Généralités sur les groupes

Travaux dirigés du 16 et du 19 septembre 2025

On corrigera en priorité les exercices marqués d'un ≪ ✠ ≫, dans l'ordre.

✠ Exercice 1. Quelques cas où l'existence des inverses est automatique

1. *Quand les monoïdes sont des groupes.* On rappelle qu'un *monoïde* est un ensemble M muni d'une loi de composition interne associative $*$ et d'un élément neutre e.
   (a) Montrer qu'un monoïde M dont tout élément possède un inverse à gauche est un groupe.
   (b) On dit qu'un monoïde M est *simplifiable à gauche* si pour tous $x, y, z \in M$, on a
   $$x * y = x * z \Longrightarrow y = z\ .$$
   Montrer que l'on ne peut pas généraliser le résultat du (a) aux monoïdes simplifiables à gauche.
   (c) Montrer que c'est quand même possible si on suppose ces monoïdes finis.
   (d) Que se passe-t-il à droite ?
2. *Quand les anneaux sont des corps gauches.* On rappelle qu'un anneau A est dit *intègre* si $A \neq 0$ et pour tous $a, b \in A$ on a
   $$ab = 0 \Longrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)\ .$$
   Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps gauche.
3. *Quand les sous-ensembles sont des sous-groupes.* Montrer que si G est un groupe, et si H est une partie finie non vide de G stable par la loi de G, alors H est un sous-groupe de G. Montrer que l'hypothèse de finitude de H est nécessaire.

Exercice 2. Monoïdes monogènes

Soient $n \geq 1$ un entier et $F(n)$ le monoïde des fonctions de $[\![0, n-1]\!]$ dans lui-même pour la composition $\circ$. Pour $0 \leq i < n$, on note $f_i \in F(n)$ la fonction définie par $f_i(j) = j + 1$ pour $0 \leq j < n - 1$ et $f_i(n-1) = i$.

1. On pose $M_i = \langle f_i \rangle$. Montrer $|M_i| = n$.
2. (suite) Montrer $M_i \simeq M_j \Longleftrightarrow i = j$.
3. Montrer qu'à isomorphisme près, il existe exactement n monoïdes monogènes de cardinal n.

Exercice 3. Monoïdes de cardinal ≤ 3

1. Montrer qu'à isomorphisme près, il existe exactement 2 monoïdes de cardinal 2, à savoir $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \times)$.
2. Soit M un monoïde à 3 éléments. Montrer que soit M est monogène, soit on a $M \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \times)$, soit on a $x^2 = x$ pour tout $x \in M$.
3. En déduire qu'à isomorphisme près, il existe exactement 7 monoïdes de cardinal 3.

Exercice 4. L'argument de Eckmann-Hilton

Soit X un ensemble muni de deux lois unitaires $\circ$ et $\star$ avec $(x \circ y) \star (z \circ t) = (x \star z) \circ (y \star t)$ pour tout $x, y, z, t \in X$.

Montrer $\circ = \star$, et que ces lois sont associatives et commutatives.

✠ Exercice 5. Un cas où la commutativité est automatique

On dit que l'*exposant* d'un groupe G est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que pour tout $x \in G$, on ait $x^n = 1$. Montrer qu'un groupe d'exposant 2 est abélien.

✠ Exercice 6. Des exemples concrets

1. Décrire les sous-groupes de $\mathbb{Z}$, puis les sous-groupes non denses de $\mathbb{R}$.
2. Décrire les morphismes de groupes surjectifs de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$.

✠ Exercice 7. Produit de sous-groupes

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. On considère l'application

$$f : H \times K \to G, \quad (h, k) \mapsto hk.$$

On note $\operatorname{Im} f = HK$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur H et K pour que f soit respectivement : un morphisme de groupes ; injective ; un isomorphisme de groupes.
2. On suppose H et K finis. Montrer $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

Exercice 8. Propriété universelle du produit

Soit G_1 et G_2 des groupes. Pour tout groupe P muni de morphismes $\pi_1 : P \to G_1$ et $\pi_2 : P \to G_2$, on peut considérer la propriété suivante, que l'on notera $\mathscr{P}(P;\pi_1,\pi_2)$:

≪ Pour tout groupe G et tous morphismes $f_1 : G \to G_1$ et $f_2 : G \to G_2$, il existe un unique morphisme $f : G \to P$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ G_1 & P \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & G_2 \end{tikzcd}$$

commute. ≫

1. Se convaincre que pour $i \in \{1,2\}$, la projection canonique $\mathrm{pr}_i : G_1 \times G_2 \to G_i,\ (g_1, g_2) \mapsto g_i$ est un morphisme de groupes, puis que $\mathscr{P}(G_1 \times G_2; \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$ est vraie.
2. Soit P (resp. P') un groupe muni de morphismes $\pi_i : P \to G_i$ (resp. $\pi'_i : P' \to G_i$) pour $i \in \{1,2\}$. On suppose que $\mathscr{P}(P;\pi_1,\pi_2)$ et $\mathscr{P}(P';\pi'_1,\pi'_2)$ sont vraies. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme $\rho : P' \to P$ compatible avec les projections, c'est-à-dire tel que $\pi'_i = \pi_i \circ \rho$ pour $i \in \{1,2\}$.