p-groupes, Sylow et révisions

Travaux dirigés du 21 et du 24 octobre 2025

Dans tout le TD, p est un nombre premier.

Exercice 1. Une forme forte de réciproque au théorème de Lagrange pour les p-groupes

Soit P un p-groupe de cardinal p^n avec $n \geqslant 1$.

1. Montrer que P a un sous-groupe distingué d'ordre p.
2. Montrer que pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant n$, il existe un sous-groupe distingué $P_i \subseteq P$ d'ordre p^i, et que l'on peut même supposer $P_i \subseteq P_{i+1}$ pour $0 \leqslant i < n$.

Exercice 2. Le lemme de Ore

Dans cet exercice, on va montrer le lemme de Ore ainsi qu'une version plus forte dans le cas des p-groupes.

Soit G un groupe fini tel que p est le plus petit facteur premier de $|G|$.

1. On suppose que G agit sur un ensemble X à p éléments. Montrer que G_x agit trivialement sur X pour tout $x \in X$.
2. *(Lemme de Ore)* En déduire que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.

Soit maintenant P un p-groupe de cardinal p^n avec $n \geqslant 1$. On rappelle qu'un sous-groupe $M \subseteq G$ est dit *maximal* si on a $M \neq G$ et aucun sous-groupe de G n'est strictement compris entre M et G. Par exemple, par Lagrange, un sous-groupe d'indice premier est toujours maximal.

3. Montrer que les sous-groupes maximaux d'un p-groupe sont distingués et d'indice p.
4. Donner un exemple de p-groupe ayant un sous-groupe d'indice p^2 non distingué.

Exercice 3. Une autre preuve de l'existence des p-Sylow

Soit G un groupe d'ordre $p^\alpha n$ avec $p \wedge n = 1$ et $\alpha \geqslant 1$.

1. Montrer $\binom{|G|}{p^\alpha} \not\equiv 0 \bmod p$.
2. En considérant l'action de G par translations sur l'ensemble de ses parties à p^α éléments, redémontrer que G possède un p-Sylow.

Exercice 4. p-Sylow des groupes symétriques

1. Soit $n \geq 1$ tel que $n < p^2$. Exhiber un p-Sylow de S_n.
2. Soit $n \geq 1$ tel que $p \nmid n+1$. Montrer que S_n et S_{n+1} ont des p-Sylow isomorphes.
3. Soit S un p-Sylow de S_{p^2}. Montrer que l'on a $S \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^p \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où φ envoie le générateur $\overline{1}$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur la permutation circulaire $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_2, \dots, x_p, x_1)$ de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^p$.

Exercice 5. Zoologie

Déterminer, à isomorphisme près, les sous-groupes de Sylow de S_n pour $n \leqslant 8$ (on pourra se servir du 1 et du 2 de l'exercice précédent).

Exercice 6. Fusion

Soient G un groupe fini et P un p-Sylow de G.

1. Montrer $\mathrm{N}_G(\mathrm{N}_G(P)) = \mathrm{N}_G(P)$.
2. Montrer que deux éléments de $\mathrm{C}_G(P)$ conjugués dans G sont conjugués dans $\mathrm{N}_G(P)$ (Burnside).

Exercice 7. Un argument de comptage

Dans cet exercice, on présente un argument de comptage qui, combiné aux théorèmes de Sylow, permet dans des cas favorables de montrer qu'un groupe d'ordre donné n'est pas simple.

Soit G un groupe d'ordre pm avec p premier et $p \wedge m = 1$.

1. Montrer que G possède exactement $\mathrm{n}_p(G)(p-1)$ éléments d'ordre p.
2. On suppose $\mathrm{n}_p(G) = m$ et que m est une puissance d'un nombre premier q. Montrer $\mathrm{n}_q(G) = 1$.

3. (Application 1) On suppose $|G| = pq^2$, avec q premier $\neq p$. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.
4. (Application 2) On suppose $|G| = pqr$, avec p, q, r premiers distincts. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.

Exercice 8. Le morphisme de transfert (d'après le cours *Groupes finis* de J.-P. Serre à l'ENSJF, 1978-1979)

Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini de G. On pose $X = G/H$ et on choisit d'abord, pour tout $x \in X$, un représentant $\widetilde{x}$ de x dans G. Le groupe G agit par translations sur X. Pour $g \in G$, et $x \in X$, on note $h_{g,x}$ l'unique élément de H vérifiant $g\widetilde{x} = \widetilde{gx}h_{g,x}$ et on pose

$$\mathrm{Ver}(g) := \prod_{x \in X} h_{g,x} \bmod \mathrm{D}(H).$$

Cela définit une application $\mathrm{Ver} : G \to H_{\mathrm{ab}}$ (de l'allemand *Verlagerung*).

1. Soit $x \mapsto \widehat{x}$ un autre système de représentants de X. Pour $x \in X$ on note h_x l'unique élément de H tel que $\widehat{x} = \widetilde{x}h_x$. Pour $g \in G$ et $x \in X$, on définit aussi $h'_{g,x} \in H$ par $g\widehat{x} = \widehat{gx}h'_{g,x}$. Montrer $h'_{g,x} = h_{gx}^{-1}h_{g,x}h_x$.
2. (suite) En déduire que $\mathrm{Ver}(g)$ ne dépend pas du choix de $x \mapsto \widetilde{x}$.
3. Montrer que pour $g, g' \in G$ on a $h_{gg',x} = h_{g,g'x}h_{g',x}$.
4. En déduire que Ver est un morphisme de groupes $G \to H_{\mathrm{ab}}$. On appelle aussi transfert le morphisme $G_{\mathrm{ab}} \to H_{\mathrm{ab}}$ qui s'en déduit.

On regarde maintenant le morphisme de restriction $\mathrm{Res} : H_{\mathrm{ab}} \to G_{\mathrm{ab}}$ qui est le morphisme naturel $h\mathrm{D}(H) \mapsto h\mathrm{D}(G)$.

5. Soit $g \in G$. Pour chaque orbite Ω_i de $\langle g \rangle$ agissant sur G/H, on choisit un représentant g_iH de Ω_i et on pose $n_i = |\Omega_i|$. Montrer
$$g_i^{-1}g^{n_i}g_i \in H \text{ et } \mathrm{Ver}(g) \equiv \prod_i g_i^{-1}g^{n_i}g_i \bmod \mathrm{D}(H)$$
6. En déduire que $\mathrm{Res} \circ \mathrm{Ver} : G_{\mathrm{ab}} \to G_{\mathrm{ab}}$ est le morphisme $g \mapsto g^{|G/H|}$.

Soient G un groupe fini et P un p-Sylow de G. On suppose que P est dans le centre de son normalisateur $\mathrm{N}_G(P)$ (en particulier, P est abélien). On va montrer que P admet un complément distingué dans G (c'est le théorème du complément de Burnside).

7. Soient $g \in P$, $h \in G$, ainsi que n le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $h^{-1}g^nh \in P$. En utilisant la question 2 de l'exercice 6, montrer $h^{-1}g^nh = g^n$. En déduire que $\mathrm{Ver} : G \to P$ vérifie $\mathrm{Ver}(g) = g^{|G/P|}$ pour tout $g \in P$.
8. Conclure en considérant ker(Ver).

On va maintenant voir quelques conséquences du théorème de Burnside. Soient G un groupe fini tel que p est le plus petit facteur premier de $|G|$ et soit P un p-Sylow de G.

9. On suppose P cyclique. Montrer que P admet un complément distingué.
10. On suppose $P \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Montrer que soit P admet un complément distingué, soit $p = 2$ et $|G| \equiv 0 \bmod 3$.
11. En déduire que si G est simple non abélien on a soit $p^3 \,|\, |G|$, soit $12 \,|\, |G|$.