Représentations linéaires

Travaux dirigés du 6 et du 9 janvier 2026

Exercice 1. Représentation de permutation d'une action

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal supérieur à 3. On considère la représentation de permutation $\mathbb{C}X$.

1. Vérifier que l'on a une décomposition comme $\mathbb{C}[G]$-module

$$\mathbb{C}X = \mathbb{C}\left(\sum_{x\in X} x\right) \oplus H \quad \text{avec} \quad H = \left\{ \sum_{x\in X} \lambda_x x \,\middle|\, \sum_{x\in X} \lambda_x = 0 \right\}$$

et où le premier terme est isomorphe à la représentation triviale. Vérifier également que H est engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les $(x-x')_{(x,x')\in X\times X}$.

Les sous-$\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{C}\left(\sum_{x\in X} x\right)$ et H sont G-stables. De plus, ils sont supplémentaires l'un de l'autre par l'application $\mathbb{C}$-linéaire et bijective

$$\mathbb{C}X \to \left(\mathbb{C}\left(\sum_{x\in X} x\right)\right) \times H, \quad \sum_{x\in X} \lambda_x x \mapsto \left(\frac{\sum_{x\in X}\lambda_x}{|X|}\left(\sum_{x\in X} x\right), \sum_{x\in X}\left(\lambda_x - \frac{\sum_{x'\in X}\lambda_{x'}}{|X|}\right)x\right).$$

On en déduit la décomposition de $\mathbb{C}[G]$-modules, et le premier terme est isomorphe à la représentation triviale car G agit trivialement sur $\sum_{x\in X} x$.

De plus, si nous choisissons $x_0 \in X$, alors tout élément de H s'écrit

$$\sum_{x\in X} \lambda_x x = \sum_{x\in X} \lambda_x x - \left(\sum_{x\in X} \lambda_x\right) x_0 = \sum_{x\in X} \lambda_x (x - x_0).$$

2. Soit Y un G-ensemble fini. Démontrer que le vecteur $v = \sum_{y\in Y} \lambda_y y$ appartient aux points de $\mathbb{C}Y$ fixes sous G si et seulement si la fonction $y \mapsto \lambda_y$ est G-invariante, i.e. constante sur les orbites.

Il faut écrire que

$$g\left(\sum_{y\in Y} \lambda_y y\right) = \sum_{y\in Y} \lambda_y g y = \sum_{y\in Y} \lambda_{g^{-1}y} y$$

puis identifier.

On se propose de démontrer que H est irréductible si et seulement si l'action de G sur X est 2-transitive. Dans un premier temps, supposons que l'action est 2-transitive.

3. Calculer pour tout $x \in X$ l'espace des invariants H^{G_x}.

Soit $v = \sum_{x\in X} \lambda_x x$ dans H^{G_x}. Nous utilisons la question précédente pour le G_x-ensemble X. Par 2-transitivité de l'action de G, le G_x-ensemble possède deux orbites : $\{x\}$ et $X - \{x\}$. Ceci implique que $v \in (\mathbb{C}X)^{G_x}$ s'écrit $v = \lambda x + \mu \sum_{x'\neq x} x'$. En ajoutant le fait que $v \in H$, on obtient que

$$H^{G_x} = \mathbb{C}\left(x - \frac{1}{|X|-1}\left(\sum_{x'\in X-\{x\}} x'\right)\right).$$

4. Démontrer que H est irréductible. (Indication : pour une sous-représentation non nulle H', on pourra considérer un vecteur non nul $v \in H'$ et prendre x tel que la coordonnée de v sur x est non nulle, puis essayer de créer un élément dans $H' \cap H^{G_x}$.)

Soit H' une sous-représentation non nulle et $v \in H'$ non nul. On pose x tel que la coordonnée de v sur x est non nulle. En regardant la moyenne

$$v' = \frac{1}{|G_x|}\sum_{g\in G_x} g\cdot v$$

on obtient un vecteur toujours dans H', toujours de coordonnée non nulle sur x, et invariant par G_x. Autrement dit, nous avons démontré que $H^{G_x} \subseteq H'$ puisque la question 2 démontrait que H^{G_x} était une droite.

Puisque l'action de G est transitive, on peut choisir g tel que $g \cdot x \neq x$. La différence suivante est toujours dans H' :

$$\left(x - \frac{1}{|X|-1}\left(\sum_{x' \in X - \{x\}} x'\right)\right) - g \cdot \left(x - \frac{1}{|X|-1}\left(\sum_{x' \in X - \{x\}} x'\right)\right) = \left(1 + \frac{1}{|X|-1}\right)(x - g \cdot x).$$

Ainsi, le sous-espace H' contient l'un des $x - x'$ pour $x \neq x'$, et les contient donc tous par 2-transitivité de l'action. Nous avons démontré que $H' = H$.

Supposons à présent que l'action n'est pas 2-transitive. Considérons l'action diagonale de G sur $X \times X$ et la représentation de permutation $\mathbb{C}(X \times X)$ associée.

5. Supposons que l'action de G sur X n'est pas 2-transitive. Trouver un sous-espace de dimension 3 du $\mathbb{C}(X \times X)$ sur lequel G agisse trivialement.
   Si l'action n'est pas 2-transitive, de manière générale, l'action de G sur $(X \times X) \backslash \{(x,x) \mid x \in X\}$ n'est pas transitive. Prenons O_1 et O_2 deux orbites. Alors, la diagonale $\{(x,x) \mid x \in X\}, O_1$ et O_2 sont trois orbites de $X \times X$ sous G. Les vecteurs associés aux fonctions caractéristiques de ces trois orbites sont fixes sous G, et engendrent un espace de dimension 3 puisque les orbites sont disjointes.

Pour parachever la preuve, il reste à démontrer que si H est irréductible, alors la dimension des points fixes de $\mathbb{C}(X \times X)$ sous l'action de G vaut 2. Nous commençons par énoncer un résultat un peu plus général sur les représentations de permutation.

6. Soit X, Y deux G-ensembles finis. Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme de $\mathbb{C}[G]$-modules :
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X, \mathbb{C}Y) \to \mathbb{C}(X \times Y), \quad T \mapsto \sum_{(x,y) \in X \times Y} t_{x,y}(x,y) \text{ où } T(x) = \sum_{y \in Y} t_{x,y} y.$$
   C'est une application linéaire entre espace de même dimension, autrement dit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Pour prouver qu'il est G-équivariant, calculons
$$\begin{aligned}(gT)x &= g\left(T\left(g^{-1}x\right)\right) \\ &= g\left(\sum_{y \in Y} t_{g^{-1}x,y} y\right) \\ &= \sum_{y \in Y} t_{g^{-1}x,y} gy \\ &= \sum_{y \in Y} t_{g^{-1}x,g^{-1}y} y\end{aligned}$$
   Ainsi, l'image de gT est
$$\sum_{(x,y) \in X \times Y} t_{g^{-1}x,g^{-1}y}(x,y) = \sum_{(x,y) \in X \times Y} t_{x,y}(gx,gy)$$
   qui est exactement l'image de T à laquelle on aurait appliqué g.
7. Conclure. (Indication : on pourra regarder les invariants par G de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X, \mathbb{C}X)$ et utiliser le lemme de Schur.)
   En appliquant la question précédente à $X = Y$ et passons aux invariants ce qui donne
$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X)^G = (\mathbb{C}(X \times X))^G.$$
   Le terme de droite correspond aux points fixes de $\mathbb{C}(X \times X)$ sous l'action de G. Le terme de gauche, quant à lui, correspond aux endomorphismes de $\mathbb{C}[G]$-modules de $\mathbb{C}X$. En effet, dire qu'un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire f est fixe signifie que
$$\forall g \in G, \quad gf = g \circ f \circ g^{-1} = f$$
   ce qui se reformule en post-composant par g comme
$$\forall g \in G, \quad g \circ f = f \circ g.$$
   Si H est irréductible, la représentation $\mathbb{C}X$ s'écrit en irréductibles $1 \oplus H$ avec H non isomorphe à 1 puisque $\dim H = |X| - 1 > 1$. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{C}[G]$-modules de $\mathbb{C}X$, sa matrice dans une base adaptée à la décomposition $1 \oplus H$ est de la forme
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$
   où B et C ne correspondent pas à des isomorphismes donc sont nulles par Schur, et A et D sont des homothéties encore par Schur. Les endomorphismes de $\mathbb{C}[G]$-modules de $\mathbb{C}X$ sont donc exactement les endomorphismes par blocs valant une homothétie sur 1 et sur H, i.e. de dimension 2.

8. On suppose que X est de cardinal pair. Adapter le raisonnement pour remplacer $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

   La seule chose à modifier par rapport au cas complexe reste de garantir un lemme de Schur pour la question précédente. Il est valable sur $\mathbb{R}$ pour des représentations irréductibles de dimension impaire (nous avons toujours une valeur propre réelle pour un endomorphisme linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire).

9. On suppose que G agit transitivement sur X. Adapter le raisonnement pour remplacer $\mathbb{C}$ par un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 2$ dans lequel $|G| \neq 0$.

   Schur ne pose pas problème, ce sont plutôt les calculs des premières questions qui peuvent s'avérer impossibles dans notre corps. Pour les questions 1 et 4, considérer que p ne divise pas $|G|$ car $|G| \neq 0$ dans le corps considéré, et comme l'action est transitive on a que $|G|$ divise $|X|$ (par équation aux classes) donc p ne divise pas non plus $|X|$. Pour les questions 3 et 4, on n'avait en réalité pas besoin de diviser par $|X| - 1$.

Exercice 2. Action du centre

Soit G un groupe et V un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie.

1. Supposons V irréductible. Montrer que l'action de $\mathrm{Z}(G)$ se fait par homothéties, i.e. que pour tout $z \in Z(G)$, l'élément $z \cdot -$ de $\mathrm{GL}(V)$ est dans $\mathbb{C}^\times \mathrm{id}_V$.

   L'élément $z \cdot -$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[G]$-modules. En effet, c'est un endomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et pour tout $g \in G$, l'appartenance de z au centre entraîne que

$$\forall v \in V, \quad z \cdot (g \cdot v) = (zg) \cdot v = (gz) \cdot v = g \cdot (z \cdot v)$$

   Puisque V est irréductible, ses seuls endomorphismes comme $\mathbb{C}[G]$-module sont les homothéties par Schur.

2. Soit H un sous-groupe d'indice fini de G. On suppose que le $\mathbb{C}[H]$-sous-module sous-jacent à V est semi-simple. Démontrer que V est semi-simple. (Indication : si W est un sous- $\mathbb{C}[G]$-module de V, on pourra regarder la projection π sur W parallèlement à un supplémentaire de W, puis regarder $\pi_G = \frac{1}{[G:H]} \sum_{gH \in G/H} g \circ \pi \circ g^{-1}$.)

   Nous utilisons ici des idées similaires à celle de la démonstration du théorème de Maschke. Rappelons que ce dernier repose fondamentalement sur la création d'un projecteur qui commute à l'action de G.

   Soit W un sous-$\mathbb{C}[G]$-module de V. Il faut démontrer que W possède un sous-$\mathbb{C}[G]$-module supplémentaire. En utilisant la semi-simplicité du $\mathbb{C}[H]$-module sous-jacent à V, on trouve un sous-$\mathbb{C}[H]$ module supplémentaire et la projection sur W parallèlement à ce supplémentaire fournit un projecteur sur W qui commute à l'action de H, que nous notons π.

   Si π commute à l'action de G, alors $\ker p$ est G-stable donc on a trouvé un sous-$\mathbb{C}[G]$-module supplémentaire de W.

   En général, puisque π commute à l'action de H, nous avons pour tout $h \in H$ que $h \circ \pi \circ h^{-1} = \pi$, et donc que $g \circ \pi \circ g^{-1}$ ne dépend que de gH. Il est alors possible de définir

$$\pi_G = \frac{1}{[G:H]} \sum_{gH \in G/H} g \circ \pi \circ g^{-1}.$$

   On va montrer que c'est un projecteur d'image W qui commute à l'action de G. On a $\mathrm{Im}\, \pi_G \subseteq W$ car W est G-stable. De plus, pour $x \in W$ et $g \in G$, on a $g^{-1}(x) \in W$ donc $\pi \circ g^{-1}(x) = g^{-1}(x)$ et $\pi_G(x) = \frac{1}{[G:H]} \sum_{gH \in G/H} x = x$, donc π_G est un projecteur d'image W. Enfin, pour tout $k \in G$, nous avons

$$\begin{aligned}
\pi_G \circ k &= \frac{1}{[G:H]} \sum_{gH \in G/H} g \circ \pi \circ \left(g^{-1} k\right) \\
&= \frac{1}{[G:H]} \sum_{gH \in G/H} k \circ \left(k^{-1} g\right) \circ \pi \circ \left(k^{-1} g\right)^{-1} \\
&= k \circ \left(\frac{1}{[G:H]} \sum_{gH \in G/H} \left(k^{-1} g\right) \circ \pi \circ \left(k^{-1} g\right)^{-1} \right) \\
&= k \circ \pi_G
\end{aligned}$$

   puisque $gH \mapsto k^{-1} gH$ est une bijection correctement définie des classes à gauche ; on est ramenés au cas précédent.

3. Supposons que $Z(G)$ agit par homothéties et qu'il est d'indice fini dans G. Démontrer que V est semi-simple.

   Si le centre agit par homothéties, n'importe quel sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de V est un sous-$\mathbb{C}[\mathrm{Z}(G)]$-module de V. Ceci entraîne que V est semi-simple comme représentation de $\mathrm{Z}(G)$, puis comme représentation de G en utilisant la question précédente.

Exercice 3. Représentations d'un p-groupe sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit G un p-groupe fini. Démontrer que le seul $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[G]$-module de dimension finie et irréductible est de dimension 1 et trivial.

Soit V un tel module, de dimension d. Le groupe G agit sur $V-\{0\}$, qui est de cardinal p^d-1. On rappelle que pour un p-groupe G et un G-ensemble X, nous avons par équation aux classes et formule orbite-stabilisateur

$$|X| \equiv \left|X^G\right| \bmod p$$

Ici, cela implique qu'un vecteur non nul de V est fixe par G, autrement dit que V possède une droite fixe. L'irréductibilité de V la force à coïncider avec cette droite fixe.

Exercice 4. Décomposition de Fourier finie et une motivation à la théorie des représentations

Soit G un groupe fini. On rappelle que l'on dispose de l'ensemble $\widehat{G}$ des caractères de G, c'est-à-dire des morphismes de groupes $G \to \mathbb{C}^\times$. Par commutativité de $\mathbb{C}^\times$, on a une structure naturelle de groupe abélien sur $\widehat{G}$.

Notons $\mathrm{L}_2(G)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $G \to \mathbb{C}$, muni du produit scalaire hermitien $\langle f, f\rangle = \frac{1}{|G|} f(g)\overline{f(g)}$. C'est un espace de dimension finie $|G|$. Observons que pour tout $g \in G$ on dispose d'un endomorphisme R_g de $\mathrm{L}_2(G)$ défini par $R_g(f) : h \mapsto f(hg)$ (translation à droite par g). Cet endomorphisme est unitaire : si $f, f \in \mathrm{L}_2(G)$, et si $g \in G$, alors $\langle R_g(f), R_g(f)\rangle = \langle f, f\rangle$. De plus, $g \mapsto R_g$ définit une représentation de G ; on l'appelle *représentation régulière* de G.

1. Constater que pour tout $\chi \in \widehat{G}$ et tout $g \in G$, χ est vecteur propre de R_g, de valeur propre $\chi(g)$.

   Pour $\chi \in \widehat{G}$ et $g \in G$, on a $R_g(\chi) = \chi(g)\chi$ puisque χ est un morphisme de groupes, d'où le constat.

2. En déduire que l'ensemble $\widehat{G}$ est une famille libre et orthonormée de $\mathrm{L}_2(G)$ (c'est la propriété d'orthogonalité des caractères), et que si G est abélien c'est une base de $\mathrm{L}_2(G)$.

   Montrons la première partie de la question. Pour $\chi \in \widehat{G}$ et $g \in G$ on a $\chi(g)^{|G|} = \chi(g^{|G|}) = \chi(1) = 1$ donc $\chi(g)\overline{\chi(g)} = 1$. On en déduit $\langle \chi, \chi\rangle = \frac{1}{|G|} \cdot |G| = 1$. Pour voir qu'ils sont orthogonaux, il suffit de dire que pour $\chi \neq \chi'$, il existe $g \in G$ tel que $\chi(g) \neq \chi'(g)$, et donc χ et χ' sont dans des espaces propres pour des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme unitaire R_g. Ils sont donc orthogonaux : en effet on a

   $$\langle \chi, \chi'\rangle = \langle R_g\chi, R_g\chi'\rangle = \langle \chi(g)\chi, \chi'(g)\chi'\rangle = \chi(g)\overline{\chi'(g)}\langle \chi, \chi'\rangle$$

   et donc $\langle \chi, \chi'\rangle = 0$ car $\chi(g)\overline{\chi'(g)} = \chi(g)\chi'(g)^{-1} \neq 1$. Prouvons enfin que les caractères sont linéairement indépendants. Si on a $0 = \sum_{\psi \in \widehat{G}} \mu_\psi \psi$ avec $\mu_\psi \in \mathbb{C}$ pour tout ψ, en faisant $\langle -, \chi\rangle$ on en déduit $\mu_\chi = 0$.

   Montrons la deuxième partie de la question. Si G est abélien, les endomorphismes R_g avec $g \in G$ commutent. De plus, les R_g sont diagonalisables (on peut soit invoquer la fait qu'un endomorphisme unitaire est diagonalisable, soit dire que les R_g annulent le polynôme $X^{|G|} - 1$ qui est scindé à racines simples). Ils sont donc codiagonalisables : $\mathrm{L}_2(G)$ possède une base constituée de vecteurs propres communs à tous les R_g. Si f est un tel vecteur propre, on a $R_g f = \lambda_g f$ pour tout $g \in G$, avec $\lambda_g \in \mathbb{C}^\times$ (car R_g est inversible d'inverse $R_{g^{-1}}$, ou encore car R_g est unitaire). La relation $R_{gh} = R_g \circ R_h$ entraîne $\lambda_{gh} = \lambda_g \lambda_h$ pour $g, h \in G$. Autrement dit, la fonction $g \mapsto \lambda_g$ est dans $\widehat{G}$. Enfin, on a par définition $(R_g f)(h) = f(hg)$, donc $f(hg) = \lambda_g f(h)$ pour tout $g, h \in G$, puis $f(g) = \lambda_g f(1)$. Comme $f \neq 0$, on a $f(1) \neq 0$, et quitte à remplacer f par $f/f(1)$ on peut supposer $f(1) = 1$, i.e. f est dans $\widehat{G}$.

3. En déduire que si G est abélien, on a $|\widehat{G}| = |G|$ et pour toute fonction $f : G \to \mathbb{C}$, on a

   $$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle f, \chi\rangle \chi.$$

   Les $\langle f, \chi\rangle$ sont appelés *coefficients de Fourier* de f, et la fonction $\widehat{f} \in \mathrm{L}_2(\widehat{G})$ définie par $\widehat{f}(\chi) = |G|\langle f, \chi\rangle$ est appelée *transformée de Fourier* de f.

   On a $|G| = \dim \mathrm{L}_2(G)$, et aussi $\dim \mathrm{L}_2(G) = |\widehat{G}|$ par la question précédente. Cela montre la première partie de la question. Pour la deuxième, on écrit $f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \lambda_\chi \chi$ pour certains $\lambda_\chi \in \mathbb{C}$ et on a $\langle f, \chi\rangle = \lambda_\chi$ toujours par la question précédente.

4. En déduire une nouvelle preuve du fait que l'on peut prolonger tout caractère défini sur un sous-groupe d'un groupe abélien fini (on l'avait déjà montré dans le préambule du TD précédent).

   En effet, soit G un groupe abélien et H un sous-groupe de G, considérons l'application de restriction $r : \widehat{G} \to \widehat{H}$, $\chi \mapsto \chi|_H$. C'est un morphisme de groupes. Son noyau est le sous-groupe des caractères de G triviaux sur H. Par la propriété universelle du groupe quotient G/H, si $\pi : G \to G/H$ désigne la projection canonique, alors l'application $\psi \mapsto \psi \circ \pi$ induit une bijection entre $\widehat{G/H}$ et $\ker r$, donc $|\mathrm{Im}\, r| = |\widehat{G}|/|\ker r| = |\widehat{G}|/|\widehat{G/H}|$. Par la question précédente on peut enlever et remettre les chapeaux à loisir donc $|\mathrm{Im}\, r| = |G|/|G/H| = |H| = |\widehat{H}|$, et donc r est surjective.

Suivant Dedekind, le déterminant de G est le polynôme

$$\det G := \det\left(X_{gh^{-1}}\right)_{g,h\in G}$$

où les X_g sont des indéterminées indexées par les éléments de G. C'est donc un polynôme homogène de degré $|G|$ en les X_g, et la question posée par Dedekind est de le factoriser dans $\mathbb{C}[X_g, g\in G]$. Dans le cas où G est abélien, Dedekind montre qu'on a

$$\det G = \prod_{\chi\in\widehat{G}}\left(\sum_{g\in G}\chi(g)X_g\right).$$

On se propose de montrer ce résultat ; supposons donc G abélien. Pour $(x_g)_{g\in G}\in\mathbb{C}^G$, on regarde l'endomorphisme $u=\sum_{g\in G}x_gR_g$ de $\mathrm{L}_2(G)$.

5. Montrer que l'évaluation de $\det G$ en les x_g est égale à $\det u$.

   Notons $e_h : G\to\mathbb{C}$ la fonction caractéristique du singleton $\{h\}$. Les e_h, $h\in H$, forment une base de $\mathrm{L}_2(G)$. On a $R_g(e_h)=e_{hg^{-1}}$, et donc $u(e_h)=\sum_{g\in G}x_ge_{hg^{-1}}=\sum_{g'\in G}x_{hg'^{-1}}e_{g'}$ par le changement de variable $g'=hg^{-1}$. On en déduit que $\det G$, évalué en les x_g, coïncide avec $\det u$.

6. Conclure.

   Il suffit de montrer l'égalité des deux polynômes de l'énoncé après évaluation des X_g en x_g, c'est-à-dire que

$$\det u = \prod_{\chi\in\widehat{G}}\left(\sum_{g\in G}\chi(g)x_g\right)$$

   par la question précédente. Or pour tout $\chi\in\widehat{G}$ on a par le constat de la question 1 que χ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\sum_{g\in G}\chi(g)x_g$. Puisque les caractères forment une base de $\mathrm{L}_2(G)$ (question 2), on conclut.

7. En déduire une formule pour le déterminant de la matrice circulante $\left(X_{i-j \bmod n}\right)_{1\le i,j\le n}$.

   Ce déterminant est celui du groupe abélien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il s'agit donc de déterminer les caractères sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Un tel caractère est uniquement déterminé par l'image de la classe de 1, qui est une racine n-ième de l'unité. Réciproquement, chaque racine n-ième de l'unité ζ donne un caractère $\chi_\zeta : k \bmod n\mapsto\zeta^k$ qui est bien défini, et les χ_ζ sont deux à deux distincts par évaluation on 1. On en déduit

$$\left(X_{i-j \bmod n}\right)_{1\le i,j\le n} = \prod_{\zeta\in\mu_n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\chi_\zeta(k \bmod n)X_{k \bmod n}\right) = \prod_{\zeta\in\mu_n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^kX_{k \bmod n}\right).$$

Pour G non commutatif, $\det G$ reste divisible par le terme de droite mais a d'autres facteurs. C'est en souhaitant déterminer ces facteurs que Frobenius a inventé la théorie des représentations des groupes finis. Dans le prochain TD, on déterminera les facteurs en question.