓ.

Corollaire 5.4. *Pour chaque entier naturel n et chaque entier r, le morphisme $H^{r-1}(k,A)/n \to ({}_nH^{d+1-r}(k,\tilde{A}))^D$ est injectif et le morphisme ${}_nH^r(k,A) \to (H^{d-r}(k,\tilde{A})/n)^D$ est surjectif.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{r-1}(k,A)/n & \longrightarrow & H^r(k,{}_nA) & \longrightarrow & {}_nH^r(k,A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & ({}_nH^{d+1-r}(k,\tilde{A}))^D & \longrightarrow & H^{d+1-r}(k,{}_n\tilde{A})^D & \longrightarrow & (H^{d-r}(k,\tilde{A})/n)^D & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

où le morphisme vertical central est un isomorphisme d'après le lemme précédent et le théorème 2.17 de [Mil06]. On en déduit que le morphisme $H^{r-1}(k,A)/n \to ({}_nH^{d+1-r}(k,\tilde{A}))^D$ est injectif et le morphisme ${}_nH^r(k,A) \to (H^{d-r}(k,\tilde{A})/n)^D$ est surjectif. □

Notation 5.5. Pour $r \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et M un $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-module discret tel que ${}_nH^r(k,M)$ et $H^r(k,M)/n$ sont finis, on note $\lambda_r(k,n,M) = \frac{|{}_nH^r(k,M)|}{|H^r(k,M)/n|}$.

Proposition 5.6. *Pour $r \geq 0$, il existe des familles d'entiers naturels $(\beta_{r,\ell})_\ell$, $(\beta^*_{r,\ell})_\ell$, $(\beta^t_{r,\ell})_\ell$, $(\beta^{tors}_{0,\ell})_\ell$ et $(\beta^{t,tors}_{0,\ell})_\ell$ indexées par les nombres premiers telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\lambda_r(k,n,A) = \prod_\ell \ell^{\beta_{r,\ell}v_\ell(n)},$$
$$\lambda_r(k,n,\tilde{A}) = \prod_\ell \ell^{\beta^*_{r,\ell}v_\ell(n)},$$
$$\lambda_r(k,n,A^t) = \prod_\ell \ell^{\beta^t_{r,\ell}v_\ell(n)},$$
$$\lambda_0(k,n,A(k^s)_{tors}) = \prod_\ell \ell^{\beta^{tors}_{0,\ell}v_\ell(n)},$$
$$\lambda_0(k,n,A^t(k^s)_{tors}) = \prod_\ell \ell^{\beta^{t,tors}_{0,\ell}v_\ell(n)}.$$

Démonstration. Les deux dernières égalités sont évidentes car $A(k)_{tors}$ et $A(k)_{tors}$ sont de torsion de type cofini. Montrons les trois premières. Pour $r \geq 1$, elles sont évidentes, puisque les groupes $H^r(k,A)$, $H^r(k,\tilde{A})$ et $H^r(k,A^t)$ sont de torsion de type cofini. Le cas $r=0$ découle alors des formules suivantes :

$$1 = \chi(k,{}_nA) = \prod_{r=0}^{d+1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r},$$
$$1 = \chi(k,({}_nA)') = \prod_{r=0}^{d+1} \lambda_r(k,n,\tilde{A})^{(-1)^r},$$
$$1 = \chi(k,{}_nA^t) = \prod_{r=0}^{d+1} \lambda_r(k,n,A^t)^{(-1)^r}.$$

□

Théorème 5.7. *Pour $r \geq 1$, le noyau du morphisme $H^r(k,A) \to (H^{d-r}(k,\tilde{A})^\wedge)^D$ est un groupe de torsion de type cofini divisible.*

Démonstration. Soit $s \in \{-1,0,...,d+1\}$. On note N_s le noyau de $H^s(k,A) \to (H^{d-s}(k,\tilde{A})^\wedge)^D$. On calcule la caractéristique d'Euler-Poincaré de ${}_nA$ pour chaque n :

$$\begin{aligned}
1 &= \chi(k, {}_nA) \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=s+1}^{d+1} |H^r(k,{}_nA)|^{(-1)^r} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=0}^{d-s} |H^r(k,{}_n\tilde{A})|^{(-1)^{d+1-r}} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} \\
&= \prod_{r=0}^{s-1} \lambda_r(k,n,A)^{(-1)^r} \cdot \prod_{r=0}^{d-s} \lambda_r(k,n,\tilde{A})^{(-1)^{d+1-r}} \cdot |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} |H^{d-s}(k,\tilde{A})/n|^{(-1)^{s+1}} \\
&= |{}_nH^s(k,A)|^{(-1)^s} |H^{d-s}(k,\tilde{A})/n|^{(-1)^{s+1}} \cdot \prod_{\ell} \ell^{(-1)^{s+1}\gamma_{s,\ell} v_\ell(n)},
\end{aligned}$$

où $\gamma_{s,\ell} = \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{r,\ell} + \sum_{r=0}^{d-s}(-1)^{d+s-r}\beta^*_{r,\ell}$. On obtient donc, pour tout $s \in \{-1,0,...,d+1\}$:

$$|{}_nN_s| = \frac{|{}_nH^s(k,A)|}{|H^{d-s}(k,\tilde{A})/n|} = \prod_p \ell^{\gamma_{s,\ell} v_\ell(n)},$$

ce qui prouve que N_s est divisible à condition que $s \neq 0$. □

En reprenant les notations de la preuve précédente, on a alors :

$$N_s \cong \bigoplus_{\ell} (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{\gamma_{s,\ell}},$$

et nous voulons calculer les $\gamma_{s,\ell} = \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^{r+s+1}\beta_{r,\ell} + \sum_{r=0}^{d-s}(-1)^{d+s-r}\beta^*_{r,\ell}$. Avant de passer à la suite, il est utile d'établir des équations reliant les différentes variables que nous avons introduites $(\beta_{r,\ell}, \beta^*_{r,\ell}, \beta^t_{r,p}, \beta^{tors}_{0,\ell}, \beta^{t,tors}_{0,\ell}, \gamma_{r,\ell})$.

Proposition 5.8. *Soit ℓ un nombre premier. Les entiers $(\beta_{r,\ell})_r$ et $(\beta^*_{r,\ell})_r$ vérifient les équations :*

$$\left\{\begin{array}{c}
\gamma_{r,\ell} = \beta_{r,\ell} \quad \forall r \in \{-1\} \cup \{1,2,...,d+1\} \\
\gamma_{0,\ell} = \beta^{tors}_{0,\ell} \\
\beta_{r,\ell} = \beta^*_{d+1-r,\ell} \quad \forall r \in \{2,3,...,d+1\} \\
\beta_{1,\ell} - \beta_{0,\ell} = \beta^*_{d,\ell} - \beta^*_{d+1,\ell} \\
\beta^{tors}_{0,\ell} = \beta^*_{d+1,\ell} \\
\sum_{r=0}^{d+1}(-1)^r \beta_{r,\ell} = 0 \\
\beta_{r,\ell} = \beta^*_{r,\ell} = 0 \quad \forall r \geq d+2
\end{array}\right.$$

Démonstration. Exactement comme dans la démonstration de 5.7, on a pour chaque $r \in \{-1, 0, 1, ..., d+1\}$ la relation :

$$1 = |{}_nH^r(k, A)|^{(-1)^r} |H^{d-r}(k, \tilde{A})/n|^{(-1)^{r+1}} \cdot \prod_{\ell} \ell^{(-1)^{r+1}\gamma_{r,\ell} v_\ell(n)}$$

avec $\gamma_{r,\ell} = \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^{r+s+1} \beta_{s,\ell} + \sum_{s=0}^{d-r} (-1)^{d+r-s} \beta^*_{s,\ell}$. Cela montre immédiatement que :
- $\gamma_{r,\ell} = \beta_{r,\ell}$ pour $r \in \{1, 2, ..., d-1\} \cup \{-1, d+1\}$,
- $\beta^{tors}_{0,\ell} = \gamma_{0,\ell}$,
- $\beta_{d,\ell} = \gamma_{d,\ell}$ car $\tilde{A}$ est de torsion,

ce qui achève la preuve. □

5.2 Étude hors de p

On fixe un nombre premier ℓ différent de p.

5.2.1 Conditions suffisantes pour la nullité des $\beta_{r,\ell}$

On procède de manière similaire à la section 3. On commence par des énoncés analogues à ceux des lemmes 3.14 et 3.15.

Lemme 5.9. *Pour chaque entier naturel r et chaque entier i, les parties divisibles de groupes de type cofini $H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)))$ et $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$ sont (non canoniquement) isomorphes.*

Démonstration. Soit $r \geq 0$. On a un isomorphisme $H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)) \cong (\varprojlim_s {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(-i))^D$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i))) &= H^r(k_{d-1}, (\varprojlim_s {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(-i))^D) \\ &\cong \varinjlim_s H^r(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(-i)^D) \\ &\cong \varinjlim_s H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(d-1-i)^D \\ &\cong (\varprojlim_s H^{d-r}(k_{d-1}, {}_{\ell^s}A^t(k^{nr})(d-1-i)))^D. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant un résultat analogue à celui du lemme 3.13 les parties divisibles de $H^r(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}(i)))$ et de $H^{d-r}(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(d-1-i)) \cong H^{d-r}(k_{d-1}, A_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$ sont isomorphes.
On remarque maintenant que l'on a la suite exacte :

$$0 \to A^0_{d-1}(k^s_{d-1}) \to A_{d-1}(k^s_{d-1}) \to F_{d-1}(k^s_{d-1}) \to 0,$$

où A^0_{d-1} désigne la composante connexe du neutre dans A_{d-1}. Il existe donc un $\mathrm{Gal}(k^s_{d-1}/k_{d-1})$-module fini F tel que :

$$0 \to A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i) \to A_{d-1}\{\ell\}(d-1-i) \to F\{\ell\}(d-1-i) \to 0.$$

On en déduit que les parties divisibles des groupes de type cofini $H^{d-r}(k_{d-1}, A_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$ et $H^{d-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$ sont (non canoniquement) isomorphes. $\square$

Lemme 5.10. *Pour chaque entier $r \geq 0$, on a un isomorphisme $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i)) \cong H^r(k_{d-1}, A_{d-1}\{\ell\}(i))$.*

Démonstration. Comme l'extension k^{nr}/k est non ramifiée par définition, on sait que $A(k^{nr}) = \mathcal{A}_d(\mathcal{O}_{k^{nr}})$ et que le morphisme $\mathcal{A}_d(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \to A_{d-1}(k^s_{d-1})$ est surjectif de noyau uniquement divisible par ℓ. On en déduit que $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i)) \cong H^r(k_{d-1}, A_{d-1}\{\ell\}(i))$. $\square$

On est maintenant en mesure d'établir la proposition qui fournit des conditions suffisantes pour que les groupes de cohomologie de $A\{\ell\}(i)$ soient finis.

Proposition 5.11. *Soient r un entier naturel et i un entier tels que $r-i-1 \notin \{-1, 0, 1\}$. Le groupe $H^r(k, A\{\ell\}(i))$ est fini.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur d.
Pour $d = 0$, c'est la proposition 1.22.
Soit d un entier naturel tel que la proposition est vraie au rang $d-1$. Montrons la proposition au rang d. La suite spectrale $H^r(k_{d-1}, H^s(k^{nr}, A\{\ell\}(i))) \Rightarrow H^{r+s}(k, A\{\ell\}(i))$ dégénère en une suite exacte longue :

$$... \to H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i))) \to H^r(k, A\{\ell\}(i)) \to H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i))) \to ....$$

Étudions les termes $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i)))$ et $H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)))$.

- D'après 5.10, la partie divisible de $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i)))$ est isomorphe à celle de $H^r(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(i))$. De plus, la suite exacte $0 \to U_{d-1} \times T_{d-1} \to A^0_{d-1} \to B_{d-1} \to 0$ montre l'exactitude de :
$$H^r(k_{d-1}, T_{d-1}\{\ell\}(i)) \to H^r(k_{d-1}, A_0^{d-1}\{\ell\}(i)) \to H^r(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(i)),$$
et on a vu dans 1.11 que $\lambda_r(k_{d-1}, n, T_{d-1}\{\ell\}(i))$ vaut 1 car $r-i-1 \notin \{0, 1\}$. Comme $H^r(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(i))$ est fini par hypothèse de récurrence, on conclut que $H^r(k_{d-1}, A(k^{nr})\{\ell\}(i)))$ est fini.
- D'après 5.9, la partie divisible de $H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)))$ est isomorphe à celle de $H^{d+1-r}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$, et $H^{d-r+1}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$ s'insère dans une suite exacte :
$$\begin{array}{c} H^{d-r+1}(k_{d-1}, T_{d-1}\{\ell\}(d-1-i)) \\ \downarrow \\ H^{d-r+1}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1-i)) \\ \downarrow \\ H^{d-r+1}(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(d-1-i)), \end{array}$$
où $\lambda_{d-r+1}(k_{d-1}, n, T_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))) = 1$ d'après 1.11 car $r-i-1 \notin \{0, -1\}$. Comme $H^{d-r+1}(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(d-1-i))$ est fini par hypothèse de récurrence, on conclut que $H^{r-1}(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A\{\ell\}(i)))$ est fini.

On en déduit que $H^r(k, A\{\ell\}(i))$ est fini. □

Remarque 5.12. De manière tout à fait analogue, on peut montrer que :
- si $\rho_0 = ... = \rho_{d-1} = 0$, alors $H^2(k, A\{\ell\}(i))$ est fini ;
- si $\rho_0 = ... = \rho_{d-2} = 0$, alors $H^1(k, A)\{\ell\}$ est fini ;
- pour $i \neq -1$, le groupe $H^0(k, A\{\ell\}(i))$ est fini.

Nous pouvons à présent établir le théorème suivant qui montre la nullité des $\beta_{r,\ell}$ sous certaines hypothèses.

Théorème 5.13. *Soit $\ell \neq p$ un nombre premier.*
(i) Pour $r \in \{3, ..., d+1\}$, on a $\beta_{r,\ell} = 0$.
(ii) Si $\rho_0 = ... = \rho_{d-1} = 0$, alors $\beta_{2,\ell} = 0$.
(iii) Si $\rho_0 = ... = \rho_{d-2} = 0$, alors $\beta_{1,\ell} = 0$.
(iv) On a $\sum_{s=0}^{d+1}(-1)^s \beta_{s,\ell} = 0$, $\beta_{0,\ell} = -\sum_{e=1}^{d-1} e\rho_e$ et $\beta_{0,\ell}^{tors} = 0$.

Démonstration. (i) C'est un corollaire immédiat de la proposition 5.11 car $H^r(k, A)\{\ell\} \cong H^r(k, A(k^s)\{\ell\})$.
(ii) C'est un corollaire immédiat de la remarque 5.12 car $H^2(k, A)\{\ell\} \cong H^2(k, A(k^s)\{\ell\})$.
(iii) C'est un corollaire immédiat de la remarque 5.12.
(iv) La preuve est analogue à celles de 5.8, 3.9 et 3.10 en utilisant les remarques 1.14 et 1.15, ainsi que le lemme 3.3 et le corollaire 3.4 de [Mil06].
□

Corollaire 5.14. *La quantité $\sum_{e=1}^{d-1} e\rho_e$ est invariante par isogénie. En particulier, elle prend la même valeur pour A et A^t.*

5.2.2 Conditions nécessaires pour la nullité des $\beta_{r,\ell}$

Dans cette section, nous allons donner des réciproques partielles au théorème 5.13. Nous avons d'abord besoin de trois lemmes préliminaires.

Lemme 5.15. *Soit $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$. Si $H^1(k, A\{\ell\}(i))$ ou $H^1(k_{d-1}, A_{d-1}^0\{\ell\}(i))$ est fini, alors il en est de même de $H^1(k_r, B_r\{\ell\}(i))$ et de $H^1(k_r, A_r^0\{\ell\}(i))$ pour $0 \leq r \leq d-1$.*

Démonstration. Il suffit de procéder par récurrence descendante en remarquant $H^2(k_r, T_r\{\ell\}(d))$ est fini pour chaque r. □

Lemme 5.16. *Supposons que $H^1(k_r, A_r^0\{\ell\}(-1))$ soit fini pour $0 \leq r \leq d-2$. Alors $\rho_0 = ... = \rho_{d-2} = 0$.*

Démonstration. Montrons par récurrence sur s que $\rho_s = 0$
- Les groupes $H^1(k_0, A_0^0\{\ell\}(-1))$ et $H^0(k_0, B_0\{\ell\}(-1))$ sont finis. Il en est donc de même de $H^1(k_0, T_0\{\ell\}(-1))$. Donc $\rho_0 = 0$.
- Soit $s \leq d-2$ tel que $\rho_0 = ... = \rho_{s-1} = 0$. Montrons $\rho_s = 0$. Le groupe $H^1(k_s, A_s^0\{\ell\}(-1))$ est fini. De plus, il en est de même de $H^0(k_s, B_s\{\ell\}(-1))$ puisque $\rho_0 = ... = \rho_{s-1} = 0$. Donc $H^1(k_s, T_s\{\ell\}(-1))$ est fini et $\rho_s = 0$.

$\square$

Théorème 5.17. *Supposons $d \geq 2$. Soit $\ell \neq p$ un nombre premier. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\rho_{d-1} = \rho_{d-2} = ... = \rho_0 = 0$;
(ii) $\beta_{d,\ell} = \beta_{d-1,\ell} = ... = \beta_{2,\ell} = 0$.

Démonstration. Le sens direct a déjà été prouvé. Montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$. Le groupe $H^2(k, A)$ est fini. Il en est de même du groupe $H^3(k_{d-1}, H^0(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\})$. Par conséquent, $H^1(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}))$ est fini. Le lemme 5.9 montre alors la finitude de $H^{d-1}(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1))$. Comme $H^d(k_{d-1}, T_{d-1}\{\ell\}(d-1))$ est fini, on en déduit qu'il en est même de $H^{d-1}(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(d-1))$ et donc de $H^{d-2}(k_{d-2}, H^1(k^{nr}_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(d-1)))$. Toujours avec le lemme 5.9, on obtient la finitude de $H^1(k_{d-2}, A^0_{d-2}\{\ell\}(-1))$. Le lemme 5.15 montre alors que $H^1(k_r, A^0_r\{\ell\}(-1))$ est fini pour $r \leq d-2$, et avec le lemme 5.16, on obtient $\rho_0 = ... = \rho_{d-2}$.
Reste à montrer que $\rho_{d-1} = 0$. Pour ce faire, on remarque que $H^d(k_{d-1}, B_{d-1}\{\ell\}(d-1))$ est fini car $\rho_0 = ... = \rho_{d-2} = 0$. Comme $H^d(k_{d-1}, T_{d-1}\{\ell\}(d-1))$ est aussi fini, il en est de même de $H^d(k_{d-1}, A^0_{d-1}\{\ell\}(d-1))$ et donc de $H^0(k_{d-1}, H^1(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}))$. On en déduit la finitude de $H^2(k_{d-1}, H^0(k^{nr}, A(k^s)\{\ell\}))$ et donc aussi celle de $H^2(k_{d-1}, A^0_{d-1}(k^s_{d-1})\{\ell\})$. Le groupe $H^1(k_{d-1}, B_{d-1}(k^s_{d-1})\{\ell\})$ est fini car $\rho_0 = ... = \rho_{d-2}$. Il en est donc de même de $H^2(k_{d-1}, T_{d-1}(k^s_{d-1})\{\ell\})$, et $\rho_{d-1} = 0$. $\square$

Remarque 5.18. Plaçons-nous dans le cas où $k = \mathbb{Q}_p((t))$ (et $d = 2$). Dans l'article [Koy00], Y. Koya construit un complexe de $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-modules pour lequel la multiplication par ℓ^s induit un triangle distingué $({}_{\ell^s}A)' \to C \to C \to ({}_{\ell^s}A)'[1]$ quel que soit l'entier naturel s. Son théorème principal (théorème 1.1) implique que $H^0(k, C)\{\ell\}$ et $H^1(k, C)\{\ell\}$ sont finis quelle soit la variété abélienne A sur k. De plus, sa preuve repose très fortement sur la proposition 4.1, qui impose que, pour chaque $s \geq 0$, on a $|H^0(k, C)/\ell^s| = |{}_{\ell^s}H^0(k, C)|$. Cela montre que la fonction $s \mapsto |H^0(k, C)/\ell^s|$ est bornée. Or on remarque que :

$$\begin{aligned}\frac{|{}_{\ell^s}H^1(k,C)|}{|{}_{\ell^s}H^2(k,A)|} &= \frac{|{}_{\ell^s}H^1(k,C)|}{|H^1(k,({}_{\ell^s}A)')|}\frac{|H^1(k,({}_{\ell^s}A)')|}{|H^2(k,{}_{\ell^s}A)|}\frac{|H^2(k,{}_{\ell^s}A)|}{|{}_{\ell^s}H^2(k,A)|} \\ &= \frac{|H^1(k,A)/\ell^s|}{|H^0(k,C)/\ell^s|}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $H^2(k, A)\{\ell\}$ est fini, quelle que soit la variété abélienne A. En utilisant 5.17, cela impose que $\rho_1 = 0$ pour toute variété abélienne A. Mais cela est clairement faux : par exemple, la courbe elliptique $y^2 = x^3 + x^2 + t$ vérifie $\rho_1 = 1$. On en déduit que, parmi le théorème 1.1 et la proposition 4.1 de [Koy00], au moins l'un des deux énoncés est faux. En particulier, la preuve du théorème 1.1 de [Koy00] semble erronée et difficile à rattraper.

5.3 Étude en p

Les résultats sont plus imprécis que dans le paragraphe précédent, puisque nous ne savons pas calculer les parties p-primaires des groupes de cohomologie d'un tore.

5.3.1 Cas général

Voici une condition suffisante pour que les $\beta_{r,p}$ soient nuls :

Proposition 5.19. *Supposons que :*

$$\dim B_1 = \dim T_1 = \dim T_2 = ... = \dim T_{d-1} = 0.$$

Alors $\beta_{r,p} = 0$ pour tout entier r.

Démonstration. La preuve est analogue à celles réalisées dans les paragraphes précédents. Elle est en fait beaucoup plus facile ! □

5.3.2 Quelques précisions dans le cas $d = 2$

Dans ce paragraphe, on suppose $d = 2$.

Proposition 5.20. *On a :* $\frac{|H^0(k,A)/n|}{|_nH^0(k,A)|} = n^{\rho_1} p^{[k_1:\mathbb{Q}_p]\cdot(\dim T_1+\dim B_1)\cdot v_p(n)}$.

Démonstration. On a $A(k) = \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_k)$. On dispose en plus d'une suite exacte $0 \to D \to \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_k) \to A_1(k_1) \to 0$, où D est uniquement divisible. Le lemme du serpent fournit alors des isomorphismes ${}_nH^0(k, A) \cong {}_nH^0(k_1, A_1)$ et $H^0(k, A)/ \cong H^0(k_1, A_1)/n$. On obtient donc $\frac{|H^0(k,A)/n|}{|_nH^0(k,A)|} = \frac{|H^0(k_1,A_1)/n|}{|_nH^0(k_1,A_1)|}$. Les suites $0 \to A_1^0 \to A_1 \to F_1 \to 0$ et $0 \to U_1 \times T_1 \to A_1^0 \to B_1 \to 0$ montrent que $\frac{|H^0(k,A)/n|}{|_nH^0(k,A)|} = \frac{|H^0(k_1,A_0^1)/n|}{|_nH^0(k_1,A_0^1)|} = \frac{|H^0(k_1,T_1)/n|}{|_nH^0(k_1,T_1)|} \frac{|H^0(k_1,B_1)/n|}{|_nH^0(k_1,B_1)|} = n^{\rho_1} p^{[k_1:\mathbb{Q}_p]\cdot(\dim T_1+\dim B_1)\cdot v_p(n)}$. □

Théorème 5.21. *On a :*

$$\beta_{0,p} - \beta_{1,p} + \beta_{2,p} - \beta_{3,p} = 0$$
$$\beta_{0,p} = -\rho_1 - [k_1 : \mathbb{Q}_p](\dim T_1 + \dim B_1),$$

Si $\dim B_1 = 0$*, alors* $\beta_{1,p} = \beta_{3,p} = 0$.

Démonstration. Les preuves sont analogues à celles réalisées dans les paragraphes précédents. □

Corollaire 5.22. *On a* $\dim U_1 = \dim U_1^*$*. En particulier, si A a très mauvaise réduction, alors il en est de même de A^t.*

Remarque 5.23. On pourrait bien sûr remplacer A^t par n'importe quelle variété abélienne isogène à A.

5.4 Le noyau de $H^d(k, \tilde{A}) \to (H^0(k, A)^\wedge)^D$

Exactement comme dans la section 5.1, on peut montrer que :

Théorème 5.24. *Pour chaque $r \geq 0$, il existe un morphisme naturel surjectif $H^r(k, \tilde{A}) \to (H^{d-r}(k, A)^\wedge)^D$ dont le noyau est de torsion de type cofini divisible.*

Il se trouve que, dans certains cas, il est possible d'expliciter le noyau de $H^d(k,\tilde{A}) \to (H^0(k,A)^\wedge)^D$. Pour ce faire, il convient de poser $\tilde{\mathcal{A}} = g_*\tilde{A}$ où $g : \text{Spec } k \to \text{Spec } \mathcal{O}_k$ désigne l'immersion ouverte, et d'établir quelques propriétés préliminaires :

Lemme 5.25. *(i) Le morphisme naturel $H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d) \to H^1(k,A)$ est injectif d'image le sous-groupe $H^1(k^{nr}/k,A(k^{nr}))$ de $H^1(k,A)$.*

(ii) Le faisceau $\tilde{\mathcal{A}}$ est de torsion. De plus, pour chaque $n \geq 1$, on a l'égalité ${}_n\tilde{\mathcal{A}} = {}_n\mathcal{A}_d^* \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1)$.

(iii) On a un isomorphisme $H^d(\mathcal{O}_k,\tilde{\mathcal{A}}) \to H^d(k^{nr}/k,\tilde{A}(k^{nr}))$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^d(\mathcal{O}_k,\tilde{\mathcal{A}}) \arrow[r, "Res"] \arrow[d, "\cong"] & H^d(k,\tilde{A}) \\ H^d(k^{nr}/k,\tilde{A}(k^{nr})) \arrow[ur, "Inf"'] & \end{tikzcd}.$$

Démonstration. Les preuves de (i) et (iii) sont analogues à celle de 2.7. Le fait que $\tilde{\mathcal{A}}$ est de torsion est évident, et pour montrer que ${}_n\tilde{\mathcal{A}} = {}_n\mathcal{A}_d^* \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1)$, il suffit d'écrire :

$${}_n\tilde{\mathcal{A}} = g_*({}_n\tilde{A}) = g_*({}_nA^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1)) = g_*({}_nA^t) \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1) = {}_n\mathcal{A}_d^* \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-1).$$

□

Proposition 5.26. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$ (mais pouvant être éventuellement égal à p).*

(i) Les groupes $A(k^{nr})$ et $H^0(k^{nr},\tilde{A})$ sont ℓ-divisibles.

(ii) Il existe un morphisme fonctoriel injectif

$$(T_\ell H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d))^D \to (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A(k^{nr})))^D.$$

Démonstration. (i) On prouve que $A(k^{nr})$ et $A^t(k^{nr})$ sont ℓ-divisibles exactement de la même manière que dans 2.8. De plus, on remarque que :

$$H^0(k^{nr},\tilde{A}) = \varinjlim_n H^0(k^{nr},{}_n\tilde{A}) \cong \varinjlim_n H^0(k^{nr},{}_nA^t) = A^t(k^{nr})_{\text{tors}}.$$

On en déduit que $H^0(k^{nr},\tilde{A})$ est ℓ-divisible.

(ii) La preuve est analogue à celle de 2.8.

□

Comme dans 3.24, nous sommes maintenant en mesure d'introduire la définition suivante :

Définition 5.27. *Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$ (mais éventuellement égal à p). On appelle **ℓ-groupe de cohomologie non ramifiée symétrisé de** $\tilde{A}$ le groupe :*

$$H^d_{nrs}(k,\tilde{A},\ell) := (\iota_\ell \circ \varphi)^{-1}((T_\ell H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d))^D) \subseteq H^d(k,\tilde{A})\{\ell\}$$

où $\varphi : H^d(k,\tilde{A}) \to H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr},\tilde{A}))$ désigne le morphisme induit par la suite spectrale $H^r(k^{nr}/k, H^s(k^{nr},\tilde{A})) \Rightarrow H^{r+s}(k,\tilde{A})$ et ι_ℓ l'isomorphisme composé :

$$\begin{aligned} H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr},\tilde{A}))\{\ell\} &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}H^1(k^{nr},\tilde{A})) \\ &\xleftarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, H^1(k^{nr}, {}_{\ell^r}\tilde{A})) \\ &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H^{d-1}(k^{nr}/k, ({}_{\ell^r}A(k^{nr})(1-d))^D) \\ &\xrightarrow{\sim} (\varprojlim_r H^1(k^{nr}/k, {}_{\ell^r}A(k^{nr})))^D. \end{aligned}$$

On a alors une suite exacte :

$$0 \to \frac{H^d(\mathcal{O}_k,\tilde{\mathcal{A}})}{\delta(H^{d-2}(\mathcal{O}_k, R^1g_*\tilde{A}))}\{\ell\} \to H^d_{nrs}(k,\tilde{A},\ell) \to (T_\ell H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d))^D \to 0$$

où $\delta : H^{d-2}(\mathcal{O}_k, R^1g_*\tilde{A}) \to H^d(\mathcal{O}_k,\tilde{\mathcal{A}})$ est le morphisme de bord provenant de la suite spectrale $H^r(\mathcal{O}_k, R^sg_*\tilde{A}) \Rightarrow H^{r+s}(k,\tilde{A})$.

Remarque 5.28. Soit ℓ un nombre premier *différent de* p et ne divisant pas $|F_{d-1}|$. Supposons de plus que $\rho_0 = \rho_1 = ... = \rho_{d-3} = 0$. Dans ce contexte, on a $H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d)\{\ell\} \cong H^1(k^{nr}/k, A(k^{nr})) \cong H^1(k_{d-1}, A_{d-1})\{\ell\} \cong H^1(k_{d-1}, A^0_{d-1})\{\ell\}$. Comme $H^1(k_{d-1}, T_{d-1})\{\ell\}$ et $H^1(k_{d-1}, B_{d-1})\{\ell\}$ sont finis (remarque 5.12), la suite exacte $0 \to U_{d-1}\times T_{d-1} \to A^0_{d-1} \to B_{d-1} \to 0$ impose que $H^1(k_{d-1}, A^0_{d-1})\{\ell\}$ est fini. Cela montre la finitude de $H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d)\{\ell\}$ et donc la nullité de $T_\ell H^1(\mathcal{O}_k,\mathcal{A}_d)$. Par conséquent :

$$H^d_{nrs}(k,\tilde{A},\ell) = \mathrm{Im}(H^d(\mathcal{O}_k,\tilde{\mathcal{A}}) \to H^d(k,\tilde{A}))\{\ell\} = H^d_{nr}(k,\tilde{A})\{\ell\}$$

où $H^d_{nr}(k,\tilde{A}) := \mathrm{Im}(H^d(\mathcal{O}_k,\tilde{\mathcal{A}}) \to H^d(k,\tilde{A}))$. Ainsi, il est vraiment nécessaire de parler du groupe de cohomologie non ramifié symétrisé uniquement dans le cas $\ell = p$. Mais il est quand même utile d'introduire ce groupe quel que soit ℓ pour deux raisons : d'une part, dans le théorème qui suit, c'est avec le groupe de cohomologie non ramifié symétrisé qu'on identifie naturellement le noyau du morphisme de la dualité locale ; d'autre part, cela permet de donner des énoncés vrais pour tout ℓ.

Théorème 5.29. *Pour ℓ premier ne divisant pas $|F_{d-1}|$ (éventuellement égal à p), la partie ℓ-primaire du noyau de $H^d(k,\tilde{A}) \to (H^0(k,A)^\wedge)^D$ est $H^d_{nrs}(k,\tilde{A},\ell)$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 3.25. □

Pour alléger les notations dans la section suivante, nous noterons :

$$H^d_{nrs}(k,\tilde{A}) := \bigoplus_{\ell\wedge|F_{d-1}|=1} H^d_{nrs}(k,\tilde{A},\ell).$$

C'est le groupe de torsion dont la partie ℓ-primaire est $H^1_{nrs}(k,\tilde{A},\ell)$ si ℓ ne divise pas $|F_{d-1}|$, triviale sinon.

6. Variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p((t_2))...((t_d))(u)$

On suppose maintenant que $d \geq 1$ et que $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' corps p-adique, p étant un nombre premier fixé. Soient A une variété abélienne sur $K = k(X)$ et $\tilde{A} = \varinjlim_n \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)) = \varinjlim_n {}_nA^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)$. Le but de ce paragraphe est d'établir, sous de bonnes hypothèses géométriques sur A, des théorèmes de dualité entre certains groupes de Tate-Shafarevich de A et $\tilde{A}$.
Pour chaque $v \in X^{(1)}$, on adopte des notations analogues à celles de la section 3.2 pour la variété abélienne $A_v = A \times_K K_v$ sur le corps $d+1$-local K_v (on prendra garde au fait que K_v n'est pas d-local). Ainsi, on introduit les schémas en groupes $\mathcal{A}_{v,i}, A_{v,i}, F_{v,i}, U_{v,i}, T_{v,i}, B_{v,i}$ pour $i \in \{0, 1, ..., d+1\}$.

6.1 Approche sans les groupes de cohomologie non ramifiée symétrisés

On se donne un entier $r_0 \in \{0, 1, ..., d+1\}$ et un nombre premier ℓ différent de $p = \mathrm{Car}(k_0)$ et on fait les hypothèses suivantes :

(H 6.1)
- *si $r_0 = d$, alors les tores $T_{v,0}, ..., T_{v,d}$ sont anisotropes pour toute place $v \in X^{(1)}$;*
- *si $r_0 = d+1$, alors les tores $T_{v,0}, ..., T_{v,d-1}$ sont anisotropes pour toute place $v \in X^{(1)}$.*

Remarque 6.2. Ces hypothèses sont assez restrictives puisqu'elles portent sur toutes les places $v \in X^{(1)}$ et pas uniquement sur les places de mauvaise réduction (voir remarque 6.10). Dans le paragraphe suivant, on pourra s'affranchir de ces hypothèses grâce aux groupes de cohomologie non ramifiée symétrisés.

Soit maintenant U un ouvert non vide de X sur lequel A a bonne réduction, de sorte que le modèle de Néron $\mathcal{A}$ de A sur U est un schéma abélien. Soit $\tilde{\mathcal{A}} = \varinjlim_n \underline{\mathrm{Ext}}^1_K(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1))$. En procédant comme dans le lemme 5.2, on montre pour chaque $n > 0$ que :

$$ {}_n\tilde{\mathcal{A}} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_U(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)) = \underline{\mathrm{Hom}}_U({}_n\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) = {}_n\mathcal{A}^t \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d) $$

et que la multiplication par n sur $\tilde{\mathcal{A}}$ est surjective.

Lemme 6.3. *(i) Pour $r > 0$, le groupe $H^r(U, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.*
(ii) Pour $r > 1$, le groupe $H^r_c(U, \mathcal{A})$ est de torsion de type cofini.

Démonstration. La preuve est tout à fait analogue à celle de 2.17. □

Lemme 6.4. *Pour $r \geq 0$, il existe des suites exactes :*

$$0 \to H^r(U, \mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\{\ell\} \to H^{r+1}(U, \mathcal{A}\{\ell\}) \to H^{r+1}(U, \mathcal{A})\{\ell\} \to 0,$$

$$0 \to H^r_c(U, \tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to H^{r+1}_c(U, T_\ell \tilde{\mathcal{A}}) \to T_\ell H^{r+1}_c(U, \tilde{\mathcal{A}}) \to 0.$$

Ici, $H^{r+1}(U, \mathcal{A}\{\ell\})$ et $H^{r+1}_c(U, T_\ell \tilde{\mathcal{A}})$ désignent $\varinjlim_n H^{r+1}(U, {}_{\ell^n}\mathcal{A})$ et $\varprojlim_n H^2_c(U, {}_{\ell^n}\tilde{\mathcal{A}})$ respectivement.

Démonstration. La preuve est identique à celle de 2.18. □

Lemme 6.5. *Pour chaque $r \geq 0$, il existe un accouplement canonique :*

$$H^r(U, \mathcal{A}\{\ell\}) \times H^{d+3-r}_c(U, T_\ell \tilde{\mathcal{A}}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 2.19. □

Comme $\underline{\mathrm{Hom}}_U(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)) = 0$ et $H^{d+3}_c(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (lemme 1.3 de [Izq14]), on a pour chaque $n > 0$, un accouplement :

$$H^r(U, {}_n\tilde{\mathcal{A}}) \times H^{d+2-r}_c(U, \mathcal{A}) \to H^{d+3}_c(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d+1)) \to H^{d+3}_c(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d+1)) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

En passant à la limite inductive sur n, on obtient un accouplement :

$$H^r(U, \tilde{\mathcal{A}}) \times H^{d+2-r}_c(U, \mathcal{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Posons maintenant, pour chaque $r \geq 0$:

$$D^r(U, \tilde{\mathcal{A}}) = \mathrm{Im}(H^r_c(U, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^r(K, \tilde{A})).$$

Ce groupe est de torsion de type cofini.

Lemme 6.6. *Soit $r \geq 0$. Il existe V_0 un ouvert non vide de U tel que, pour tout ouvert V de V_0, le morphisme $H^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) \to H^r(K, \tilde{A})$ induit un isomorphisme :*

$$D^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) \cong Ш^r(K, \tilde{A}).$$

Démonstration. On remarque que, si $V \subseteq V'$ sont des ouverts dans U, alors $D^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) \subseteq D^r(V', \tilde{\mathcal{A}})$. Comme $D^r(U, \tilde{\mathcal{A}})$ est de torsion de type cofini, il existe V_0 un ouvert non vide de U tel que, pour tout V contenu dans V_0, on a :

$$D^r(V, \tilde{\mathcal{A}}) = D^r(V_0, \tilde{\mathcal{A}}).$$

Un tel V_0 convient. □

Afin d'établir un théorème de dualité pour le groupe de Tate-Shafarevich, il convient donc d'établir un théorème de dualité pour le groupe $D^r(U, \tilde{\mathcal{A}})$:

Proposition 6.7. *On suppose (H 6.1). On pose*

$$D^{d+2-r_0}_{sh}(U, \mathcal{A}) = Ker(H^{d+2-r_0}(U, \mathcal{A}) \to \prod_{v \in X^{(1)}} H^{d+2-r_0}(K_v, A)).$$

Il existe alors un accouplement canonique :

$$\overline{D^{r_0}(U, \tilde{\mathcal{A}})}\{\ell\} \times \overline{D^{d+2-r_0}_{sh}(U, \mathcal{A})}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui est non dégénéré.

Il convient d'établir préalablement le lemme suivant :

Lemme 6.8. *La suite :*

$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^{r_0-1}(K_v,\tilde{A})^{(\ell)} \to H^{r_0}_c(U,\tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to D^{r_0}(U,\tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to 0$$

est exacte.

Démonstration. On a $\tilde{\mathcal{A}} = \varinjlim_n {}_n\tilde{\mathcal{A}}$, et donc, en utilisant la proposition 2.4 de [Izq14], on a une suite exacte :

$$\bigoplus_{v\in X^{(1)}} H^{r_0-1}(K_v,\tilde{A}) \to H^{r_0}_c(U,\tilde{\mathcal{A}}) \to D^{r_0}(U,\tilde{\mathcal{A}}) \to 0.$$

Cela étant établi, la preuve est analogue à celle du lemme 2.22. □

Démonstration. (De la proposition 6.7)
Rappelons que, d'après le lemme 6.5, nous disposons d'un accouplement non dégénéré :

$$H^{d+2-r_0}(U,\mathcal{A}\{\ell\}) \times H^{r_0+1}_c(U,T_\ell\tilde{\mathcal{A}})) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

d'où un isomorphisme $H^{d+2-r_0}(U,\mathcal{A}\{\ell\}) \to (H^{r_0+1}_c(U,T_\ell\tilde{\mathcal{A}}))^D$. On dispose aussi d'un accouplement :

$$H^{d+2-r_0}(U,\mathcal{A}) \times H^{r_0}_c(U,\tilde{\mathcal{A}}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

qui induit un accouplement :

$$H^{d+2-r_0}(U,\mathcal{A})\{\ell\} \times H^{r_0}_c(U,\tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Ainsi on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes (que l'on appellera diagramme (1)) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{d+1-r_0}(U,\mathcal{A})\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+2-r_0}(U,\mathcal{A}\{\ell\}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^{d+2-r_0}(U,\mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (T_\ell H^{r_0+1}_c(U,\tilde{\mathcal{A}}))^D \arrow[r] & (H^{r_0+1}_c(U,T_\ell\tilde{\mathcal{A}}))^D \arrow[r] & (H^{r_0}_c(U,\tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)})^D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De plus, nous disposons aussi d'un autre diagramme diagramme commutatif à lignes exactes (que l'on appellera diagramme (2)) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^{d+2-r_0}_{sh}(U,\mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & H^{d+2-r_0}(U,\mathcal{A})\{\ell\} \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in X^{(1)}} H^{d+2-r_0}(K_v,A)\{\ell\} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (D^{r_0}(U,\tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)})^D \arrow[r] & (H^{r_0}_c(U,\tilde{\mathcal{A}})^{(\ell)})^D \arrow[r] & \prod_{v\in X^{(1)}} (H^{r_0-1}(K_v,\tilde{A})^{(\ell)})^D
\end{tikzcd}$$

En procédant exactement comme dans 2.21 et en utilisant la section 5 ainsi que l'hypothèse (H 6.1), on montre alors que l'on a un accouplement non dégénéré :

$$\overline{D^{r_0}(U,\tilde{\mathcal{A}})\{\ell\}} \times \overline{D^{d+2-r_0}_{sh}(U,\mathcal{A})\{\ell\}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de conclure :

Théorème 6.9. *On rappelle que $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' un corps p-adique et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. Soit A une variété abélienne sur K. On suppose (H 6.1). Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes de torsion :*

$$\overline{Ш^{r_0}(K, \tilde{A})}_{non-p} \times \overline{Ш^{d+2-r_0}(K, A)}_{non-p} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

De plus, $Ш^{r_0}(K, \tilde{A})$ et $Ш^{d+2-r_0}(K, A)$ sont de torsion de type cofini.

Démonstration. Cela découle immédiatement de la proposition 6.7 et du lemme 6.6 en passant à la limite sur U. □

Remarque 6.10. • Les hypothèses de (H 6.1) concernent toutes les places de $X^{(1)}$. On ne peut pas restreindre ces hypothèses aux places de mauvaise réduction de A puisqu'on ne sait pas si l'ouvert V_0 du lemme 6.6 peut être choisi égal à U. Ce problème vient en particulier du fait que le corps K est de dimension cohomologique 3 et que, même si $v \in X^{(1)}$ est une place de bonne réduction, le groupe $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{A})$ peut être non nul !

• Même si le théorème est une dualité modulo divisibles, dans la preuve, on a besoin d'une dualité locale qui n'est pas modulo divisibles. C'est pourquoi nous sommes amenés à faire les hypothèses (H 6.1).

Remarque 6.11. Toute variété abélienne sur K vérifie les hypothèses du théorème lorsque $r_0 = 0$. Dans ce cas, le théorème affirme que la partie divisible de $Ш^{d+2}(K, A)$ est p-primaire.

Exemple 6.12. Dans le cas où k est p-adique et $K = k(u)$, si on se donne $f(u) \in K^\times$, la courbe elliptique d'équation $y^2 = x^3 + f(u)$ vérifie les hypothèses du théorème pour $r_0 \in \{1, 2\}$.

6.2 Approche avec les groupes de cohomologie non ramifiée symétrisés

Soient ℓ un nombre premier (éventuellement égal à p) et U un ouvert non vide de X sur lequel A a bonne réduction. Faisons l'hypothèse suivante :

(H 6.13)$_\ell$
- *si $\ell \neq p$, pour chaque $v \in X \backslash U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
  - *ℓ ne divise pas $|F_{v,d}|$,*
  - *les tores $T_{v,d-1}, ..., T_{v,0}$ sont anisotropes.*
- *si $\ell = p$, pour chaque $v \in X \backslash U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
  - *ℓ ne divise pas $|F_{v,d}|$,*
  - *les groupes algébriques $T_{v,d}, ..., T_{v,1}$ et $B_{v,1}$ sont triviaux.*

Remarque 6.14. Cette hypothèse est nettement mois forte que l'hypothèse de la section précédente. Elle ne concerne que les places de mauvaise réduction et est vérifiée pour presque tout ℓ.

On note Z l'ensemble suivant :
- si $\ell \neq p$, alors Z désigne l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que les tores $T_{v,d-1}, ..., T_{v,-1}$ sont anisotropes,
- si $\ell = p$, alors Z désigne l'ensemble des $v \in X^{(1)}$ tels que les groupes algébriques $T_{v,d}, ..., T_{v,1}$ et $B_{v,1}$ sont triviaux.

On introduit le groupe suivant :

$$Ш^{d+1}_{nrs}(\tilde{A}) := \mathrm{Ker}\left(H^{d+1}(K,\tilde{A}) \to \prod_{v\in Z} H^{d+1}(K_v,\tilde{A}) \times \prod_{v \in X^{(1)}\setminus Z} H^{d+1}(K_v,\tilde{A})/H^{d+1}_{nrs}(K_v,\tilde{A}) \right).$$

En procédant exactement de la même manière que dans la section 4, on peut établir le théorème et le corollaire suivants :

Théorème 6.15. *On rappelle que $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' un corps p-adique et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. Soit A une variété abélienne sur K. On suppose (H 6.13)$_\ell$. Alors il existe un accouplement non dégénéré de groupes finis :*

$$\overline{Ш^{d+1}_{nrs}(\tilde{A})\{\ell\}} \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Corollaire 6.16. *On rappelle que $k = k'((t_2))...((t_d))$ avec k' un corps p-adique et que $K = k(X)$ est le corps des fonctions de la courbe X. Soit A une variété abélienne sur K. On suppose (H 6.13)$_\ell$ et on note $\tilde{i} : Ш^{d+1}(\tilde{A}) \hookrightarrow Ш^{d+1}_{nrs}(\tilde{A})$ l'injection canonique. Alors il existe un accouplement non dégénéré à gauche de groupes finis :*

$$Ш^{d+1}(\tilde{A})\{\ell\}/\tilde{i}^{-1}(Ш^{d+1}_{nrs}(\tilde{A})\{\ell\}_{div}) \times \overline{Ш^1(A)}\{\ell\} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Question : Quel est le noyau à droite dans l'accouplement précédent ?

Remarque 6.17. Dans le cas où k est un corps p-adique, en utilisant le paragraphe 5.3.2, il est possible de remplacer l'hypothèse (H 6.13)$_p$ par l'hypothèse légèrement plus faible suivante :

> « pour chaque $v \in X \setminus U$, au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :
> - ℓ ne divise pas $|F_{v,d}|$,
> - la variété abélienne $B_{v,1}$ est triviale. »

7. Quelques remarques sur la finitude des groupes de Tate-Shafarevich

Le but de cette section est de donner, pour $k = \mathbb{C}((t))$ ou $k = \mathbb{Q}_p$, des exemples de variétés abéliennes sur K pour lesquelles on peut déterminer si le premier groupe de Tate-Shafarevich est fini ou pas. Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème 3.1 de [Tat66], dont nous rappelons l'énoncé (adapté à notre situation) :

Théorème 7.1. *(théorème 3.1 de [Tat66])*
Soit Y une surface régulière sur k munie d'un morphisme propre $f : Y \to X$ à fibres de dimension 1. On suppose que les fibres géométriques de f sont connexes, et que la fibre générique est lisse. Si f admet une section, Br X est un sous-groupe de Br Y et on a un isomorphisme $Ш^1(K, J) \cong Br\, Y/Br\, X$ où J désigne la jacobienne de la fibre générique de f.

7.1 Cas où $k = \mathbb{C}((t))$

On se place dans le cas où $k = \mathbb{C}((t))$.

7.1.1 Cas où Y est un produit

Soient C une courbe projective lisse sur k telle que $C(k) \neq \emptyset$ et $Y = C \times_k X$. On note J_C (resp. J_X) la jacobienne de C (resp. X) sur k. D'après le théorème 7.1, le groupe $Ш^1(K, J_C \times_k K)$ est égal à Br Y/Br X. Par ailleurs, nous savons que $\text{Br}_1\, Y = H^1(k, \text{Pic}\, Y_{\overline{k}})$. D'après la proposition 1.7 de [SZ14], le morphisme naturel $H^1(k, \text{Pic}\, C_{\overline{k}}) \times H^1(k, \text{Pic}\, X_{\overline{k}}) \to H^1(k, \text{Pic}\, Y_{\overline{k}})$ a un noyau et un conoyau finis. Écrivons la suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \to J_C(\overline{k}) \to \text{Pic}\, C_{\overline{k}} \to \mathbb{Z} \to 0.$$

$$0 \to J_X(\overline{k}) \to \text{Pic}\, X_{\overline{k}} \to \mathbb{Z} \to 0.$$

On en déduit une suite exacte de cohomologie :

$$\mathbb{Z} \to H^1(k, J_C) \to H^1(k, \text{Pic}\, C_{\overline{k}}) \to 0.$$

$$\mathbb{Z} \to H^1(k, J_X) \to H^1(k, \text{Pic}\, X_{\overline{k}}) \to 0.$$

Les noyaux des morphismes surjectifs $H^1(k, J_C) \to H^1(k, \text{Pic}\, C_{\overline{k}})$ et $H^1(k, J_X) \to H^1(k, \text{Pic}\, X_{\overline{k}})$ sont donc finis. On en déduit que les parties divisibles de $\text{Br}_1\, Y/\text{Br}\, X \cong H^1(k, \text{Pic}\, Y_{\overline{k}})/H^1(k, \text{Pic}\, X_{\overline{k}})$ et $H^1(k, J_C)$ sont égales. Par conséquent, si J_C n'a pas très mauvaise réduction, alors $Ш^1(K, J_C \times_k K)_{div} \neq 0$. La réciproque est vraie par exemple si X est de genre 0, puisque dans ce cas, la partie divisible de Br $Y_{\overline{k}}$ est nulle d'après la section 2.9 de [SZ14].

7.1.2 Cas où Y est de dimension de Kodaira $-\infty$

Soit Y une surface projective lisse sur k de dimension de Kodaira $-\infty$. Le cas où Y est une fibration en coniques sur une courbe est inintéressant, puisque la jacobienne de la fibre générique est triviale.
Supposons donc que Y est une surface de del Pezzo vérifiant les hypothèses de 7.1. On note J la jacobienne de la fibre générique de $Y \to X$. Soit L une extension finie de k telle que $Y \times_k L$ est rationnelle. Alors Br Y est fini, et donc $Ш^1(L(X), J \times_k$

$L(X))_{div} = 0$. Par restriction-corestriction, on déduit que $Ш^1(K, J)_{div} = 0$.
Remarquons finalement qu'il existe bien des surfaces de del Pezzo Y vérifiant les hypothèses de 7.1. Par exemple, il suffit de choisir $Y_0/\mathbb{C}$ l'éclatement de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ en les points base d'un pinceau de cubiques et $Y = Y_0 \times_{\mathbb{C}} k$ puisque, dans ce cas, Y est une surface jacobienne sur $\mathbb{P}^1_k$.

7.1.3 Cas où Y est de dimension de Kodaira 0

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le cas où Y est une surface projective lisse minimale sur k de dimension de Kodaira 0. La classification de telles surfaces montre que Y est un twist d'une surface abélienne, une surface bielliptique, une surface K3 ou une surface d'Enriques.

Surfaces abéliennes. Supposons que X soit une courbe elliptique et soit Y le produit de X par une courbe elliptique E. Dans ce cas, Y est une surface abélienne fibrée au-dessus de X. Si E n'a pas très mauvaise réduction, alors, d'après l'étude menée en 7.1.1, $Ш^1(K, E \times_k K)_{div} \neq 0$. Le cas où E a très mauvaise réduction est plus difficile, puisque $\mathrm{Br}_1\, Y/\mathrm{Br}\, X$ est fini et il faut donc s'intéresser au groupe de Brauer transcendant $\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, Y \to \mathrm{Br}(Y \times_k \overline{k}))$.

Surfaces bielliptiques. Soit $Y = (E_1 \times_k E_2)/G$ une surface bielliptique, avec E_1 et E_2 deux courbes elliptiques et G un sous-groupe fini de E_1 agissant sur E_2 de sorte que $E_2/G \cong \mathbb{P}^1_k$. Le morphisme $\pi : Y \to E_1/G$ est alors une fibration elliptique isotriviale, de fibre E_2. On prend $X = E_1/G$ et on suppose que la fibration a une section. Comme le genre géométrique de Y est nul et $\mathrm{Alb}\, Y = E_1/G$, on déduit que $\mathrm{Br}(Y \times_k \overline{k})$ et $\mathrm{Br}_1\, Y/\mathrm{Br}\, X$ sont finis. Cela montre que $\mathrm{Br}\, Y/\mathrm{Br}\, X$ est fini, et il en est donc de même de $Ш^1(K, J)$ où J désigne la jacobienne de la fibre générique de π.

Surfaces K3. Supposons que $X = \mathbb{P}^1_k$. Soient Y_0 une surface K3 sur $\mathbb{C}$ telle que $Y = Y_0 \times_{\mathbb{C}} k$ est une surface elliptique sur X avec une section. On note $\overline{Y} = Y \times_k \overline{k}$ et $\rho = \mathrm{rg}(NS(Y_0)) = \mathrm{rg}(NS(\overline{Y}))$. Comme la variété d'Albanese de Y est triviale, le groupe $\mathrm{Br}_1\, Y$ est fini. Concernant le groupe de Brauer transcendant de Y, comme $\mathrm{Br}\, Y_0 \cong \mathrm{Br}\, \overline{Y}$, on a $\mathrm{Br}\, \overline{Y} = \mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, Y \to \mathrm{Br}\, \overline{Y})$. Or $(\mathrm{Br}\, \overline{Y})_{div} \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{22-\rho}$. Étant donné que $\rho \leq 20$, on a $\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, Y \to \mathrm{Br}\, \overline{Y})_{div} \neq 0$. Le théorème 7.1 permet alors de conclure que $Ш^1(K, J)_{div} \neq 0$ où J est la jacobienne de la fibre générique de $Y \to X$. On remarquera que dans cette situation, la non nullité de $Ш^1(K, J)_{div}$ n'est pas expliquée par le groupe de Brauer algébrique de Y.
Reste à rappeler qu'il existe bel et bien des surfaces K3 sur $\mathbb{C}$ qui sont des surfaces jacobiennes :

- toutes les surfaces K3 avec $\rho \geq 13$ sont jacobiennes (lemme 12.22 de [SS10]) ;
- pour $\rho < 13$, dans la section 3.2 de [HS11], Hulek et Schütt construisent une famille de surfaces K3 qui sont des surfaces jacobiennes et qui vérifient $\rho \geq 10$;
- d'après [CD89], la surface jacobienne d'une surface K3 elliptique est une surface K3 de même rang de Picard, et toute surface K3 avec $\rho \geq 5$ est elliptique.

Surfaces d'Enriques. Si Y est une surface d'Enriques, c'est toujours une surface elliptique, mais elle ne possède jamais de section, ce qui ne permet donc pas d'appliquer 7.1.

Remarque 7.2. Si Y est une surface projective lisse sur k de dimension de Kodaira 1, alors Y est automotiquement une surface elliptique, mais pas forcément jacobienne. Si Y est de type général, alors Y n'est pas une surface elliptique.

7.2 Cas où $k = \mathbb{Q}_p$

Soient p et ℓ des nombres premiers distincts. On se place dans le cas où k un corps p-adique. Soient C une courbe projective lisse sur k telle que $C(k) \neq \emptyset$ et $Y = C \times_k X$. On note J_C (resp. J_X) la jacobienne de C (resp. X) sur k. Comme dans le paragraphe précédent, on montre que la partie divisible de $(\mathrm{Br}_1\, Y/\mathrm{Br}\, X)\{\ell\}$ est toujours triviale. En particulier, si X est de genre 0, alors $Ш^1(K, J_C \times_k K)\{\ell\}_{div} = 0$ (et ce résultat reste vrai si $C(k) = \emptyset$ par un argument de restriction-corestriction). Par contre, si $J_C \neq 0$, alors $Ш^1(K, J_C \times_k K)\{p\}_{div} \neq 0$.

Question : Si X est de genre 0, est-ce que toute jacobienne J sur K vérifie $Ш^1(K, J)\{\ell\}_{div} = 0$?

Annexe : Le faisceau $\tilde{A}$

En tenant compte de la formule de Barsotti-Weil, il serait naturel de considérer $\underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d))$ au lieu de $\tilde{A}$ dans les sections 5 et 6. Il se trouve en fait que ces deux faisceaux coïncident. Pour le voir, il faut utiliser certains travaux de Breen :

Proposition 7.3. *Soient l un corps de caractéristique nulle et X un l-schéma séparé. Soit $\mathcal{A}$ un schéma abélien sur X. Soient r un entier différent de 1, i un entier quelconque et n un entier naturel non nul.*
(i) On a :

$$\underline{Ext}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)) = \underline{Ext}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)) = 0.$$

(ii) Le faisceau $\underline{Ext}^1_X(\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i))$ est de torsion.
(iii) On a :

$$\underline{Ext}^1_X(\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)) = \varinjlim_n \underline{Ext}^1_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)).$$

Démonstration. (i) • Montrons d'abord que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))$ est nul.

- Pour $r = 0$, la multiplication par n est injective sur $\underline{\mathrm{Hom}}_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))$. Ce faisceau étant de n-torsion, il est nul.
- Supposons $r \geq 2$. On a une suite exacte :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)) \to \underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)) \to \underline{\mathrm{Ext}}^r_X({}_n\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)).$$

  Or $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X({}_n\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i)) = 0$. Donc le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X({}_n\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))$ est n-divisible. Étant de n-torsion, il est nul.

On remarque alors que la nullité de $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(i))$ implique que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i))$ est sans torsion pour $r \neq 1$. Or, comme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i)$ est de torsion, en utilisant les résultats de [Bre69] (en particulier la méthode décrite dans le paragraphe 6 et le complexe 5.13), on déduit que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^r_X(\mathcal{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(i))$ est de torsion. Cela achève la preuve.

(ii) Cela découle de [Bre69] (en particulier la méthode décrite dans le paragraphe 6 et le complexe 5.13).

(iii) D'après (i), on a une suite exacte :

$$0 \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(d)) \to 0.$$

L'assertion (ii) permet alors de conclure.

□

Références

[Bre69] Lawrence Breen. Extensions of abelian sheaves and Eilenberg-MacLane algebras. *Invent. Math.*, 9 :15–44, 1969.

[CTH14] Jean-Louis Colliot-Thélène et David Harari. Dualité et principe local-global pour les tores sur une courbe au-dessus de $\mathbb{C}((t))$. 2014. Prépublication à paraître dans Proc. London Math. Soc.

[CTS87] Jean-Louis Colliot-Thélène et Jean-Jacques Sansuc. La descente sur les variétés rationnelles II. *Duke Mathematical Journal*, 54 :375–492, 1987.

[CD89] François R. Cossec and Igor V. Dolgachev. *Enriques surfaces I.* Progress in Mathematics 76, Birkhäuser, Boston, 1989.

[FK88] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl. *Étale cohomology and the Weil conjecture.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], Volume 13, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[HSz05] David Harari and Tamás Szamuely. Arithmetic duality theorems for 1-motives. *J. Reine Angew. Math.*, 578 :93–128, 2005.

[HSz13] David Harari and Tamás Szamuely. Local-global principles for tori over p-adic function fields. 2013. A paraître dans *Journal of Algebraic Geometry.*

[HS11] Klaus Hulek and Matthias Schütt. Enriques surfaces and Jacobian elliptic K3 surfaces. *Mathematische Zeitschrift*, 268(3-4) :1025–1056, 2011.

[Izq14] Diego Izquierdo. Théorèmes de dualité pour les corps de fonctions sur des corps locaux supérieurs. 2014. Prépublication sur `http://www.eleves.ens.fr/home/izquierd/`.

[Koy00] Yoshihiro Koya. On a duality theorem of abelian varieties over higher dimensional local fields. *Kodai Math. J.*, 2 :297–308, 2000.

[Fuc70] László Fuchs. *Infinite abelian groups. Vol. I.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 36, Academic Press, New York-London, 1970.

[Lan58] Serge Lang and John Tate. Principal homogeneous spaces over abelian varieties. *American Journal of Mathematics*, 80 :659–684, 1958.

[Mat55] Arthur Mattuck. Abelian varieties over p-adic ground fields. *Ann. of Math. (2)*, 62 :92–119, 1955.

[Mil86] James S. Milne. *Abelian varieties.* In *Arithmetic geometry* (Storrs, Conn., 1984), p.103–150. Springer, New York, 1986.

[Mil06] James S. Milne. *Arithmetic duality theorems.* BookSurge, LLC, Charleston, SC, second edition, 2006.

[NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields.* Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Ogg62] Andrew P. Ogg. Cohomology of abelian varieties over function fields. *Ann. of Math. (2)*, 76 :185–212, 1962.

[Ono61] Takashi Ono. Arithmetic of algebraic tori. *Ann. of Math. (2)*, 74 :101–139, 1961.

[Oor66] Frans Oort. *Commutative group schemes.* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.

[SvH03] Claus Scheiderer and Joost van Hamel. Cohomology of tori over p-adic curves. *Math. Ann.*, 326(1) :155–183, 2003.

[SS10] Matthias Schütt and Tetsuji Shioda. Elliptic surfaces. In *Algebraic geometry in East Asia—Seoul 2008*, Adv. Stud. Pure Math., 60 :51—160, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[Ser94] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*, fifth edition. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[SGA7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I), Dirigé par A. Grothendieck. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288, Springer-Verlag, 1972.

[SZ14] Alexei N. Skorobogatov and Yuri G. Zarhin. The Brauer group and the Brauer–Manin set of products of varieties. *J. Eur. Math. Soc.*, 16 :749–768, 2014.

[Tam94] Günter Tamme. *Introduction to étale cohomology, Universitext.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Tat58] John Tate. WC-groups over p-adic fields. *Séminaire Bourbaki*, année 1957/1958, exposé 156.

[Tat63] John Tate. Duality theorems in Galois cohomology over number fields. In *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, pages 288–295. Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963.

[Tat66] John Tate. On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog. *Séminaire Bourbaki*, année 1964/1966, exposé 306.