

Produits semi-directs, suites exactes et groupes dérivés

Travaux dirigés du 14 et du 17 octobre 2025

✂ Exercice 1. Tout automorphisme est intérieur (quitte à agrandir le groupe)

Soient G un groupe et $f \in \text{Aut}(G)$. Montrer qu'il existe un groupe G' , un morphisme injectif $i : G \rightarrow G'$ et un élément $x \in G'$, tels que pour tout $g \in G$ on a $i(f(g)) = xi(g)x^{-1}$.

Soit $f \in \text{Aut}(G)$.

Première solution : considérons le morphisme de groupes $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(G)$, $n \mapsto f^n$. On pose $G' = G \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$. On a un morphisme injectif $i : G \rightarrow G'$, $g \mapsto (g, 0)$. Soit $x = (1, 1) \in G'$. On conclut car pour $g \in G$ on a

$$xi(g)x^{-1} = (1, 1) \star_{\alpha} (g, 0) \star_{\alpha} (1, -1) = (f(g), 1) \star_{\alpha} (1, -1) = (f(g), 0) = i(f(g)).$$

Deuxième solution : on pose $G' = G \rtimes_{\text{id}} \text{Aut}(G)$. On a un morphisme injectif $i : G \rightarrow G'$, $g \mapsto (g, \text{id})$. Soit $x = (1, f) \in G'$. On conclut car pour $g \in G$ on a

$$xi(g)x^{-1} = (1, f) \star_{\text{id}} (g, \text{id}) \star_{\text{id}} (1, f^{-1}) = (f(g), \text{id}) \star_{\text{id}} (1, f^{-1}) = (f(g), \text{id}) = i(f(g)).$$

Troisième solution : on a l'application $G \hookrightarrow S(G)$, $x \mapsto L_x := (g \mapsto xg)$. Cette application est injective par évaluation en 1. De plus, pour tout $g \in G$ on a la formule $L_{f(g)} = fL_gf^{-1}$, ce qui conclut (on prend $x = f$).

✂ Exercice 2. Fin de la discussion sur S_4

Montrer que $S_4 = K_4 \rtimes S$, où S est un sous-groupe de S_4 isomorphe à S_3 . En déduire que pour tout isomorphisme $\alpha : S_3 \xrightarrow{\sim} \text{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2) = \text{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on a $S_4 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes_{\alpha} S_3$.

Soit $S \subseteq S_4$ le stabilisateur d'un point de $\{1, \dots, 4\}$ (disons 1). On a $S \simeq S_3$. Par ailleurs on a $K_4 \cap S = \{1\}$ et $S_4 = K_4 S$ (si $\sigma \in S_4$, on trouve $\tau \in K_4$ qui envoie $\sigma(1)$ sur 1, et donc on a $\tau\sigma \in S$ puis $\sigma \in K_4 S$) donc S est un complément de K_4 dans S_4 , ce qui conclut la première partie de l'exercice. Ensuite, on se rappelle que si $a : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\sim} K_4$ et $b : S_3 \xrightarrow{\sim} S$ sont des isomorphismes alors la bijection $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times S_3 \rightarrow S_4$, $(k, \sigma) \mapsto a(k)b(\sigma)$ est un isomorphisme de groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes_{\beta} S_3 \xrightarrow{\sim} K_4 \rtimes S$ avec $\beta_{\sigma} = a^{-1} \circ \text{int}_{b(\sigma)} \circ a$ pour tout $\sigma \in S_3$. Or si $\alpha : S_3 \xrightarrow{\sim} \text{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on a que $\Phi := \beta^{-1} \circ \alpha \in \text{Aut}(S_3)$ et on calcule $\alpha_{\sigma} = (\beta \circ \Phi)_{\sigma} = \beta_{\Phi(\sigma)} = a^{-1} \circ \text{int}_{b \circ \Phi(\sigma)} \circ a$ et $b \circ \Phi$ est un isomorphisme $S_3 \xrightarrow{\sim} S$ donc on a également un isomorphisme $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes_{\alpha} S_3 \xrightarrow{\sim} K_4 \rtimes S$, ce qui conclut l'exercice.

Exercice 3. Le produit semi-direct de deux groupes dépend du choix de morphisme

Si un entier n est le produit de deux nombres premiers distincts p et q , il existe (par l'isomorphisme chinois) $a, b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ avec $a \equiv 1 \pmod{p}$, $a \equiv -1 \pmod{q}$, $b \equiv -1 \pmod{p}$ et $b \equiv 1 \pmod{q}$. Alors le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ contient exactement quatre racines carrées de l'unité : 1, a , b et $ab = -1$. Si s est l'une de ces racines carrées de l'unité, il existe un unique morphisme $\alpha : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (qui dépend de s) envoyant 1 sur l'automorphisme $x \mapsto sx$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; on pose alors $G_s := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Déterminer le centre des groupes G_s et en déduire qu'ils sont non isomorphes.

Pour $m, m' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $k, k' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on a dans le groupe G_s la relation $(m', k')(m, k) = (m' + s^{k'}m, k' + k)$. Ainsi, (m, k) est dans le centre de G_s si, et seulement si, on a $sm = m$. Soit H_s le sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $H = \{m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid sm = m\}$. On a montré $Z(G_s) \simeq H_s \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (groupe produit).

Notons s_p et $s_q \in \{\pm 1\}$ les signes tels que $s \equiv s_p \pmod{p}$ et $s \equiv s_q \pmod{q}$. L'isomorphisme chinois identifie H_s au sous-groupe des $(x, y) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ vérifiant $s_p x = x$ et $s_q y = y$. Pour l impair et $x \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, on a $-x = x \iff x = 0$. On en déduit

$$H_{-1} = 0, \quad H_1 \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}, \quad H_a \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad H_b \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

Ainsi, pour $s = -1, 1, a$ et b respectivement, le centre de G_s est cyclique d'ordre 2, $2pq, 2p$ et $2q$ respectivement.

Exercice 4. Autour du groupe diédral

Dans cet exercice on étend la définition de D_{2n} à $1 \leq n \leq 2$ en posant $D_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $D_4 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Avec cette définition, on constate que l'on a $D_{2n} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout entier $n \geq 1$, où le morphisme $\alpha : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est tel que $\alpha_{\bar{k}}(x) = (-1)^k x$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme vu en cours dans le cas $n \geq 3$.

1. Soient $m, n \geq 1$ des entiers. Montrer que D_{2m} possède un sous-groupe isomorphe à D_{2n} si et seulement si $n \mid m$.

Si D_{2m} possède un sous-groupe d'ordre $2n$, on a $2n \mid 2m$ par Lagrange, puis $n \mid m$. Supposons donc réciproquement $n \mid m$. Par définition, on a $D_{2m} = \langle c, \tau \rangle$ avec c d'ordre m , τ d'ordre 2 et $\tau c \tau^{-1} = c^{-1}$. L'élément $d := c^{m/n}$ est donc d'ordre n , et il vérifie encore $\tau d \tau^{-1} = (\tau c \tau^{-1})^{m/n} = (c^{-1})^{m/n} = d^{-1}$. Posant $D = \langle d \rangle$ et $K = \langle \tau \rangle$ on en déduit que $H := DK$ est un sous-groupe de D_{2m} qui est produit semi-direct interne de $K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $D \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et ce pour l'action d'inversion de $K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur D . On en déduit $H \simeq D_{2n}$.

2. Montrer $D_{2n} \simeq \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^n = 1 \rangle$ pour tout $n \geq 1$.

On note G_n le groupe défini par générateurs et relations dans l'énoncé.

(Cas $n = 1$) On a $G_1 = \langle s, t \rangle$ avec $st = 1$ et $s^2 = 1$, donc $s = t$, puis $G_1 = \langle s \rangle = \{1, s\}$ est de cardinal ≤ 2 . Par la propriété universelle de G_1 , il existe un unique morphisme de groupes $f_1 : G_1 \rightarrow \{\pm 1\}$ vérifiant $f(s) = f(t) = -1$, car $-1 \cdot -1 = 1$. Le morphisme f_1 est clairement surjectif. Comme on a $|G_1| \leq 2 = |\{\pm 1\}|$, c'est un isomorphisme.

(Cas $n = 2$) On a $G_2 = \langle s, t \rangle$ avec $s^2 = t^2 = 1$ et $st = ts$. On en déduit $G_2 = \{1, s, t, st\}$ puis $|G_2| \leq 4$. Par la propriété universelle de G_2 , il existe un unique morphisme de groupes $f_2 : G_2 \rightarrow \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ vérifiant $f(s) = (-1, 1)$ et $f(t) = (1, -1)$ car $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ est (commutatif) d'exposant 2. Le morphisme f_2 est clairement surjectif. Comme on a $|G_2| \leq 4 = |\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}|$, c'est un isomorphisme.

(Cas $n > 2$) On a $G_2 = \langle s, t \rangle$ avec $s^2 = t^2 = 1$ et $(st)^n = 1$. On en déduit

$$G_2 = \{1, s, t, st, ts, sts, tst, stst, tsts, \dots, (st)^{n-1}, (ts)^{n-1}\}$$

et en particulier $|G_2| \leq 2n$. On rappelle que D_{2n} est le sous-groupe de S_n engendré par $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ n)$ et $\tau = (1 \ n)(2 \ n-1) \dots$. On constate que l'on a $\sigma\tau = (2 \ n)(3 \ n-1)(4 \ n-2) \dots$. On a donc $\tau^2 = 1$, $(\sigma\tau)^2 = 1$ et $(\sigma\tau\tau)^n = 1$. Par la propriété universelle de G_n , il existe donc un unique morphisme de groupes $f_n : G_n \rightarrow D_{2n}$ vérifiant $f(s) = \sigma\tau$ et $f(t) = \tau$. Il est surjectif car $\text{Im } f_n$ contient $\langle \tau, \sigma \rangle = D_{2n}$. On a vu $|D_{2n}| = 2n$ en cours, et $|G_n| \leq 2n$ ci-dessus. On en déduit que f_n est un isomorphisme.

3. (Groupe diédral infini) Soient s et t les isométries de la droite euclidienne $\mathbb{R}$ définies par $x \mapsto -x$ et $x \mapsto 1 - x$, et $G := \langle s, t \rangle \subseteq \text{Iso}(\mathbb{R})$. Montrer que $H := \langle st \rangle$ est un sous-groupe distingué de G isomorphe à $\mathbb{Z}$, et que la conjugaison par s induit l'automorphisme $x \mapsto x^{-1}$ de H . En déduire $G \simeq \mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\alpha : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$ envoie $\bar{1}$ sur $x \mapsto -x$. On calcule d'abord que $st = (x \mapsto x - 1)$ et donc $(st)^n = (x \mapsto x - n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour voir que $H := \langle st \rangle$ est distingué dans G , il suffit d'avoir $sHs^{-1} \subseteq H$ et $tHt^{-1} \subseteq H$; or on a $ssst^{-1} = (x \mapsto x + 1) = (st)^{-1} \in H$ et $tstt^{-1} = ts = (x \mapsto x + 1)$, d'où le résultat. Ensuite, on a que le morphisme surjectif $\mathbb{Z} \rightarrow H$, $n \mapsto (st)^n$ est injectif par l'expression de $(st)^n$ vue précédemment, donc $H \simeq \mathbb{Z}$. On calcule $s(st)^n s^{-1} = (x \mapsto x + n) = (st)^{-n}$, donc la conjugaison par s induit bien $x \mapsto x^{-1}$ dans H .

✂ Exercice 5. Calculs de cardinaux

1. On se donne $n \geq 1$ et une suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \longrightarrow 1.$$

On suppose que les G_i sont finis pour tout i . Montrer $\prod_{i=1}^n |G_i|^{(-1)^i} = 1$.

Première méthode : on pose $f_n := 1$. Pour tout i , on a donc $|G_i| = |\text{Im } f_i| |\ker f_i|$, donc

$$\prod_{i=1}^n |G_i|^{(-1)^i} = \left(\prod_{i=1}^n |\text{Im } f_i|^{(-1)^i} \right) \left(\prod_{i=1}^n |\ker f_i|^{(-1)^i} \right).$$

De plus, comme la suite est exacte, on a $|\text{Im } f_i| = |\ker f_{i+1}|$ pour tout $i < n$, et on a aussi $|\text{Im } f_n| = |\ker f_1| = 1$ donc

$$\prod_{i=1}^n |\text{Im } f_i|^{(-1)^i} = \prod_{i=0}^{n-1} |\ker f_{i+1}|^{(-1)^i} = \left(\prod_{i=1}^n |\ker f_i|^{(-1)^i} \right)^{-1},$$

ce qui conclut.

Deuxième méthode : on fait une récurrence sur n . Pour $n = 1$, une suite exacte $1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow 1$ implique que $G_1 = 1$, d'où la formule. Supposons le résultat vrai au rang n . On regarde une suite exacte

$$1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \longrightarrow 1.$$

On a aussi la suite exacte

$$1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} \text{Im } f_{n-1} \longrightarrow 1.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à cette dernière suite exacte, on obtient $\left(\prod_{i=1}^{n-1} |G_i|^{(-1)^i} \right) |\text{Im } f_{n-1}|^{(-1)^n} = 1$.

On utilise alors le fait que $\text{Im } f_{n-1} = \ker f_n$ et la relation $|\ker f_n| = |G_n| |G_{n+1}|^{-1}$ due à la surjectivité de f_n , ce qui achève la récurrence.

2. Soient G un groupe abélien fini et $n \geq 1$ un entier. On a les sous-groupes $G[n] = \{g \in G \mid g^n = 1\}$ (n -torsion) et $G^{(n)} = \{g^n \mid g \in G\}$ de G . Montrer $|G[n]| = |G/G^{(n)}|$ (sans utiliser le théorème de structure).

Comme G est abélien, l'application $[n] : G \rightarrow G$, $g \mapsto g^n$ est un morphisme de groupes. Son image est $G^{(n)}$ et son noyau est $G[n]$, donc on a $G/G[n] \simeq G^{(n)}$ d'où $|G|/|G[n]| = |G^{(n)}|$ et donc $|G/G^{(n)}| = |G|/|G^{(n)}| = |G[n]|$.

✱ Exercice 6. Manipulations de groupes dérivés

Soit G un groupe.

1. Montrer que tout sous-groupe de G contenant $D(G)$ est distingué dans G .

Soit $\pi : G \rightarrow G/D(G)$ le morphisme canonique. Le groupe $G/D(G)$ étant commutatif, tous ses sous-groupes sont distingués. Mais tout sous-groupe de G contenant $D(G)$ est de la forme $\pi^{-1}(H)$ avec H sous-groupe de $G/D(G)$, d'après le cours. On conclut car l'image inverse d'un sous-groupe distingué par un morphisme de groupes est encore distingué.

2. Déterminer le groupe dérivé et l'abélianisé de H_8 . Faire de même avec D_{2n} .

On rappelle que l'on peut écrire $H_8 = \langle I, J \rangle = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm IJ\}$ avec

$$I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le sous-groupe $Z = \{\pm 1\}$ est central donc distingué dans H_8 . La relation $[I, J] = IJI^{-1}J^{-1} = -1$ montre que $-1 \in D(H_8)$, donc $Z \subseteq D(H_8)$, et aussi que H_8/Z est commutatif, car il est engendré par les classe de I et J qui commutent modulo Z . On a donc $D(H_8) \subseteq Z$ puis $D(H_8) = Z$. On en déduit $H_8/D(H_8) = H_8/\{\pm 1\}$. De plus, on a $I^2 = J^2 = -1$ et $IJ = -JI$ dans H_8 , donc dans $H_8/\{\pm 1\}$ on a $I^2 = J^2 = 1$ et $IJ = JI$ d'où l'existence d'un morphisme surjectif $H_8/\{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $I \mapsto (1, 0)$, $J \mapsto (0, 1)$. On en déduit que $H_8/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par égalité des cardinaux. Pour la deuxième partie de la question, posons $G = D_{2n}$. On a $G = \langle c, \tau \rangle$ comme dans le cours, avec $\tau c = c^{-1}\tau$. Le sous-groupe $C := \langle c \rangle$ est distingué et d'indice 2 dans G . On a donc $G/C \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (abélien) et donc $D(G) \subseteq C$. D'autre part, on a aussi $\tau c \tau^{-1} c^{-1} = c^{-2} \in D(G)$. Notons C' le sous-groupe de C engendré par c^2 . On a montré $C' \subseteq D(G)$. Si n est impair, on a $C' = C$ et donc $C = D(G)$ et $G/D(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si n est pair, alors C' est d'ordre $n/2$ et distingué dans G , car c^2 commute avec c et vérifie $\tau c^2 \tau^{-1} = c^{-2} \in C'$. Ainsi, G/C' est d'ordre 4, engendré par les images de c et τ . Mais on a $c^2 \in C'$, $\tau^2 \in C'$ et $[\tau, c] = c^{-2} \in C'$, on a donc $G/C' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (même raisonnement que pour H_8). Comme G/C' est abélien on a $D(G) \subseteq C'$, puis $D(G) = C'$ et $G/D(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Le théorème de Lie-Kolchin

Soient $n \geq 1$ et G un sous-groupe résoluble connexe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On se propose de montrer que G est co-trigonalisable. On raisonne par récurrence sur $n + r$ où r est la classe de résolubilité de G .

1. Montrer que $D(G)$ est connexe.

On pose $H = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. C'est à la fois un groupe et un ouvert du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $M_n(\mathbb{C})$, ce qui lui confère une structure d'espace topologique. Observons que la multiplication $H \times H \rightarrow H$, $(x, y) \mapsto xy$, et l'inversion $H \rightarrow H$, $x \mapsto x^{-1}$, sont toutes les deux continues : la première est polynomiale, et pour la seconde utiliser $x^{-1} = {}^t \mathrm{Co}(x)(\det x)^{-1}$ et la continuité et non annulation du déterminant. (On dit que H est un groupe topologique). Il découle de ces observations que si X et Y sont des parties connexes de H , il en va de même de X^{-1} (image de X par l'inversion) et de XY (image du connexe $X \times Y$ par la multiplication). Si en outre X contient 1, alors on a $1 \in X^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ puis $X^n \cap X^m \neq \emptyset$, et donc $\langle X \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} X^n$ est connexe. On a montré que le sous-groupe engendré par une partie connexe contenant 1 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe. Considérons enfin G comme dans l'énoncé. L'ensemble des commutateurs $C = \{[x, y] \mid (x, y) \in G \times G\}$ est une partie connexe de G , comme image du connexe $G \times G$ par l'application continue $H \times H \rightarrow H$, $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$. Ainsi, C est un connexe contenant 1, et donc $D(G) = \langle C \rangle$ est connexe.

2. Montrer que $D(G)$ est inclus dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Pour $g, h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ on a $\det([g, h]) = [\det(g), \det(h)] = 1$ car $\mathbb{C}^\times$ est commutatif.

3. Conclure si $D(G)$ est constitué d'homothéties.

Si $D(G)$ est constitué d'homothéties, alors ces homothéties sont de rapport $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ avec $\lambda^n = 1$ par la question précédente. Mais par la question 1, $D(G)$ est connexe. Le seul sous-groupe connexe de $\mathbb{C}^\times$ inclus dans μ_n est $\{1\}$. On a donc $D(G) = 1$, c'est-à-dire G abélien. Les éléments de G sont trigonalisables et commutent : ils sont donc co-trigonalisables par un exercice classique.

4. Conclure s'il existe un sous-espace $\{0\} \subsetneq W \subsetneq \mathbb{C}^n$ avec $g(W) \subseteq W$ pour tout $g \in G$.

Choisissons une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $e_1, \dots, e_m$ est une base de W . Par hypothèse on a $1 \leq m = \dim W < n$. De plus, pour tout $g \in G$ on a

$$\mathrm{Mat}_e g = \begin{bmatrix} A(g) & * \\ 0 & B(g) \end{bmatrix} \text{ avec } A(g) \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \text{ et } B(g) \in \mathrm{GL}_{n-m}(\mathbb{C}).$$

Les applications $A : G \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, $g \mapsto A(g)$, et $B : G \rightarrow \mathrm{GL}_{n-m}(\mathbb{C})$, $g \mapsto B(g)$, sont des morphismes de groupes, et sont manifestement continues. Ainsi, les groupes images $A(G)$ et $B(G)$ sont connexes (images continues d'un connexe) et quotients de G , donc résolubles et de classes respectives $a, b \leq r$. On a $m + a < n + r$ et $n - m + b < n + r$. Par récurrence, $A(G)$ et $B(G)$ sont donc co-trigonalisables. Quitte à changer de base e , cela montre que l'on peut supposer que $A(G)$ et $B(G)$ sont triangulaires supérieurs dans la base e , ainsi donc que G .

Pour tout groupe Γ , on note $\widehat{\Gamma} := \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^\times)$ et on appelle *caractères* de Γ les éléments de $\widehat{\Gamma}$. On pose $\mathcal{C} = \widehat{D(G)}$. Pour un caractère $\chi \in \mathcal{C}$ on considère le sous-espace vectoriel

$$V_\chi = \{v \in \mathbb{C}^n \mid g(v) = \chi(g)v, \forall g \in D(G)\}.$$

On pose aussi $S = \{\chi \in \mathcal{C} \mid V_\chi \neq 0\}$ et $V = \sum_{\chi \in S} V_\chi$.

5. Montrer $S \neq \emptyset$.

La classe de résolubilité de $D(G)$ est $r - 1$, et $D(G)$ est connexe par la question 1. Par hypothèse de récurrence, $D(G)$ est donc co-trigonalisable. En particulier, il existe une droite $D \subseteq V$ stable par tout élément de $D(G)$. Soit e une base de D , i.e. $D = \mathbb{C}e$. Pour tout $g \in D(G)$, il existe un unique $\lambda_g \in \mathbb{C}^\times$ tel que $g(e) = \lambda_g e$. On a donc $\lambda_{gh}e = gh(e) = g(h(e)) = g(\lambda_h e) = \lambda_h g(e) = \lambda_g \lambda_h e$, puis $\chi(g) := \lambda_g$ définit un caractère de $D(G)$. On a $e \in V_\chi$, et donc $\chi \in S$.

6. Montrer $V = \oplus_{\chi \in S} V_\chi$.

Soit $X \subseteq S$ de cardinal non nul et minimal tel qu'il existe une relation $0 = \sum_{\chi \in X} v_\chi$ avec v_χ non nul et dans V_χ pour tout $\chi \in X$. Soient $\alpha \in X$ et $g \in G$. Appliquant $\alpha(g) \mathrm{id} - g$ à cette relation on trouve $0 = \sum_{\chi \in X} (\alpha(g) - \chi(g))v_\chi$. Le coefficient $\alpha(g) - \chi(g)$ est nul pour $\alpha = \chi$, et donc on a $\alpha(g) = \chi(g)$ pour tout $\chi \in X$ et tout $g \in G$ par minimalité de la relation. Cela montre $X = \{\alpha\}$, puis $0 = v_\alpha$, une contradiction.

7. En déduire que S est fini.

La somme des V_χ étant directe par la question précédente on a $n \geq \dim V = \sum_{\chi \in S} \dim V_\chi$. Mais on a $\dim V_\chi \geq 1$ pour $\chi \in S$ par définition de S . On a donc $|S| \leq n$.

Pour $g \in G$ et $\chi \in \mathcal{C}$ on pose ${}^g\chi : D(G) \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $x \mapsto \chi(g^{-1}xg)$.

8. Montrer que $(g, \chi) \mapsto {}^g\chi$ est une action de G sur $\mathcal{C}$, et vérifier $g(V_\chi) = V_{{}^g\chi}$. En déduire que cette action de G est triviale sur S .

On sait que $D(G)$ est distingué dans G , donc pour $g \in G$ la restriction de int_g à $D(G)$ est un automorphisme de $D(G)$. Pour $\chi \in \mathcal{C}$ on constate que l'on a ${}^g\chi = \chi \circ \mathrm{int}_{g^{-1}}$: c'est donc bien un élément de $\mathcal{C}$. De plus, on a $\chi^1 = \chi$ et ${}^g({}^h\chi)(x) = {}^h\chi(g^{-1}xg) = \chi(h^{-1}g^{-1}xgh) = \chi((gh)^{-1}x(gh)) = {}^{gh}\chi(x)$ pour $g, h \in G$ et $x \in D(G)$. Ainsi, $G \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $(g, \chi) \mapsto {}^g\chi$, est une action de G sur $\mathcal{C}$.

Si on a $v \in V_\chi$ et $g \in G$, on a $g(v) \in V_{{}^g\chi}$. En effet, pour $h \in D(G)$ et $g \in G$ on a $g^{-1}hg \in D(G)$ et donc

$$h(g(v)) = g((g^{-1}hg)(v)) = g(\chi(g^{-1}hg)v) = g({}^g\chi(h)v) = {}^g\chi(h)g(v).$$

On a donc montré $g(V_\chi) \subseteq V_{{}^g\chi}$ pour tout $g \in G$ et tout $\chi \in \mathcal{C}$. Appliquant ceci à g^{-1} et ${}^g\chi$, on a l'égalité de l'énoncé. Fixons $\chi \in S$. L'assertion $g(V_\chi) = V_{{}^g\chi}$ montre que pour $g \in G$ on a ${}^g\chi \in S$. Comme S est fini, l'ensemble des ${}^g\chi$ est donc fini. En particulier, pour $h \in D(G)$ donné, l'application $G \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $g \mapsto \chi(ghg^{-1})$, est d'image finie. Admettons temporairement que l'application $\chi : D(G) \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $x \mapsto \chi(x)$, est continue. Comme G est connexe, l'application ci-dessus est alors constante. On en déduit ${}^g\chi = \chi$, ce qui était demandé. Vérifions enfin la continuité de χ . Pour tout $v \in \mathbb{C}^n$, l'application $G \rightarrow \mathbb{C}^n$, $g \mapsto g(v)$, est continue, et si on choisit $v \in V_\chi$ non nul, elle coïncide avec $g \mapsto \chi(g)v$ sur $D(G)$.

9. Conclure, puis donner un contre-exemple dans le cas $n = 2$ pour G non connexe.

Par la question 5 on a $S \neq \emptyset$. Fixons donc $\chi \in S$. Soit $g \in G$. Par la question précédente, on a ${}^g\chi = \chi$ et donc $g(V_\chi) = V_\chi$. On en déduit que G stabilise V_χ . Si $\dim V_\chi < n$, on conclut avec la question 4. Si $V_\chi = V$, alors $D(G)$ agit par homothéties sur V , et on conclut avec la question 3.

Pour le contre-exemple, le sous-groupe $H_8 \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est résoluble mais pas co-trigonalisable. En effet, les seules droites stables de $I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ sont $\mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbb{C} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, mais aucune des deux n'est stable par $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.