Caractères des représentations

Travaux dirigés du 13 et du 16 janvier 2026

Exercice 1. Quelques tables de caractères

Déterminer la table de caractères des groupes finis suivants. On essaiera dans chaque cas de donner une représentation irréductible qui a ce caractère.

1. Pour un entier $n \geq 2$, le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Le groupe diédral D_8.
3. Pour un premier p, le groupe $\mathrm{Aff}_p = \left\{x \mapsto ax+b \mid a \in \mathbb{F}_p^\times,\ b \in \mathbb{F}_p\right\}$ des transformations affines de $\mathbb{F}_p$ (on pourra se servir des résultats de l'exercice qui suit).

Exercice 2. Représentation de permutation d'un action, version caractères

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal supérieur à 3. Cet exercice considère la représentation de permutation $\mathbb{C}X$. Nous notons également χ_X le caractère associé. On rappelle qu'il existe une décomposition comme $\mathbb{C}[G]$-module

$$\mathbb{C}X = \mathbb{C}\left(\sum_{x\in X} x\right) \oplus H \quad \text{avec} \quad H = \left\{\sum_{x\in X} \lambda_x x \;\middle|\; \sum_{x\in X} \lambda_x = 0\right\}$$

et où le premier terme est isomorphe à la représentation triviale.

1. Soit Y un G-ensemble fini. On rappelle que $v = \sum_{y\in Y} \lambda_y y$ est fixe par G si et seulement si $y \mapsto \lambda_y$ est constante sur les orbites. Démontrer que le nombre d'orbites est égal à $\langle \chi_Y, 1\rangle$.
2. En déduire que l'action de G sur X est 2-transitive si et seulement si $\langle \chi_{(X\times X)}, 1\rangle = 2$.
3. Démontrer que χ_X est réel, puis que $\chi_{(X\times X)} = \chi_X^2$.
4. Conclure que $\langle \chi_{(X\times X)}, 1\rangle = 2$ si et seulement si $\mathbb{C}X$ est somme de deux représentations irréductibles non isomorphes, i.e. si et seulement si H est irréductible non triviale.

Exercice 3. Représentation de conjugaison

Soit G un groupe fini.

1. On fait agit G sur G par conjugaison et on note V la représentation de permutation associée. Déterminer χ_V.
2. En déduire que la somme de chaque ligne de la table des caractères de G est un entier naturel.

Exercice 4. Factorisation du déterminant d'un groupe

Revenons, comme promis, sur la question de Dedekind consistant à factoriser pour un groupe fini G le déterminant

$$\det G = \det\left(X_{gh^{-1}}\right)_{g,h\in G} \quad \text{dans} \quad \mathbb{C}\left[X_G\right] := \mathbb{C}\left[\left\{X_g\right\}_{g\in G}\right].$$

On va montrer le résultat suivant, dû à Frobenius : si $n_1, \ldots, n_h$ sont les dimensions des h caractères irréductibles de G, alors on a une décomposition

$$\det G = \prod_{i=1}^h F_i^{n_i}$$

où les F_i sont des polynômes irréductibles, homogènes de degré n_i en les X_g, et deux à deux non associés. Pour cela, associons à chaque $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie V un polynôme $\mathrm{D}_V \in \mathbb{C}\left[X_G\right]$ en posant, pour tout $|G|$-uple $x_G = \left(x_1, \ldots, x_g, \ldots\right) \in \mathbb{C}^G$,

$$\mathrm{D}_V\left(x_G\right) := \det\left(\sum_{g\in G} x_g \rho_V(g)\right).$$

Ce polynôme D_V est homogène de degré $\dim V$, et ne dépend que de la classe d'isomorphisme de V.

1. Calculer D_V si V est de dimension 1.
2. Si $V = \mathbb{C}G$ (représentation régulière), montrer $\mathrm{D}_{\mathbb{C}G} = \det G$.

Si V est un $\mathbb{C}[G]$-module, on dispose d'un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres naturel

$$\pi_U : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V),\ x \mapsto (v \mapsto x.v)$$

3. Montrer que si V est irréductible, alors π_V est surjectif, et que si $S_1, \ldots, S_h$ sont les $\mathbb{C}[G]$-modules irréductibles de G, deux à deux non isomorphes, alors le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}[G] &\to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_1) \times \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_2) \times \cdots \times \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_h) \\ x &\mapsto \left(\pi_{S_1}(x), \pi_{S_2}(x), \ldots, \pi_{S_h}(x)\right) \end{aligned}$$

   est un isomorphisme.
4. Montrer que le déterminant de la matrice $\left(\mathrm{T}_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est irréductible dans $\mathbb{C}\left[\left\{\mathrm{T}_{i,j}\right\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right]$.
5. Montrer que si U et V sont deux $\mathbb{C}[G]$-modules irréductibles, le polynôme D_U est irréductible dans $\mathbb{C}[X_G]$ et que si U et V sont non isomorphes, alors D_U et D_V ne sont pas proportionnels.
6. Conclure.