Caractères des représentations

Travaux dirigés du 13 et du 16 janvier 2026

Exercice 1. Quelques tables de caractères

Déterminer la table de caractères des groupes finis suivants. On essaiera dans chaque cas de donner une représentation irréductible qui a ce caractère.

1. Pour un entier $n \geq 2$, le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

   Puisque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est abélien, ses caractères irréductibles sont de dimension 1. Nous les connaissons : ce sont les $\chi_\zeta : \overline{k} \mapsto \zeta^k$ pour tous les $\zeta \in \mu_n(\mathbb{C})$ possibles. La table des caractères possède des colonnes indexées par les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, des lignes indexées par les racines n-ièmes de l'unité, et la valeur dans la case $(\overline{k}, \zeta)$ est ζ^k.

2. Le groupe diédral D_8.

   On peut voir D_8 comme le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par la rotation directe d'angle $\pi/2$ et la réflexion par rapport à l'axe des abscisses :

$$D_8 = \langle c, \tau \rangle \subseteq GL_2(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

On en tire, par l'inclusion $GL_2(\mathbb{R}) \subseteq GL_2(\mathbb{C})$, une représentation complexe de dimension 2 qui ne contient pas de droite stable (puisque les matrices exprimées plus haut n'ont pas de vecteur propre commun). Nous avons ainsi trouvé une représentation V irréductible de dimension 2 de D_8. Si l'intuition des représentations manquantes ne vient pas, considérer que

$$8 = \sum_{V \in \mathrm{Irr}(D_8)} (\dim V)^2$$

et qu'on a toujours au moins une représentation de dimension 1 (la triviale) donc toutes les représentations restantes sont de dimension 1 et il y en a 4 (en comptant la triviale).

Déterminons donc les caractères de dimension 1 sur D_8. On remarque que comme ils s'envoient dans un groupe abélien, ils sont triviaux sur le groupe dérivé $D(D_8)$ et donc ce sont en fait les caractères de l'abélianisé D_8^{ab}. Or on a vu au TD n°5 Ils sont triviaux sur le groupe dérivé $D(D_8)$, donc ce sont des caractères de l or on sait que c'est le sous-groupe engendré par c^2 et que le quotient (abélianisé) est le groupe de Klein (voir TD5). Les caractères de dimension 1 de D_8 sont donc les caractères du groupe de Klein. Or il y en a 4 selon les valeurs sur lesquelles ils envoient $(0,1)$ et $(1,0)$:

	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
1	1	1	1	1
$\chi_{(1,0)}$	1	-1	1	-1
$\chi_{(0,1)}$	1	1	-1	-1
$\chi_{(1,0)}\chi_{(0,1)}$	1	-1	-1	1

Cherchons maintenant les classes de conjugaison de D_8. On sait que le sous-groupe engendré par c est distingué, donc on peut commencer par regarder les classes des éléments de ce sous-groupe. Elles sont celle de 1 (qui correspond à l'identité), celle de c^2 (qui correspond à moins l'identité) et celle de c (qui correspond aux deux rotations d'ordre 4). Ensuite on sait que la projection sur l'abélianisé est constante sur les classes de conjugaison. Les trois classes de conjugaison déjà obtenues s'envoient respectivement sur $(0,0)$, $(0,0)$ et $(1,0)$. Or il y a autant de classes de conjugaison que de représentations irréductibles, c'est-à-dire 5, donc les images réciproques de $(0,1)$ et de $(1,1)$, i.e. les symétries par rapport à l'un des axes et les symétries par rapport à une diagonale, fournissent les deux classes de conjugaison manquantes et on peut dresser la table des caractères de D_8 :

$\sharp$cent	8	8	4	4	4
$\sharp$conj	1	1	2	2	2
	id	-id	c	τ	cτ
1	1	1	1	1	1
$\chi_{(1,0)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi_{(0,1)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_{(1,0)}\chi_{(0,1)}$	1	1	-1	-1	1
χ_V	2	-2	0	0	0

On remarque que $\chi_{(0,1)}$ est égal au déterminant.

3. Pour un premier p, le groupe $\mathrm{Aff}_p = \left\{x \mapsto ax+b \mid a \in \mathbb{F}_p^\times,\ b \in \mathbb{F}_p\right\}$ des transformations affines de $\mathbb{F}_p$ (on pourra se servir des résultats de l'exercice qui suit).
Le groupe est engendré par les $h_c : x \mapsto cx$ et les $\tau_d : x \mapsto x+d$. On établit pour davantage de clarté la formule de conjugaison pour ces deux types de transformations :
$$h_c \circ (x \mapsto ax+b) \circ h_c^{-1} = h_c \circ (x \mapsto ax+b) \circ h_{c^{-1}} = (x \mapsto ax+cb)$$
$$\tau_d \circ (x \mapsto ax+b) \circ \tau_d^{-1} = \tau_d \circ (x \mapsto ax+b) \circ \tau_{-d} = (x \mapsto ax+(1-a)d+b).$$
Ces deux formules illustrent que les classes de conjugaison de Aff_p sont celle de id (le singleton $\{\mathrm{id}\}$), celle de τ_1 (l'ensemble $\{\tau_b \mid b \in \mathbb{F}_p^\times\}$) et pour tout $a \neq 1$, celle de h_a (l'ensemble $\{ax+b \mid b \in \mathbb{F}_p\}$). Nous avons donc $2+(p-2) = p$ classes de conjugaison dans Aff_p.
On a une action naturelle de Aff_p sur $\mathbb{F}_p$. Si $p = 2$, on a $\mathrm{Aff}_2 = \mathbb{F}_2$ dont on connaît déjà la table de caractères. Plaçons-nous donc dans le cas $p > 2$. Alors l'action naturelle de Aff_p sur $\mathbb{F}_p$ est 2-transitive puisque $(0,1)$ est envoyé sur (b,c) par $x \mapsto (c-b)x+b$. L'exercice 2 nous donne alors l'irréductibilité de H dans la décomposition comme $\mathbb{C}[\mathrm{Aff}_p]$-module
$$\mathbb{C}\mathbb{F}_p = \mathbb{C}\left(\sum_{x\in\mathbb{F}_p} x\right) \oplus H \quad \text{avec} \quad H = \left\{\sum_{x\in\mathbb{F}_p} \lambda_x x \;\middle|\; \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \lambda_x = 0\right\},$$
où le premier terme est isomorphe à la représentation triviale. H nous fournit donc une représentation irréductible de Aff_p de dimension $p-1$. Son caractère est
$$\chi_H(g) = \chi_{\mathbb{C}\mathbb{F}_p}(g) - \chi_1(g) = |\mathrm{Fix}(g)| - 1.$$
En particulier, ce caractère vaut $p-1$ sur la classe de conjugaison de l'identité, -1 sur celle de τ_1 et 0 sur celles des h_a pour $a \neq 1$.
Comme on a p classes de conjugaison, il reste $p-1$ autres caractères de Aff_p. On sait que la somme des carrés des dimensions de ces $p-1$ caractères vaut $|\mathrm{Aff}_p| - (\dim H)^2 = p(p-1)-(p-1)^2 = p-1$, donc ils sont tous de dimension 1. Comme à la question précédente, on va quotienter Aff_p pour le rendre abélien. On remarque que le quotient de Aff_p par le sous-groupe des translations $\{\tau_b \mid b \in \mathbb{F}_p^\times\}$ est $\mathbb{F}_p^\times$, dont on sait que c'est $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$. Puisque $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ a $p-1$ caractères irréductibles (ce sont les $\chi_\zeta : a \mapsto \zeta^a$ pour $\zeta \in \mu_{p-1}(\mathbb{C})$), on a trouvé tous les caractères manquants de Aff_p et on obtient la table suivante :

$\sharp$cent	$p(p-1)$	p	$p-1$
$\sharp$conj	1	$p-1$	p
	id	τ_1	h_a, $a \in \mathbb{F}_p^\times - \{1\}$
χ_ζ, $\zeta \in \mu_{p-1}(\mathbb{C})$	1	1	ζ^a
χ_H	$p-1$	-1	0

Exercice 2. Représentation de permutation d'un action, version caractères

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal supérieur à 3. Cet exercice considère la représentation de permutation $\mathbb{C}X$. Nous notons également χ_X le caractère associé. On rappelle qu'il existe une décomposition comme $\mathbb{C}[G]$-module
$$\mathbb{C}X = \mathbb{C}\left(\sum_{x\in X} x\right) \oplus H \quad \text{avec} \quad H = \left\{\sum_{x\in X} \lambda_x x \;\middle|\; \sum_{x\in X} \lambda_x = 0\right\}$$
et où le premier terme est isomorphe à la représentation triviale.

1. Soit Y un G-ensemble fini. On rappelle que $v = \sum_{y\in Y} \lambda_y y$ est fixe par G si et seulement si $y \mapsto \lambda_y$ est constante sur les orbites. Démontrer que le nombre d'orbites est égal à $\langle \chi_Y, 1\rangle$.
Les indicatrices de orbites forment une base de $(\mathbb{C}Y)^G$. De plus, cet espaces d'invariants $(\mathbb{C}Y)^G$ est la composante isotypique de la représentation triviale $\mathbf{1}$ dans $\mathbb{C}Y$. Or, nous savons que pour tout $\mathbb{C}[G]$-module irréductible de dimension finie V, de caractère χ, nous avons
$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}Y[V]) = \langle \chi_Y, \chi\rangle \dim_{\mathbb{C}} V,$$
où $\mathbb{C}Y[V]$ désigne la composante isotypique de V dans $\mathbb{C}Y$. Ceci implique pour $V = \mathbf{1}$ que la dimension des vecteurs fixes est exactement le produit scalaire annoncé.

2. En déduire que l'action de G sur X est 2-transitive si et seulement si $\langle \chi_{(X\times X)}, 1\rangle = 2$.
   Sur $X \times X$, nous avons deux sous-ensembles stables par G : la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ et son complémentaire. La diagonale est une orbite de $X \times X$ sous G si et seulement si l'action de G sur X est transitive. Le complémentaire $(X \times X) - \Delta$ est une orbite si et seulement si l'action de G sur X est 2-transitive. Ainsi, l'action de G sur X est 2-transitive si et seulement si $X \times X$ possède deux orbites sous G. On conclut avec la question précédente.
3. Démontrer que χ_X est réel, puis que $\chi_{(X\times X)} = \chi_X^2$.
   Pour tout $g \in G$, nous avons $\chi_X(g) = \left|\mathrm{Fix}_X(g)\right|$ qui est réel. De plus, les points fixes par g dans $X\times X$ sont exactement les couples formés de deux points fixes par g dans X. Par conséquent
   $$\chi_{(X\times X)}(g) = \left|\mathrm{Fix}_X(g)\right|^2 = \chi_X(g)^2$$
4. Conclure que $\langle \chi_{(X\times X)}, 1\rangle = 2$ si et seulement si $\mathbb{C}X$ est somme de deux représentations irréductibles non isomorphes, i.e. si et seulement si H est irréductible non triviale.
   Il faut écrire en utilisant que χ_X est réel
   $$\begin{aligned}\langle \chi_{(X\times X)}, 1\rangle &= \langle \chi_X^2, 1\rangle \\ &= \langle \chi_X, \overline{\chi_X}\rangle \\ &= \langle \chi_X, \chi_X\rangle\end{aligned}$$
   et ce dernier vaut la somme des carrés des multiplicités des représentations irréductibles de G dans $\mathbb{C}X$. Cette somme ne peut valoir 2 qui si $\mathbb{C}X$ est somme de deux représentations irréductibles non isomorphes. Puisque $\mathbb{C}X$ se décompose déjà comme $\mathbf{1} \oplus H$, cette condition équivaut au fait que H est irréductible non triviale.

※ Exercice 3. Représentation de conjugaison

Soit G un groupe fini.

1. On fait agit G sur G par conjugaison et on note V la représentation de permutation associée. Déterminer χ_V.
   Pour tout élément $g \in G$, la valeur $\chi_V(g)$ vaut le nombre de points fixes de G par conjugaison de g, autrement dit le cardinal du centralisateur $\left|\mathrm{C}_G(g)\right|$.
2. En déduire que la somme de chaque ligne de la table des caractères de G est un entier naturel.
   Soit W une représentation irréductible de G et χ le caractère associé. Nous cherchons à prouver que le complexe suivant est un entier naturel :
   $$\sum_{O\in \mathrm{Conj}(G)} \chi(O)$$
   où $\mathrm{Conj}(G)$ est l'ensemble des classes de conjugaison de G. Remarquons que $\left|\mathrm{C}_G(g)\right|$ ne dépend que de la classe de conjugaison de g ; nous écrirons ainsi sans ambiguïté $|\mathrm{C}_G|(O)$. Nous pouvons écrire
   $$\begin{aligned}\sum_{O\in \mathrm{Conj}(G)} \chi(O) &= \frac{1}{|G|}\sum_{O\in \mathrm{Conj}(G)} |G|\chi(O) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{O\in \mathrm{Conj}(G)} |O||\mathrm{C}_G|(O)\chi(O) \quad \text{(formule orbite-stabilisateur)} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{O\in \mathrm{Conj}(G)} \left(\sum_{g\in O} \left|\mathrm{C}_G(g)\right|\chi(g)\right) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g)\chi(g) \\ &= \langle \chi, \overline{\chi_V}\rangle \\ &= \langle \chi, \chi_V\rangle\end{aligned}$$
   et la dernière égalité illustre que notre complexe est un entier naturel (la multiplicité de W dans V).

Exercice 4. Factorisation du déterminant d'un groupe

Revenons, comme promis, sur la question de Dedekind consistant à factoriser pour un groupe fini G le déterminant

$$\det G = \det\left(X_{gh^{-1}}\right)_{g,h\in G} \quad \text{dans} \quad \mathbb{C}[X_G] := \mathbb{C}\left[\left\{X_g\right\}_{g\in G}\right].$$

On va montrer le résultat suivant, dû à Frobenius : si $n_1, \dots, n_h$ sont les dimensions des h caractères irréductibles de G, alors on a une décomposition

$$\det G = \prod_{i=1}^{h} F_i^{n_i}$$

où les F_i sont des polynômes irréductibles, homogènes de degré n_i en les X_g, et deux à deux non associés. Pour cela, associons à chaque $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie V un polynôme $\mathrm{D}_V \in \mathbb{C}[X_G]$ en posant, pour tout $|G|$-uple $x_G = (x_1, \dots, x_g, \dots) \in \mathbb{C}^G$,

$$\mathrm{D}_V(x_G) := \det\left(\sum_{g\in G} x_g \rho_V(g)\right).$$

Ce polynôme D_V est homogène de degré $\dim V$, et ne dépend que de la classe d'isomorphisme de V.

1. Calculer D_V si V est de dimension 1.
   Si D_V si V est de dimension 1, de caractère de degré 1 associé $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$, on a $\mathrm{D}_V = \sum_{g\in G} \chi(g)\mathrm{X}_g$.
2. Si $V = \mathbb{C}G$ (représentation régulière), montrer $\mathrm{D}_{\mathbb{C}G} = \det G$.
   En effet, soit $z = \sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$. Pout $h \in G \subseteq \mathbb{C}G$ on constate $zh = \sum_{g\in G} x_g gh = \sum_{g\in G} x_{gh^{-1}} g$, de sorte que la matrice de la multiplication par z dans la base canonique de $\mathbb{C}G$ est $\left(x_{gh^{-1}}\right)_{g,h\in G}$.

Si V est un $\mathbb{C}[G]$-module, on dispose d'un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres naturel

$$\pi_U : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V),\ x \mapsto (v \mapsto x.v)$$

3. Montrer que si V est irréductible, alors π_V est surjectif, et que si $S_1, \dots, S_h$ sont les $\mathbb{C}[G]$-modules irréductibles de G, deux à deux non isomorphes, alors le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{C}[G] &\to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_1) \times \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_2) \times \cdots \times \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_h)\\ x &\mapsto \left(\pi_{S_1}(x), \pi_{S_2}(x), \dots, \pi_{S_h}(x)\right)\end{aligned}$$

   est un isomorphisme.
   Le morphisme π est injectif. En effet, si on a $z \in \mathbb{C}[G]$ avec $\pi(z) = 0$, alors l'élément z agit par 0 dans tout $\mathbb{C}[G]$-module irréductible, donc par Maschke dans tout $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie. Dans le cas de la représentation régulière, on a $z.1 = z$ et donc $z = 0$ d'où l'injectivité de π. Mais on a

$$\dim \mathbb{C}G = \sum_{i=1}^{h} (\dim S_i)^2 = \dim \prod_{i=1}^{h} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i),$$

   de sorte que l'injectivité de π implique sa bijectivité, d'où la deuxième partie de la question. En particulier, pour tout $i = 1, \dots, h$ on a $\mathrm{Im}\,\pi_i = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_i)$, ce qui démontre la première partie de la question.
4. Montrer que le déterminant de la matrice $\left(\mathrm{T}_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est irréductible dans $\mathbb{C}\left[\left\{\mathrm{T}_{i,j}\right\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right]$.
   On note $D = \det\left(\mathrm{T}_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Supposons que l'on ait une décomposition $D = PQ$ dans $\mathbb{C}\left[\left\{\mathrm{T}_{i,j}\right\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right]$. En développant par rapport à la première ligne, on obtient que D est de degré 1 en $T_{1,1}$. Donc un des polynômes P, Q est de degré 1 en $T_{1,1}$ et l'autre de degré 0 en $T_{1,1}$. De même, pour tous i et j, un des polynômes P, Q est de degré 1 en $X_{i,j}$ et l'autre de degré 0 en $X_{i,j}$. Supposons pour fixer les idées que P est de degré 1 en $X_{i,i}$ pour un i que l'on fixe. Alors Q n'implique aucun des $X_{i,j}$ ni des $X_{j,i}$. Sinon, D aurait des termes en $X_{i,i}X_{i,j}$ ou $X_{i,i}X_{j,i}$, ce qui est impossible par définition du déterminant. Si Q contient un $X_{j,j}$, on obtient par le même raisonnement que P ne peut contenir aucun $X_{k,j}$ ni aucun $X_{j,k}$; contradiction car alors $X_{i,j}$ et $X_{j,i}$ ne peuvent être ni dans P ni dans Q. On en déduit que P contient tous les $X_{j,j}$, puis tous les $X_{j,k}$ et $X_{k,j}$, et donc Q est constant.
5. Montrer que si U et V sont deux $\mathbb{C}[G]$-modules irréductibles, le polynôme D_U est irréductible dans $\mathbb{C}[X_G]$ et que si U et V sont non isomorphes, alors D_U et D_V ne sont pas proportionnels.
   Montrons d'abord la deuxième partie de la question. Soient U et V deux $\mathbb{C}[G]$-modules irréductibles non isomorphes. D'après la deuxième partie de la question 3, il existe $z \in \mathbb{C}[G]$ tel que $\pi_U(z) = \mathrm{Id}_U$ et $\pi_V(z) = 0$. Écrivons $z = \sum_{g\in G} x_g g$ et posons $x = \left(x_g\right)_{g\in G} \in \mathbb{C}^G$. Alors on a $\mathrm{D}_U(x) = \det \pi_U(x) = 1$ et $\mathrm{D}_V(x) = \det \pi_V(x) = 0$. Cela montre la deuxième partie de la question.
   Montrons maintenant la première partie de la question. On fixe une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de V et on pose

$$\mathrm{Mat}_e\, \rho_V(g) = \left(m_{i,j}(g)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

Les n^2 formes linéaires

$$\mathrm{L}_{i,j} : \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}, (x_g)_{g\in G} \mapsto \sum_{g\in G} x_g m_{i,j}(g)$$

sont linéairement indépendantes d'après la première partie de la question 3. On les complète arbitrairement en une base du dual de $\mathbb{C}^G$, en ajoutant $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_r$ (avec $r = |G| - n^2$). Dans ces nouvelles variables linéaires, on a donc $\mathbb{C}[X_G] = \mathbb{C}\left[\left\{\mathrm{L}_{i,j}\right\}_{i,j}\right][\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_r]$. Mais par définition, on a aussi

$$\mathrm{D}_V = \det\left(\left(\mathrm{L}_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)$$

On conclut par la question précédente.

6. Conclure.

On a une décomposition

$$\mathbb{C}G \simeq \oplus_{i=1}^h S_i^{\oplus n_i}$$

où S_i est un $\mathbb{C}[G]$-module irréductible de dimension n_i, non isomorphe à S_j pour $j \neq i$. On en déduit

$$\det G = \prod_{i=1}^h \mathrm{D}_{S_i}^{n_i}.$$

Posant $F_i = \mathrm{D}_{S_i}$, le résultat découle de la question précédente.