Autour du groupe symétrique

Travaux dirigés du 7 et du 10 octobre 2025

Préambule. Actions k-transitives

Soient G un groupe agissant sur un ensemble X, $k \geqslant 1$ un entier, et $x \in X$.

1. Montrer que G agit $(k+1)$-transitivement sur X si, et seulement si, G agit transitivement sur X et G_x agit k-transitivement sur $X - \{x\}$.
2. En déduire que si G est fini et agit k-transitivement sur X, alors l'entier $|X|(|X|-1)(|X|-2)\cdots(|X|-k+1)$ divise $|G|$.

Exercice 1. Quelques faits sur S_n

1. Montrer que le centre de S_n est trivial pour $n > 2$.
2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer, sans utiliser la classification des sous-groupes distingués de S_n, qu'il existe un unique morphisme non trivial $\mathrm{S}_n \to \{\pm 1\}$. En déduire que A_n est le seul sous-groupe d'indice 2 de S_n.
3. Montrer que si un sous-groupe $G \subseteq \mathrm{S}_n$ agit $(n-2)$-transitivement sur $\{1, \dots, n\}$, alors on a $G = \mathrm{A}_n$ ou $G = \mathrm{S}_n$.

Exercice 2. Quelques contre-exemples avec A_4

1. Montrer que A_4 ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6.
2. Soient G, H, K trois groupes avec $H \lhd K$ et $K \lhd G$. En examinant A_4, vérifier que l'on n'a pas nécessairement $H \lhd G$. Montrer que si H est *caractéristique* dans K (c'est-à-dire stable par tout automorphisme de K), alors on a $H \lhd G$.

Exercice 3. Classes de conjugaison de A_n

Soit $\sigma \in \mathrm{A}_n$. On dira que σ est *non spécial* s'il existe $\tau \in \mathrm{S}_n$ avec $\tau\sigma = \sigma\tau$ et $\varepsilon(\tau) = -1$, et qu'il est *spécial* sinon.

1. Montrer que σ est non spécial si, et seulement si, il existe une σ-orbite de cardinal pair ou deux σ-orbites de même cardinal impair.
2. Montrer que si σ est non spécial, on a $\mathrm{Conj}_{\mathrm{S}_n}(\sigma) = \mathrm{Conj}_{\mathrm{A}_n}(\sigma)$.
3. On suppose σ spécial et $s \in \mathrm{S}_n - \mathrm{A}_n$. Montrer $\mathrm{Conj}_{S_n}(\sigma) = \mathrm{Conj}_{A_n}(\sigma) \coprod \mathrm{Conj}_{A_n}\left(s\sigma s^{-1}\right)$.
4. En déduire des représentants des classes de conjugaison de A_4 et A_5.

Exercice 4. Une présentation de S_n

Pour $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant i \leqslant j < n$ on définit $m_{i,j}$ en posant $m_{i,i} = 2$, $m_{i,j} = 3$ pour $j = i+1$, et $m_{i,j} = 0$ sinon. Soit G un groupe engendré par des éléments $s_1, \dots, s_{n-1}$ vérifiant $\left(s_i s_j\right)^{m_{i,j}} = 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant j < n$.

1. Vérifier que pour tout $1 \leqslant i, j < n$ on a $s_i^2 = 1$, $s_i s_j = s_j s_i$ pour $|j-i| > 1$, ainsi que $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ (relation de tresse) pour $i < n-1$.
2. On pose $f_i = s_i s_{i+1} \cdots s_n$ pour $1 \leqslant i < n$, et $f_n = 1$. Montrer que pour tout $g \in G$, il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ et $h \in \langle s_1, \dots, s_{n-2}\rangle$ vérifiant $g = f_i h$.
3. En déduire que G est fini de cardinal $\leqslant n!$.
4. Montrer $\mathrm{S}_n \simeq \langle s_1, \dots, s_{n-1} \,|\, \left(s_i s_j\right)^{m_{i,j}} = 1, 1 \leqslant i \leqslant j < n\rangle$.

Exercice 5. Taquin et serpents (A. F. Archer, "A modern treatment of the 15-puzzle" (1999))

Le taquin est un jeu constitué d'un carré 4×4, lui-même constitué de 15 cases 1×1 mobiles numérotées de 1 à 15, et d'une case vide. Partant de la configuration initiale E_0 indiquée à gauche ci-dessous, et en déplaçant d'une case autant de fois qu'on le souhaite la case vide, on se trouve donc dans un état du jeu comme l'état E_1 représenté juste à droite de E_0. On se propose d'étudier les états possibles du jeu et de déterminer si A, B et C ci-dessous en font partie.

E_0

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

E_1

5	1	2	3
6	10	7	4
9		11	8
13	14	15	12

A

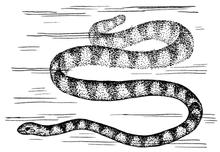
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

B

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

C

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	15	14



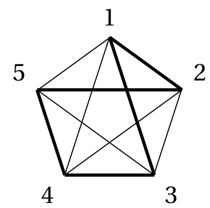
Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des états possibles du taquin. À chaque état $E \in \mathscr{E}$ on associe son serpent $s(E)$ qui est la suite $(x_1, x_2, \dots, x_{15})$ de tous les nombres de 1 à 15 obtenue en lisant le taquin dans l'ordre indiqué par le serpent de mer ci-contre et en omettant la case vide. Par exemple, le serpent de l'état initial $E_0 \in \mathscr{E}$ du jeu est la suite $s(E_0) = (1,2,3,4,8,7,6,5,9,10,11,12,15,14,13)$. Pour $E \in \mathscr{E}$ et $s(E) = (x_1, x_2, \dots, x_{15})$, on note aussi $\sigma(E)$ l'unique élément de S_{15} tel que $x_i = \sigma(i)$.

1. Soient $E, F \in \mathscr{E}$ tels que F est obtenu à partir de E et d'un seul déplacement de la case vide. Vérifier que l'élément $\sigma(E)^{-1}\sigma(F) \in \mathrm{S}_{15}$ ne dépend que des positions originale et finale de la case vide (et non de E), et donner son type.
2. *(Problème de Loyd)* Le dessin A est-il un état du taquin ?
3. Déterminer $\left\{\sigma(E)^{-1}\sigma(F) \mid E, F \in \mathscr{E}\right\} \subseteq \mathrm{S}_{15}$. En déduire quel dessin, parmi B et C, est un état du taquin.
4. Montrer $|\mathscr{E}| = \frac{16!}{2} = 10\,461\,394\,944\,000$.

Exercice 6. Une action exotique de S_5

Dans cet exercice, on va décrire de deux manières différentes une action transitive de S_5 sur un ensemble à 6 éléments.

On commence par le point de vue développé dans l'article "A description of the outer automorphism of S_6 and the invariants of 6 points in the projective space" publié en 2007 par Howard, Millson, Snowden et Vakil. Soit $\mathscr{G}$ le graphe non orienté et complet de sommets $\{1,2,3,4,5\}$. Ce graphe a exactement 10 arêtes.



1. Un *circuit hamiltonien* sur $\mathscr{G}$ est un circuit de longueur 5 passant une et une seule fois par chaque sommet (voir ci-contre, en gras). Montrer qu'il existe exactement 6 partitions des 10 arêtes de $\mathscr{G}$ en réunion disjointe de deux circuits hamiltoniens.
2. Notons X l'ensemble de ces 6 partitions de $\mathscr{G}$ (on les appelle les 6 *pentagones mystiques*). L'action naturelle de S_5 sur $\{1,\dots,5\}$ induit une action de S_5 sur X. Montrer que cette action est transitive.

Donnons maintenant une autre description de l'action ci-dessus. Soit Y l'ensemble des sous-groupes d'ordre 5 de S_5.

3. Montrer que $|Y| = 6$ et que l'action de S_5 sur Y, via $(\sigma, H) \mapsto \sigma H \sigma^{-1}$, est transitive.
4. Tout sous-groupe $H = \langle c \rangle$ d'ordre 5 de S_5 définit un unique pentagone $\mathrm{p}(H)$ donné par les deux chemins non orientés $c^{\pm 1}$ et $c^{\pm 2}$. Montrer que l'application $\mathrm{p} : Y \to X, H \mapsto \mathrm{p}(H)$ est un isomorphisme d'action.

On va voir avec cette deuxième description que l'action est fidèle et 3-transitive. Soit G le sous-groupe de S_6 engendré par $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ et $(1\ 2)(3\ 6)(5\ 4)$.

5. Montrer que l'action naturelle de G sur $\{1,2,\dots,6\}$ est 3-transitive.
6. En déduire que l'action de S_5 sur les pentagones mystiques est fidèle, et que l'on a $G \simeq \mathrm{S}_5$.

Cette action est à l'origine de nombreuses autres constructions autour de la géométrie des ensembles de petit cardinal. Elle permet notamment de construire un automorphisme non intérieur de S_6. Elle est très spécifique : on peut montrer qu'elle est unique à isomorphisme près, que S_n n'admet pas d'action transitive sur un ensemble à $n+1$ éléments pour $n \neq 5$, et que tout automorphisme de S_n est intérieur pour $n \neq 6$.

Exercice 7. Le groupe de Mathieu M_{11} (J. Conway, "Three lectures on exceptional groups" (1993))

Soit M_{11} le sous-groupe de A_{11} engendré par les éléments $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11)$ et $b = (3\ 7\ 11\ 8)(4\ 10\ 5\ 6)$.

1. Montrer que M_{11} possède des éléments de type 11, 128, 15^2, $1^2 3^3$ et $1^3 4^2$. Pour cela, on pourra vérifier les égalités $b^2 a = (1\ 2\ 11)(3\ 5\ 10)(6\ 8\ 9)$, $aba^{-1}b^{-1} = (1\ 9\ 4\ 7\ 3)(5\ 10\ 8\ 6\ 11)$ et $aba = (1\ 3\ 11\ 2\ 8\ 10\ 9\ 6)(4\ 7)$.
2. En déduire (sans calcul) que M_{11} agit 3-transitivement sur $\{1,\dots,11\}$.

Soit $E = \{1,\dots,11\}$. Pour $F \subseteq E$ on pose $G_F = \left\{g \in \mathrm{M}_{11} \mid g(F) = F\right\}$.

3. Montrer (sans calcul) que si $F \subseteq E$ a trois éléments, alors G_F agit transitivement sur $E - F$. En déduire que M_{11} agit transitivement sur l'ensemble des parties à 4 éléments de E.
4. Soient $F \subseteq E$ avec $|F| = 4$, et $f : G_F \to \mathrm{S}_F$ le morphisme naturel. Montrer (sans calcul) que $f(G_F)$ contient un 4-cycle et un 3-cycle. En déduire $f(G_F) = \mathrm{S}_F$.
5. Montrer que M_{11} agit 4-transitivement sur $\{1,2,\dots,11\}$, puis montrer que $|\mathrm{M}_{11}|$ est multiple de $\frac{11!}{7!} = 7\,920$.

Mathieu a démontré l'égalité $|\mathrm{M}_{11}| = 7\,920$ et que M_{11} est simple : c'est le plus petit des groupes simples dits sporadiques. Mathieu a en fait construit explicitement, entre 1861 et 1873, 5 groupes simples $\mathrm{M}_n \subseteq \mathrm{S}_n$, pour $n = 11$, 12, 22, 23 et 24. La détermination de leur cardinal fut un temps controversée, ou même simplement le fait qu'ils ne sont pas égaux à A_n.