Compléments sur les anneaux

Travaux dirigés du 9 et du 12 décembre 2025

Exercice 1. Un contre-exemple

Soient V le k-espace vectoriel $k^{(\mathbb{N})}$ et $A = \mathrm{End}_k(V)$. Montrer que les A-modules A et A^2 sont isomorphes.

Exercice 2. Anneau opposé

Si $(A, +, \cdot)$ est un anneau, on peut regarder la loi de composition inversée $x \star y = y \cdot x$ sur A et définir l'*anneau opposé* $A^{\mathrm{opp}} := (A, +, \star)$. Si l'anneau A est commutatif, on a bien sûr $A = A^{\mathrm{opp}}$. Si M est un A-module, on notera $\mathrm{End}_A(M)$ l'anneau des endomorphismes A-linéaires de M. Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Montrer que l'on a un isomorphisme d'anneaux $\mathrm{M}_n(A)^{\mathrm{opp}} \simeq \mathrm{M}_n\left(A^{\mathrm{opp}}\right)$. Qu'en déduire si A est commutatif ?
2. Montrer que $u \mapsto u(1)$ induit un isomorphisme d'anneaux $\mathrm{End}_A(A) \xrightarrow{\sim} A^{\mathrm{opp}}$.
3. Plus généralement, soient M un A-module libre de rang n et $e_1, \ldots, e_n$ une base de M. Pour $u \in \mathrm{End}_A(M)$ on note $\mathrm{Mat}_e\, u = \left(u_{i,j}\right) \in \mathrm{M}_n(A)$ l'élément déterminé par les relations $u\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^n u_{i,j} e_i$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Montrer que
$$\mathrm{End}_A(M) \to \mathrm{M}_n\left(A^{\mathrm{opp}}\right),\ u \mapsto \mathrm{Mat}_e\, u$$
est un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 3. Théorème de la base de Hilbert

On se propose de montrer que si A est un anneau (commutatif) noethérien, alors $A[X]$ aussi. Procédons par contraposée en se donnant un anneau commutatif A tel que $A[X]$ n'est pas noethérien. Soit I un idéal de $A[X]$ qui n'est pas finiment engendré. On construit par récurrence une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A[X]$ en prenant P_0 de degré minimal dans I et pour $n \geq 1$, P_n de degré minimal dans $I - (P_0, \ldots, P_{n-1})$. On obtient une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A en prenant a_n le coefficient dominant de P_n pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'idéaux de A, définie par $J_n = (a_0, \ldots, a_n)$ pour $n \geq 0$, n'est pas stationnaire.
2. En déduire que A n'est pas noethérien.
3. En déduire que si A est un anneau noethérien, alors $A[X_1, \ldots, X_d]$ est noethérien pour tout $d \geq 1$.

Exercice 4. Anneaux intégralement clos

Soit A un anneau intègre de corps de fractions K. On note $\widetilde{A}$ l'ensemble des éléments $x \in K$ tels qu'il existe $P \in A[X]$ unitaire avec $P(x) = 0$. On a toujours $A \subseteq \widetilde{A}$. On dit que A est *intégralement clos* si on a $A = \widetilde{A}$.

1. Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.

Soit k un corps.

2. Soit A le sous-anneau de $k[X]$ formé des P vérifiant $P(0) = P(1)$. Montrer que A n'est pas intégralement clos.
3. Soit A le sous-anneau de $k[X]$ formé des P vérifiant $P'(0) = 0$. Montrer que A n'est pas intégralement clos.

Exercice 5. Caractérisation de Motzkin-Samuel des anneaux euclidiens

Soit A un anneau commutatif. On définit par récurrence une suite de sous-ensembles $\{\mathrm{E}_n(A)\}_{n\geqslant 0}$ de A en posant $\mathrm{E}_0(A) = \varnothing$, $\mathrm{E}'_n(A) = \mathrm{E}_n(A) \cup \{0\}$ et
$$\mathrm{E}_{n+1}(A) = \left\{a \in A \mid aA + \mathrm{E}'_n(A) = A\right\}$$

On pose aussi $\mathrm{Eucl}(A) = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathrm{E}_n(A)$, et pour $a \in \mathrm{Eucl}(A)$ on note $v(a)$ le plus petit entier $n \geqslant 0$ vérifiant $a \in \mathrm{E}_{n+1}(A)$.

1. Déterminer $\mathrm{E}_n(\mathbb{Z})$ pour tout entier $n \geqslant 1$, ainsi que v.
2. Pour k un corps, déterminer $\mathrm{E}_n(k[X])$ pour tout entier $n \geqslant 1$, ainsi que v.
3. Montrer $\mathrm{E}_1(A) = A^\times$ et que $\{\mathrm{E}_n(A)\}_{n\geqslant 0}$ est croissante pour l'inclusion.
4. On suppose A euclidien pour le stathme φ. Montrer $v \leqslant \varphi$ et $A = \mathrm{Eucl}(A) \cup \{0\}$.
5. Réciproquement, montrer que si on a $A = \mathrm{Eucl}(A) \cup \{0\}$ alors A est euclidien pour le stathme v.

Exercice 6. Anneaux de valuation discrète

Une *valuation discrète* sur un corps K est une application surjective $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ telle que $v(0) = +\infty$ et pour tous $x, y \in K$, $v(xy) = v(x) + v(y)$ et $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$; l'ensemble $\{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ est alors un anneau que l'on appelle *anneau de valuation associé à v*. On dit qu'un anneau intègre A est un *anneau de valuation discrète* s'il existe une valuation discrète v sur le corps des fractions de A telle que A est l'anneau de valuation associé à v.

1. Pour $K = \mathbb{Q}$ et p premier, on pose $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ la valuation p-adique. Quel est l'anneau de valuation associé ?
2. Pour $K = k(X)$, on peut écrire tout polynôme non nul $P(X)$ de manière unique comme $P(X) = X^n P_0(X)$ où le terme constant de $P_0(X)$ est non nul. On pose $v_X(P) = n$ et $v_X(P/Q) = v_X(P) - v_X(Q)$. Quel est l'anneau de valuation associé ?

Soit A un anneau de valuation discrète.

3. Montrer que A a un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ (on dit que A est *local*), et que pour tout $n \geq 1$ et tout x_0 avec $v(x_0) = 1$, on a
$$\mathfrak{m}^n = \{x \in K \mid v(x) \geq n\} = (x_0^n).$$
4. En déduire que A est euclidien.
5. Quels sont les sous-A-modules du corps des fractions de A ?