Groupes abéliens de type fini

Travaux dirigés du 16 et du 19 décembre 2025

Préambule. Prolongement de morphismes entre groupes abéliens

Soient G, H, D des groupes abéliens avec $H \subseteq G$, D divisible, et $f : H \to D$ un morphisme de groupes. On va montrer qu'il existe un morphisme de groupes $\widetilde{f} : G \to D$ qui prolonge f.

1. Montrer le résultat si G est engendré par H et un élément $g \in G$.
2. Montrer le résultat si G est de type fini.
3. Montrer le cas général avec le lemme de Zorn.
4. Donner un contre-exemple si D n'est plus divisible.

Problème. Structure des groupes abéliens de type fini

On se propose de classifier les groupes abéliens de type fini à isomorphisme près. On commence par étudier le cas fini ; soit donc G est un groupe abélien fini. On définit l'*exposant* de G, noté $\exp(G)$, comme le plus petit entier $e \geq 1$ vérifiant $g^e = 1$ pour tout $g \in G$.

1. Montrer que $\exp(G)$ est le PPCM des ordres des éléments de G.
2. Montrer qu'il existe un élément $x \in G$ d'ordre $\exp(G)$.
3. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ qui envoie x sur $e^{2i\pi/\exp(G)}$.
4. Montrer que le noyau de χ est un complément de $\langle x \rangle$ dans G.
5. En déduire qu'il existe un entier n et des entiers $a_1, \dots, a_n > 1$ tels que

$$a_1 \,|\, a_2 | \cdots | \, a_n \quad \text{et} \quad G \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$$

(on convient qu'un produit vide de groupes est le groupe trivial).

On note $\min(G)$ le nombre minimal de générateurs de G.

6. Si $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ avec p premier, montrer que $n = \min(G)$.
7. En déduire que dans le cas général, on a $n = \min(G)$.

On a donc l'unicité de n. Pour montrer l'unicité du n-uplet $(a_1 \dots, a_n)$, on va considérer l'ensemble A_n des suites finies $a = (a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{N}^*$ avec $a_1 \,|\, a_2 | \cdots | \, a_n$. Pour $a \in A_n$ on pose

$$G_a := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}.$$

On suppose $a, b \in A_n$ et $G_a \simeq G_b$, on veut montrer $a = b$. On raisonne par récurrence sur $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$. Si $a_1 = b_1 = 1$, on conclut par récurrence sur n. Sinon, quitte à échanger a et b, on peut supposer $a_1 > 1$. Soit p premier divisant a_1, et donc tous les a_i. On regarde les sous-groupes de p-torsion.

8. Montrer que $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[p] = \{0\}$ sauf si $p \mid m$, auquel cas on a $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[p] \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[p] \simeq \mathbb{Z}/(m/p)\mathbb{Z}$.
9. En déduire $\left|G_a[p]\right| = p^n$, et $\left|G_b[p]\right| = p^r$ où r est le nombre d'entiers $1 \leq i \leq n$ tels que $p \mid b_i$.
10. Montrer $G_a[p] \simeq G_b[p]$ et $G_a/G_a[p] \simeq G_b/G_b[p]$.
11. Conclure.

On a donc l'unicité des a_i, que l'on appelle les *facteurs invariants* de G. On s'intéresse maintenant au cas plus général où le groupe abélien G est de type fini, c'est-à-dire que le $\mathbb{Z}$-module correspondant est de type fini.

12. Si $r \geq 0$, montrer qu'on a $\min(\mathbb{Z}^r) = r$. En particulier, le rang d'un $\mathbb{Z}$-module libre est bien défini.

On regarde le *sous-groupe de torsion* de G

$$G_{\mathrm{tor}} := \{g \in G \mid \exists m \geq 1, g^m = 1\} = \bigcup_{m \geq 1} G[m].$$

On va montrer que G_{tor} est fini et qu'il existe un unique entier $r \geq 0$ tel que $G \simeq G_{\mathrm{tor}} \times \mathbb{Z}^r$; on pourra donc se ramener à la classification des groupes abéliens finis. En particulier, un groupe abélien de type fini sans torsion est libre.

13. Montrer qu'un groupe abélien qui se surjecte dans $\mathbb{Z}$ par un morphisme f est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \ker f$.
14. En déduire que si G admet un élément d'ordre infini, il existe un groupe abélien de type fini G' tel que $G \simeq G' \times \mathbb{Z}$.
15. En déduire qu'il existe $r \leq \min(G)$ et G' groupe abélien fini tels que $G \simeq G' \times \mathbb{Z}^r$.
16. Montrer que si A et B sont des groupes abéliens avec A fini et B libre de rang fini, on a
$$(A \times B)_{\text{tor}} = A \times \{0\} \quad \text{et} \quad (A \times B)/(A \times B)_{\text{tor}} \simeq B.$$
17. En déduire qu'on a $G' \simeq G_{\text{tor}}$ et $r = \min(G/G_{\text{tor}})$, d'où l'unicité de r que l'on appelle le *rang* de G.

Pour finir, on présente quelques applications de la classification des groupes abéliens finis.

18. Déterminer, à isomorphisme près, les groupes abéliens d'ordre 2025, en précisant leurs facteurs invariants.
19. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
20. Déterminer, à isomorphisme près, les groupes abéliens G qui ont un sous-groupe H avec $H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq G/H$.
21. Soit G un groupe abélien fini. Montrer que pour tout diviseur d de $|G|$ il existe un sous-groupe de G d'ordre d.