

Produits semi-directs, suites exactes et groupes dérivés

Travaux dirigés du 14 et du 17 octobre 2025

✂ Exercice 1. Tout automorphisme est intérieur (quitte à agrandir le groupe)

Soient G un groupe et $f \in \text{Aut}(G)$. Montrer qu'il existe un groupe G' , un morphisme injectif $i : G \rightarrow G'$ et un élément $x \in G'$, tels que pour tout $g \in G$ on a $i(f(g)) = xi(g)x^{-1}$.

✂ Exercice 2. Fin de la discussion sur S_4

Montrer que $S_4 = K_4 \rtimes S$, où S est un sous-groupe de S_4 isomorphe à S_3 . En déduire que pour tout isomorphisme $\alpha : S_3 \xrightarrow{\sim} \text{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2) = \text{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on a $S_4 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes_{\alpha} S_3$.

Exercice 3. Le produit semi-direct de deux groupes dépend du choix de morphisme

Si un entier n est le produit de deux nombres premiers impairs distincts p et q , il existe (par l'isomorphisme chinois) $a, b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ avec $a \equiv 1 [p]$, $a \equiv -1 [q]$, $b \equiv -1 [p]$ et $b \equiv 1 [q]$. Alors le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ contient exactement quatre racines carrées de l'unité : 1 , a , b et $ab = -1$. Si s est l'une de ces racines carrées de l'unité, il existe un unique morphisme $\alpha : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (qui dépend de s) envoyant $\bar{1}$ sur l'automorphisme $x \mapsto sx$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; on pose alors $G_s := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Déterminer le centre des groupes G_s et en déduire qu'ils sont non isomorphes.

Exercice 4. Autour du groupe diédral

Dans cet exercice on étend la définition de D_{2n} à $1 \leq n \leq 2$ en posant $D_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $D_4 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Avec cette définition, on constate que l'on a $D_{2n} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout entier $n \geq 1$, où la morphisme $\alpha : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est tel que $\alpha_{\bar{k}}(x) = (-1)^k x$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme vu en cours dans le cas $n \geq 3$.

1. Soient $m, n \geq 1$ des entiers. Montrer que D_{2m} possède un sous-groupe isomorphe à D_{2n} si et seulement si $n \mid m$.
2. Montrer $D_{2n} \simeq \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^n = 1 \rangle$ pour tout $n \geq 1$.
3. (*Groupe diédral infini*) Soient s et t les isométries de la droite euclidienne $\mathbb{R}$ définies par $x \mapsto -x$ et $x \mapsto 1 - x$, et $G := \langle s, t \rangle \subseteq \text{Iso}(\mathbb{R})$. Montrer que $H := \langle st \rangle$ est un sous-groupe distingué de G isomorphe à $\mathbb{Z}$, et que la conjugaison par s induit l'automorphisme $x \mapsto x^{-1}$ de H . En déduire $G \simeq \mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\alpha : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$ envoie $\bar{1}$ sur $x \mapsto -x$.

✂ Exercice 5. Calculs de cardinaux

1. On se donne $n \geq 1$ et une suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \longrightarrow 1.$$

On suppose que les G_i sont finis pour tout i . Montrer $\prod_{i=1}^n |G_i|^{(-1)^i} = 1$.

2. Soient G un groupe abélien fini et $n \geq 1$ un entier. On a les sous-groupes $G[n] = \{g \in G \mid g^n = 1\}$ (n -torsion) et $G^{(n)} = \{g^n \mid g \in G\}$ de G . Montrer $|G[n]| = |G/G^{(n)}|$ (sans utiliser le théorème de structure).

✂ Exercice 6. Manipulations de groupes dérivés

Soit G un groupe.

1. Montrer que tout sous-groupe de G contenant $D(G)$ est distingué dans G .
2. Déterminer le groupe dérivé et l'abélianisé de H_8 . Faire de même avec D_{2n} .

Exercice 7. Le théorème de Lie-Kolchin

Soient $n \geq 1$ et G un sous-groupe résoluble connexe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. On se propose de montrer que G est co-trigonalisable. On raisonne par récurrence sur $n + r$ où r est la classe de résolubilité de G .

1. Montrer que $D(G)$ est connexe.
2. Montrer que $D(G)$ est inclus dans $\text{SL}_n(\mathbb{C})$.
3. Conclure si $D(G)$ est constitué d'homothéties.
4. Conclure s'il existe un sous-espace $\{0\} \subsetneq W \subsetneq \mathbb{C}^n$ avec $g(W) \subseteq W$ pour tout $g \in G$.

Pour tout groupe Γ , on note $\widehat{\Gamma} := \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ et on appelle *caractères* de Γ les éléments de $\widehat{\Gamma}$. On pose $\mathcal{C} = \widehat{D(G)}$. Pour un caractère $\chi \in \mathcal{C}$ on considère le sous-espace vectoriel

$$V_{\chi} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid g(v) = \chi(g)v, \forall g \in D(G)\}.$$

On pose aussi $S = \{\chi \in \mathcal{C} \mid V_{\chi} \neq 0\}$ et $V = \sum_{\chi \in S} V_{\chi}$.

5. Montrer $S \neq \emptyset$.
6. Montrer $V = \bigoplus_{\chi \in S} V_\chi$.
7. En déduire que S est fini.

Pour $g \in G$ et $\chi \in \mathcal{C}$ on pose ${}^g\chi : D(G) \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $x \mapsto \chi(g^{-1}xg)$.

8. Montrer que $(g, \chi) \mapsto {}^g\chi$ est une action de G sur $\mathcal{C}$, et vérifier $g(V_\chi) = V_{{}^g\chi}$. En déduire que cette action de G est triviale sur S .
9. Conclure puis donner un contre-exemple dans le cas $n = 2$ pour G non connexe.