Représentations linéaires

Travaux dirigés du 6 et du 9 janvier 2026

Exercice 1. Représentation de permutation d'une action

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal supérieur à 3. On considère la représentation de permutation $\mathbb{C}X$.

1. Vérifier que l'on a une décomposition comme $\mathbb{C}[G]$-module
$$\mathbb{C}X = \mathbb{C}\left(\sum_{x\in X} x\right) \oplus H \quad \text{avec} \quad H = \left\{ \sum_{x\in X} \lambda_x x \;\middle|\; \sum_{x\in X} \lambda_x = 0 \right\}$$
et où le premier terme est isomorphe à la représentation triviale. Vérifier également que H est engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les $(x-x')_{(x,x')\in X\times X}$.
2. Soit Y un G-ensemble fini. Démontrer que le vecteur $v = \sum_{y\in Y} \lambda_y y$ appartient aux points de $\mathbb{C}Y$ fixes sous G si et seulement si la fonction $y \mapsto \lambda_y$ est G-invariante, i.e. constante sur les orbites.

On se propose de démontrer que H est irréductible si et seulement si l'action de G sur X est 2-transitive. Dans un premier temps, supposons que l'action est 2-transitive.

3. Calculer pour tout $x \in X$ l'espace des invariants H^{G_x}.
4. Démontrer que H est irréductible. (Indication : pour une sous-représentation non nulle H', on pourra considérer un vecteur non nul $v \in H'$ et prendre x tel que la coordonnée de v sur x est non nulle, puis essayer de créer un élément dans $H' \cap H^{G_x}$.)

Supposons à présent que l'action n'est pas 2-transitive. Considérons l'action diagonale de G sur $X\times X$ et la représentation de permutation $\mathbb{C}(X\times X)$ associée.

5. Supposons que l'action de G sur X n'est pas 2-transitive. Trouver un sous-espace de dimension 3 du $\mathbb{C}(X\times X)$ sur lequel G agisse trivialement.

Pour parachever la preuve, il reste à démontrer que si H est irréductible, alors la dimension des points fixes de $\mathbb{C}(X\times X)$ sous l'action de G vaut 2. Nous commençons par énoncer un résultat un peu plus général sur les représentations de permutation.

6. Soit X, Y deux G-ensembles finis. Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme de $\mathbb{C}[G]$-modules :
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X, \mathbb{C}Y) \to \mathbb{C}(X\times Y), \quad T \mapsto \sum_{(x,y)\in X\times Y} t_{x,y}(x,y) \text{ où } T(x) = \sum_{y\in Y} t_{x,y} y.$$
7. Conclure. (Indication : on pourra regarder les invariants par G de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X, \mathbb{C}X)$ et utiliser le lemme de Schur.)
8. On suppose que X est de cardinal pair. Adapter le raisonnement pour remplacer $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.
9. On suppose que G agit transitivement sur X. Adapter le raisonnement pour remplacer $\mathbb{C}$ par un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 2$ dans lequel $|G| \neq 0$.

Exercice 2. Action du centre

Soit G un groupe et V un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie.

1. Supposons V irréductible. Montrer que l'action de $\mathrm{Z}(G)$ se fait par homothéties, i.e. que pour tout $z \in Z(G)$, l'élément $z\cdot -$ de $\mathrm{GL}(V)$ est dans $\mathbb{C}^\times \,\mathrm{id}_V$.
2. Soit H un sous-groupe d'indice fini de G. On suppose que le $\mathbb{C}[H]$-sous-module sous-jacent à V est semi-simple. Démontrer que V est semi-simple. (Indication : si W est un sous- $\mathbb{C}[G]$-module de V, on pourra regarder la projection π sur W parallèlement à un supplémentaire de W, puis regarder $\pi_G = \frac{1}{[G:H]} \sum_{gH\in G/H} g\circ\pi\circ g^{-1}$.)
3. Supposons que $Z(G)$ agit par homothéties et qu'il est d'indice fini dans G. Démontrer que V est semi-simple.

Exercice 3. Représentations d'un p-groupe sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit G un p-groupe fini. Démontrer que le seul $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[G]$-module de dimension finie et irréductible est de dimension 1 et trivial.

Exercice 4. Décomposition de Fourier finie et une motivation à la théorie des représentations

Soit G un groupe fini. On rappelle que l'on dispose de l'ensemble $\widehat{G}$ des caractères de G, c'est-à-dire des morphismes de groupes $G \to \mathbb{C}^\times$. Par commutativité de $\mathbb{C}^\times$, on a une structure naturelle de groupe abélien sur $\widehat{G}$.

Notons $\mathrm{L}_2(G)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $G \to \mathbb{C}$, muni du produit scalaire hermitien $\langle f, f \rangle = \frac{1}{|G|} f(g)\overline{f(g)}$. C'est un espace de dimension finie $|G|$. Observons que pour tout $g \in G$ on dispose d'un endomorphisme R_g de $\mathrm{L}_2(G)$ défini par $R_g(f) : h \mapsto f(hg)$ (translation à droite par g). Cet endomorphisme est unitaire : si $f, f \in \mathrm{L}_2(G)$, et si $g \in G$, alors $\langle R_g(f), R_g(f) \rangle = \langle f, f \rangle$. On remarque que $g \mapsto R_g$ définit une représentation de G, appelée *représentation régulière.*

1. Constater que pour tout $\chi \in \widehat{G}$ et tout $g \in G$, χ est vecteur propre de R_g, de valeur propre $\chi(g)$.
2. En déduire que l'ensemble $\widehat{G}$ est une famille libre et orthonormée de $\mathrm{L}_2(G)$ (c'est la propriété d'orthogonalité des caractères), et que si G est abélien c'est une base de $\mathrm{L}_2(G)$.
3. En déduire que si G est abélien, on a $|\widehat{G}| = |G|$ et pour toute fonction $f : G \to \mathbb{C}$, on a
$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle f, \chi \rangle \chi.$$
Les $\langle f, \chi \rangle$ sont appelés *coefficients de Fourier* de f, et la fonction $\widehat{f} \in \mathrm{L}_2(\widehat{G})$ définie par $\widehat{f}(\chi) = |G| \langle f, \chi \rangle$ est appelée *transformée de Fourier* de f.
4. En déduire une nouvelle preuve du fait que l'on peut prolonger tout caractère défini sur un sous-groupe d'un groupe abélien fini (on l'avait déjà montré dans le préambule du TD précédent).

Suivant Dedekind, le déterminant de G est le polynôme
$$\det G := \det \left(X_{gh^{-1}} \right)_{g,h \in G}$$
où les X_g sont des indéterminées indexées par les éléments de G. C'est donc un polynôme homogène de degré $|G|$ en les X_g, et la question posée par Dedekind est de le factoriser dans $\mathbb{C}[X_g, g \in G]$. Dans le cas où G est abélien, Dedekind montre qu'on a
$$\det G = \prod_{\chi \in \widehat{G}} \left(\sum_{g \in G} \chi(g) X_g \right).$$
On se propose de montrer ce résultat ; supposons donc G abélien. Pour $(x_g)_{g \in G} \in \mathbb{C}^G$, on regarde l'endomorphisme $u = \sum_{g \in G} x_g R_g$ de $\mathrm{L}_2(G)$.

5. Montrer que l'évaluation de $\det G$ en les x_g est égale à $\det u$.
6. Conclure.
7. En déduire une formule pour le déterminant de la matrice circulante $\left(X_{i-j \bmod n} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Pour G non abélien, $\det G$ reste divisible par le terme de droite mais a d'autres facteurs. C'est en souhaitant déterminer ces facteurs que Frobenius a inventé la théorie des représentations des groupes finis. Dans le prochain TD, on déterminera les facteurs en question.