

Soutenance de thèse

Universalité du modèle d'Ising planaire au-delà
du critique Z-invariant

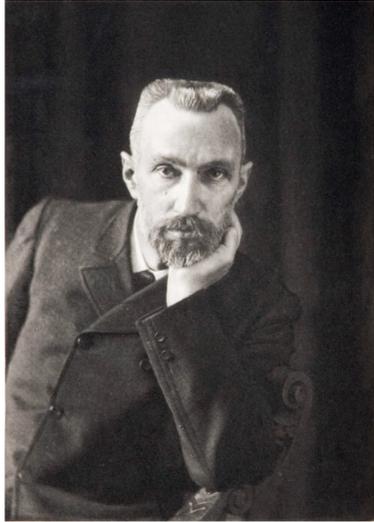
Mardi 30 Août 2022

Rémy Mahfouf



université
PARIS-SACLAY

Une petite expérience

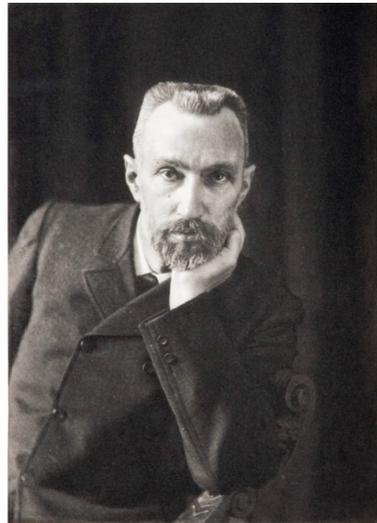


Pierre Curie

1895



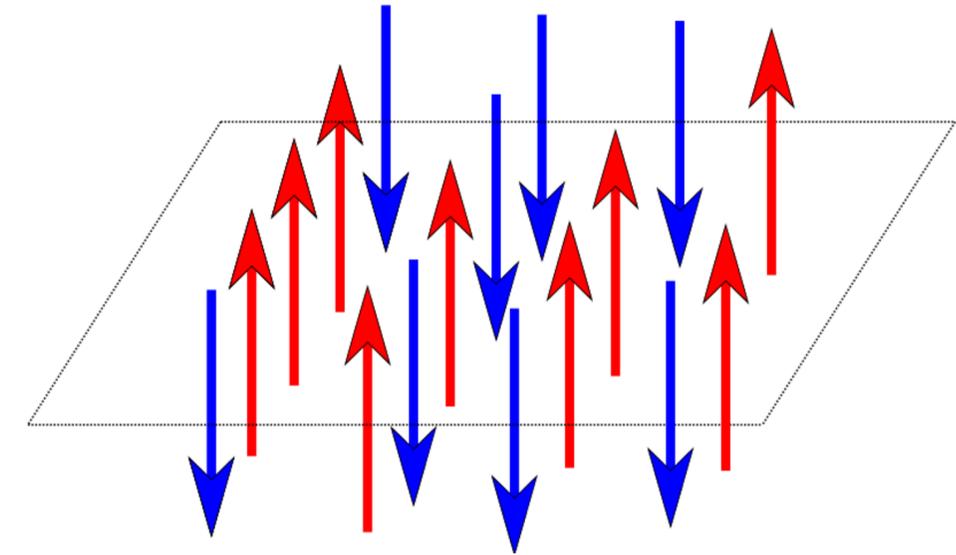
Une petite expérience



Pierre Curie 1895

« Propriétés magnétiques
des corps à diverses
températures »

Expliquer ce phénomène est une des
grandes questions du début du XXème
siècle



Micro-aimants qui
pointent vers le **haut** ou
vers le **bas**, voisins ayant
tendance à s'aligner

- Montrer qu'il existe une température critique T_c
- Etudier le système au point critique

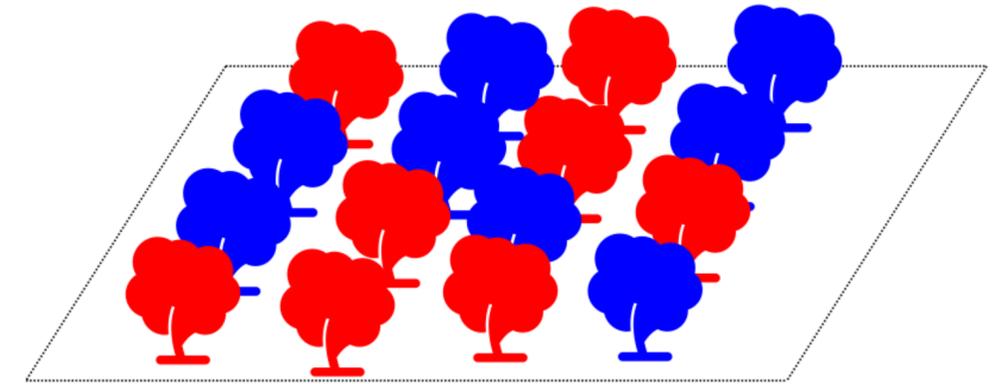
Une petite expérience



Pierre Curie 1895

« Propriétés magnétiques
des corps à diverses
températures »

Expliquer ce phénomène est une des
grandes questions du début du XXème
siècle



Fôret avec des arbres qui
brulent et des arbres qui
ne **brulent pas**, favorisant
voisins dans le même
état

- Montrer qu'il existe une température critique T_c
- Etudier le système au point critique

La modélisation de Lenz et Ising



Lenz



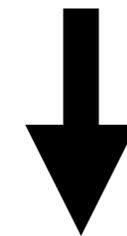
Ising

Article fondateur 1920

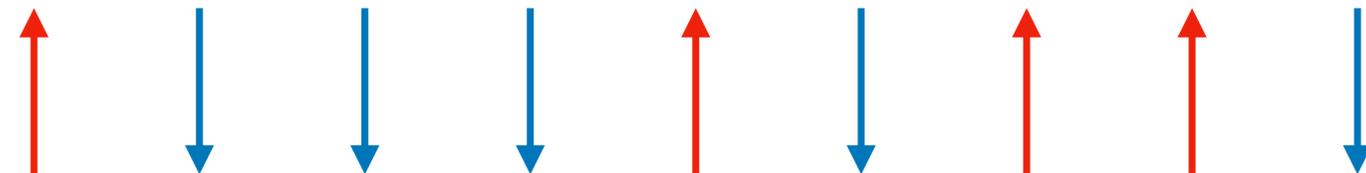
Les moment magnétiques élémentaires ne peuvent prendre que deux directions matérialisées par $+1$ et -1

Objectifs de la thèse d'Ising (1925)

- Proposer une modélisation des interactions entre les aimants élémentaires favorisant les configurations alignées
- Prouver analytiquement qu'il existe une transition de phase

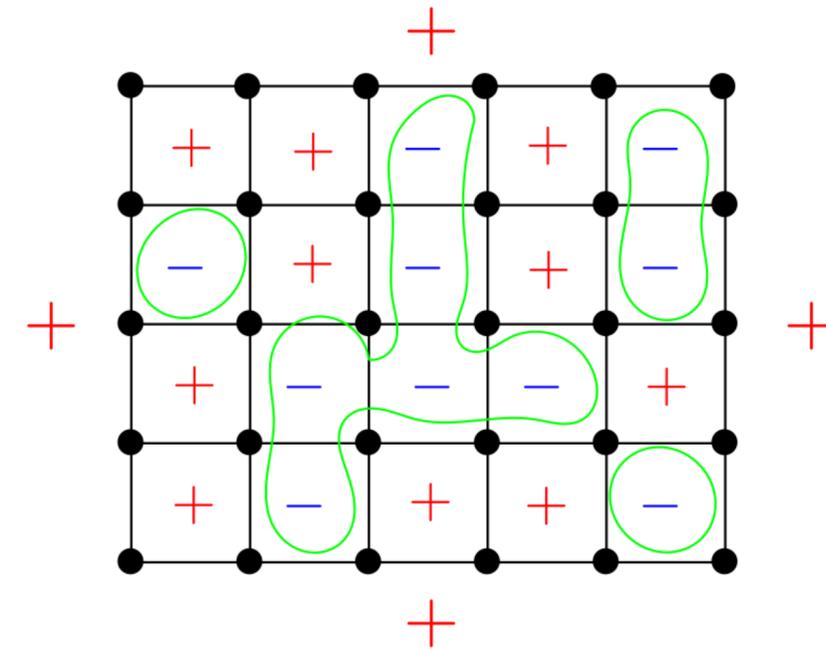


Modèle 1D n'admet pas de transition de phase



La modélisation de Lenz et Ising

- \mathcal{G} un sous-graphe fini de \mathbb{Z}^2
- \mathcal{F} l'ensemble des faces de \mathcal{G}
- $x \in]0; 1[$, représente le coût pour casser l'alignement entre voisins



Configuration de spins

$$\sigma = (\sigma_u)_{u \in \mathcal{F}} \in \{\pm 1\}^{\mathcal{F}}$$

+1 **-1**

Collection de **contours**
séparant spins opposés

$$\mathbb{P}_{\mathcal{G}}^+(\sigma) := \frac{1}{Z(\mathcal{G}, x, +)} x^{\#\{(uv) \in \mathcal{G}, \sigma_u \neq \sigma_v\}}$$

Fonction de partition

$$Z(\mathcal{G}, x, +) := \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{\mathcal{F}}} x^{\#\{(uv) \in \mathcal{G}, \sigma_u \neq \sigma_v\}}$$

La modélisation de Lenz et Ising

- Monotonie correspond au sens physique, permet de construire en volume infini

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}_n}^+ [\sigma_0] \geq \mathbb{E}_{\mathcal{G}_{n+1}}^+ [\sigma_0]$$

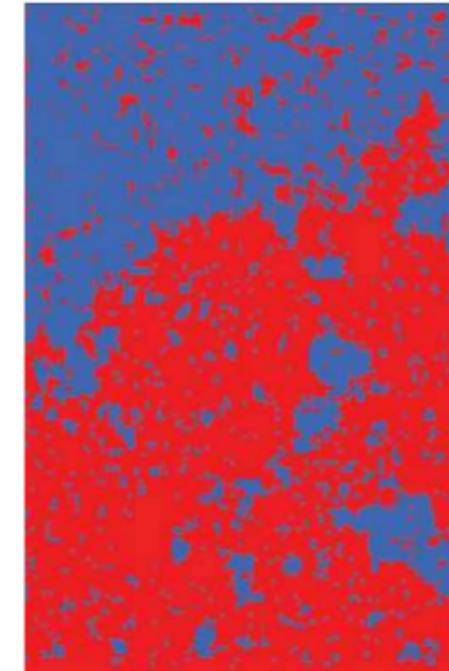
- Construction mesure sur \mathbb{Z}^2
- Modèle qui fait apparaître une transition de phase (du second ordre)

Energie libre par site

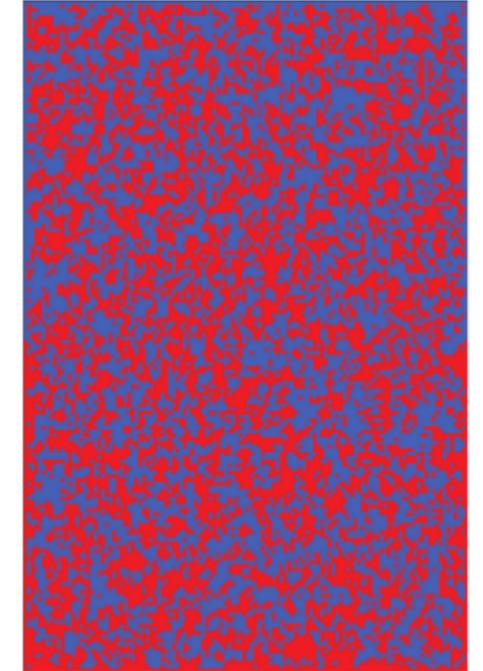
$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{G}_n|} \log Z(\mathcal{G}_n, x, +)$$



$$x > x_c$$



$$x_c = \sqrt{2} - 1$$



$$x < x_c$$

- Point critique non trivial Pierels (1936)
- Température critique par Onsager (1944)
- Nombreux calculs exacts par la suite (McCoy, Wu, Baxter, Perk ...)

La modélisation de Lenz et Ising

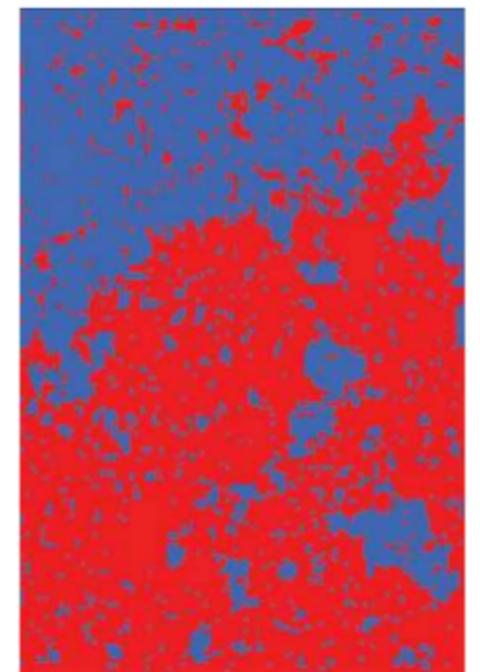
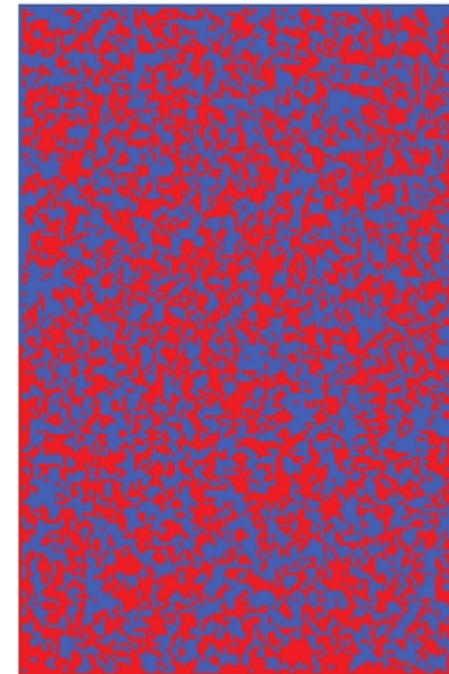
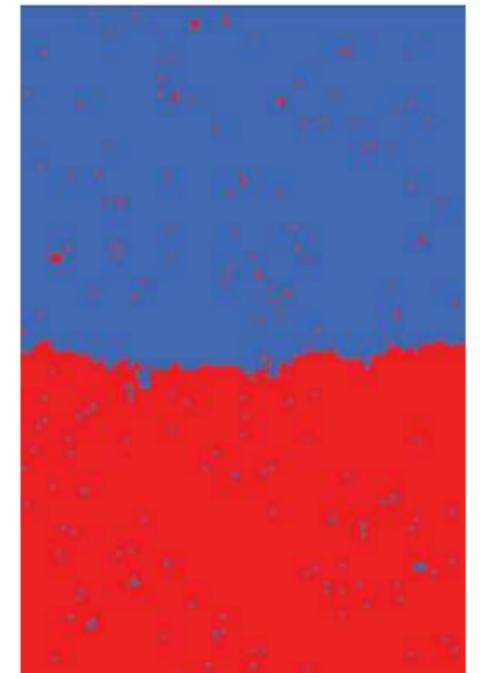
Kauffmann-Yang-Onsager

Sur \mathbb{Z}^2 avec $x = e^{-2J}$

- Si $J < \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$, $\lim_{v^\circ \rightarrow \infty} \mathbb{E}^+ [\sigma_{u^\circ} \sigma_{v^\circ}] = (1 - \sinh^4(2J))^{\frac{1}{4}}$
- Si $J \geq \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$, $\lim_{v^\circ \rightarrow \infty} \mathbb{E}^+ [\sigma_{u^\circ} \sigma_{v^\circ}] = 0$

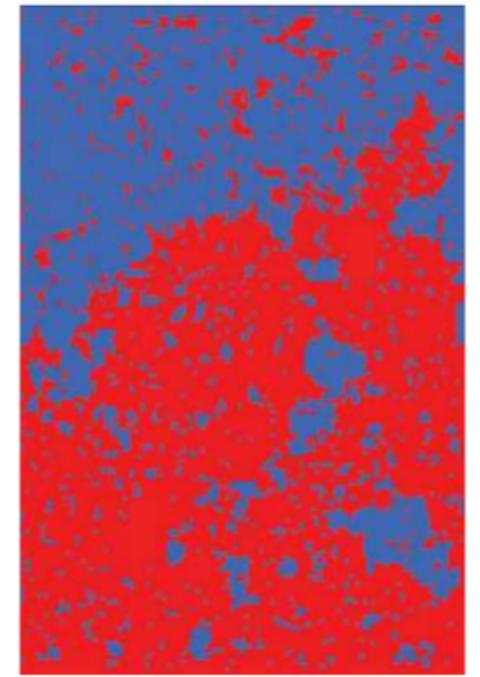
McCoy-Wu

- Si $J = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$, $\mathbb{E}^+ [\sigma_{(0,0)} \sigma_{(n,n)}] \sim \frac{\mathcal{C}_\sigma^2}{(2n)^{\frac{1}{4}}}$



Preuves modernes dans chapitre 2, formalisme des séries de Fourier

Objectif de la thèse



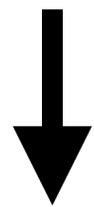
- Etudier de manière précise la géométrie aléatoire au point critique et au voisinage du point critique
- Montrer que la géométrie locale n'influe pas sur le comportement à grande distance du modèle (remplacer le réseau carré par des réseaux généraux)
- Unifier les différents formalismes et explorer une classe de nouvelles limite d'échelles

Une transformation locale du modèle

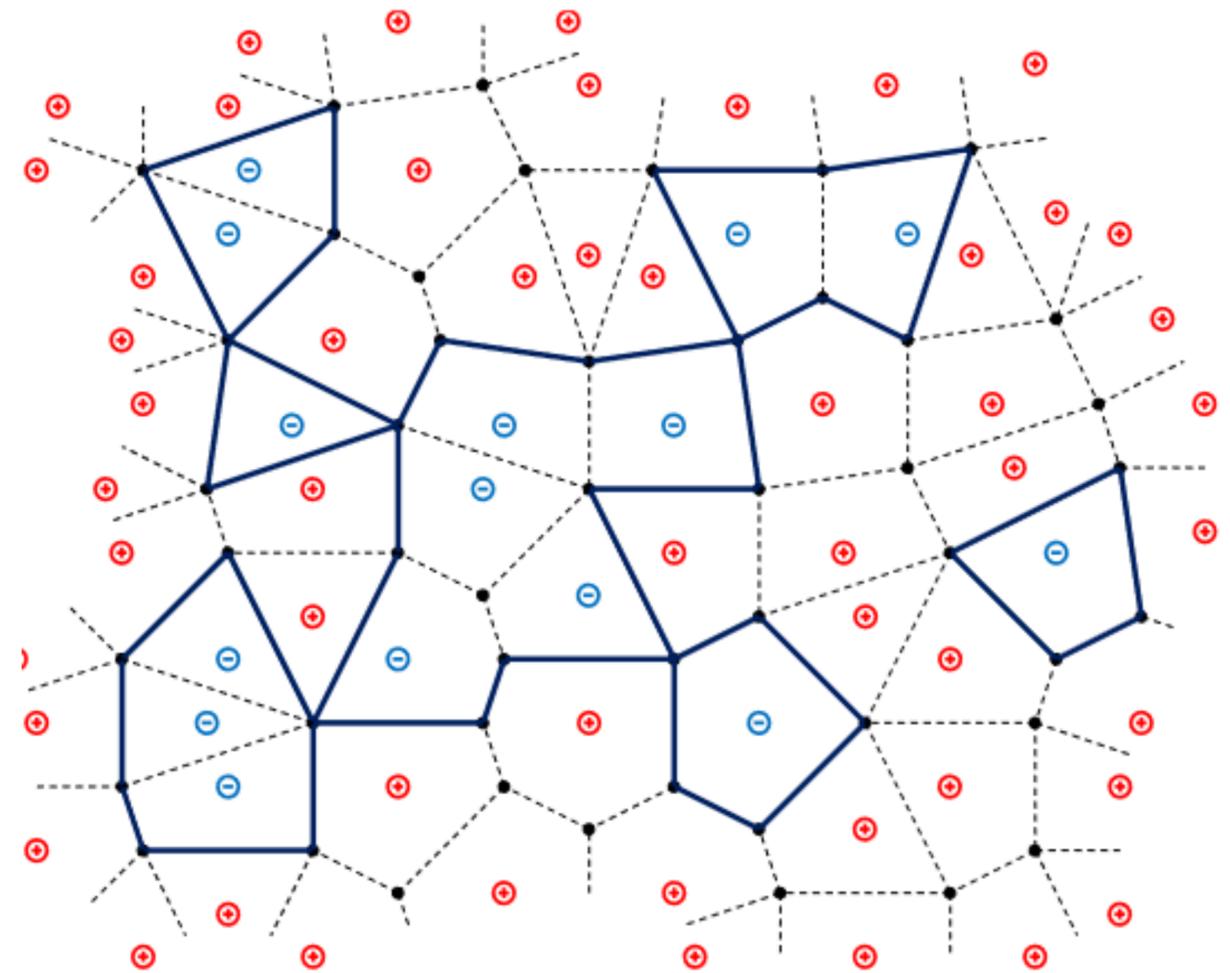
- Transformation triangle-étoile
comme pour les réseaux électriques
- Poids généraux pour une configuration
 $(x_e)_{e \in \mathcal{E}}$

$$\mathbb{P}_{\mathcal{G}}^+(\sigma) := \frac{1}{Z(\mathcal{G}, (x_e)_{e \in \mathcal{E}}, +)} \prod_{e=(uv) \in \mathcal{E}, \sigma_u \neq \sigma_v} x_e$$

Recherche de poids invariant par triangle-étoile : $\mathbb{P}_{\mathcal{G}^\circ}^+$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{G}^\circ \setminus \{v^\circ\}}^+$ coïncident



Equations de Yang-Baxter



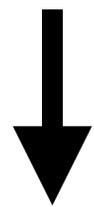
Baxter propose *une* solution à ce système d'équations

Une transformation locale du modèle

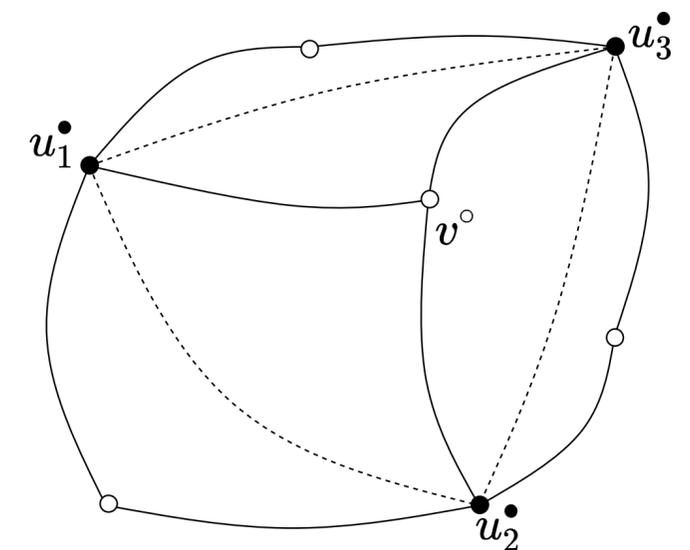
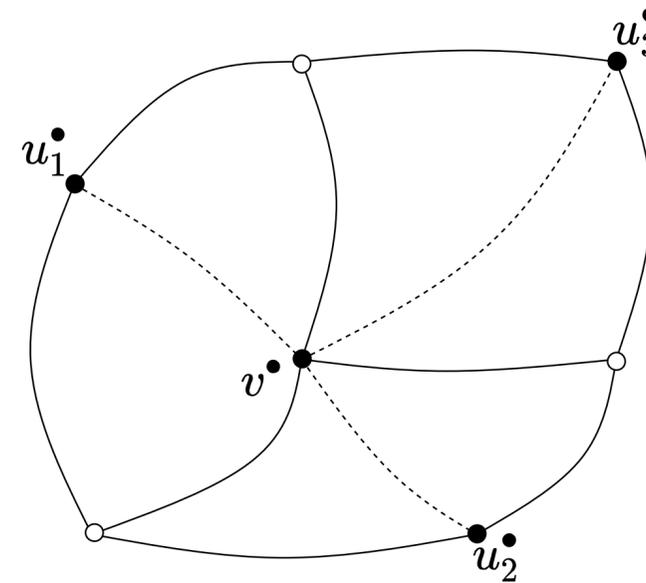
- Transformation triangle-étoile
comme pour les réseaux électriques
- Poids généraux pour une configuration
 $(x_e)_{e \in \mathcal{E}}$

$$\mathbb{P}_{\mathcal{G}}^+(\sigma) := \frac{1}{Z(\mathcal{G}, (x_e)_{e \in \mathcal{E}}, +)} \prod_{e=(uv) \in \mathcal{E}, \sigma_u \neq \sigma_v} x_e$$

Recherche de poids invariant par triangle-étoile : $\mathbb{P}_{\mathcal{G}^\circ}^+$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{G}^\circ \setminus \{v^\circ\}}^+$ coïncident



Equations de Yang-Baxter



Baxter propose *une* solution à ce système d'équations

Une transformation locale du modèle

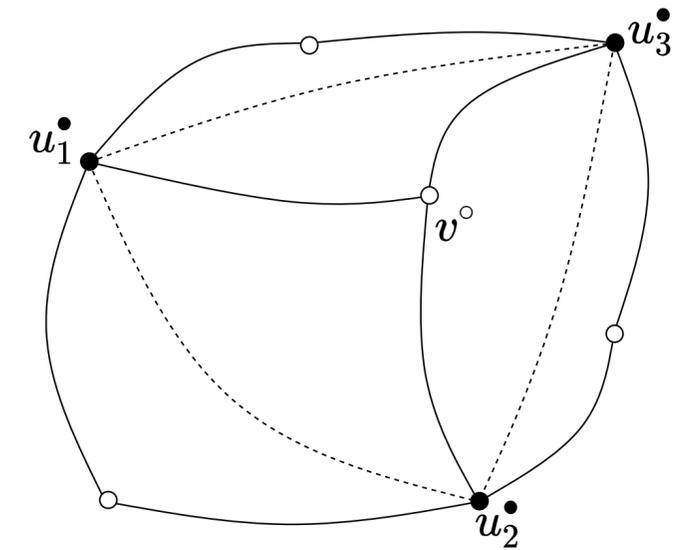
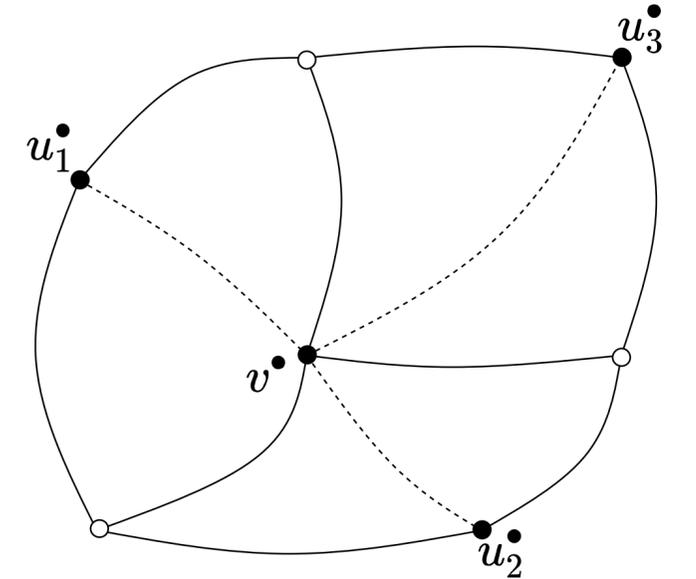
La solution de Baxter

- Fixe 3 angles *abstrait* $\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_3 = \pi$
- $\bar{\theta}_{12} := \frac{\pi}{2} - \bar{\theta}_3$, $\bar{\theta}_{13} := \frac{\pi}{2} - \bar{\theta}_2$ et $\bar{\theta}_{23} := \frac{\pi}{2} - \bar{\theta}_1$
- Paramètre elliptique $k \in i\mathbb{R} \cup [0; 1]$, unique pour tout le graphe

$$x_p := \tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \quad , \quad \tan(\theta_p) := \operatorname{sc}\left(\frac{2\pi\bar{\theta}_p}{K(k)} \mid k\right) \quad , \quad \tan(\theta_{qr}) := \operatorname{sc}\left(\frac{2\pi\bar{\theta}_{qr}}{K(k)} \mid k\right)$$

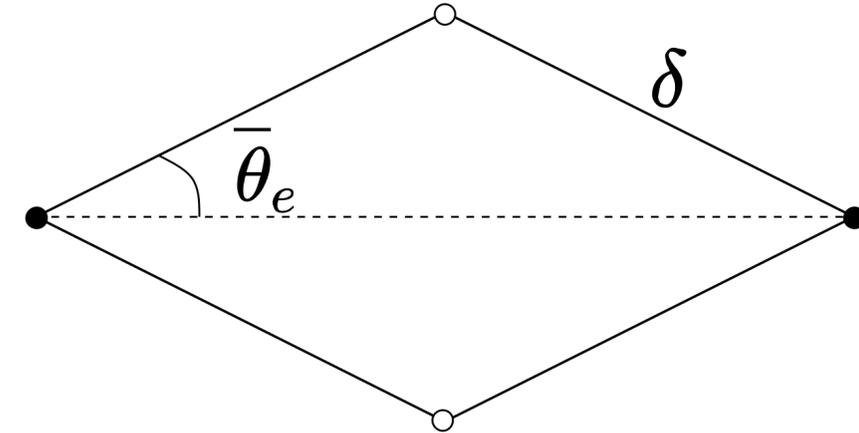
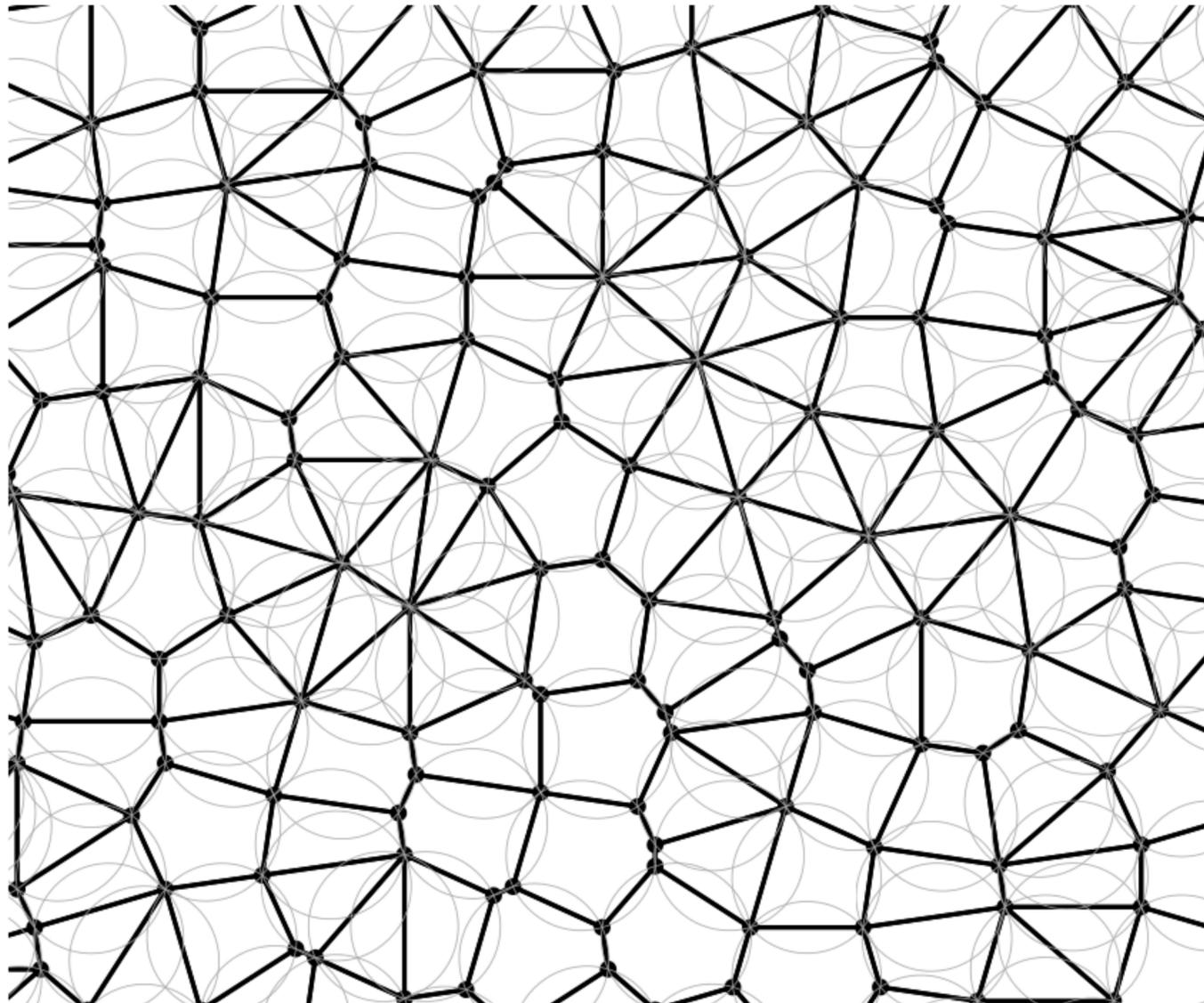
Paramétrisation alternative $q := \exp\left(-\pi \frac{K'(k)}{K(k)}\right)$

k et q jouent le rôle de la température



Les poids Z-invariants de Baxter sur les graphes isoradiaux

- Graphe isoradial : Graphe planaire où chaque face est inscrite dans un cercle rayon δ , centre du cercle \in face

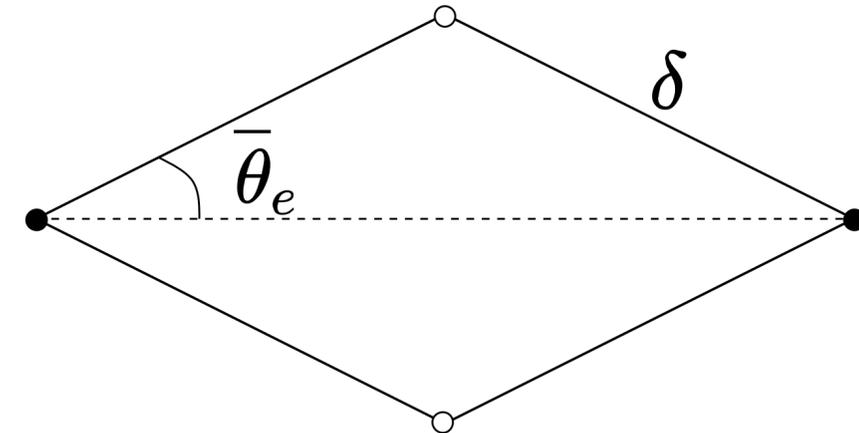
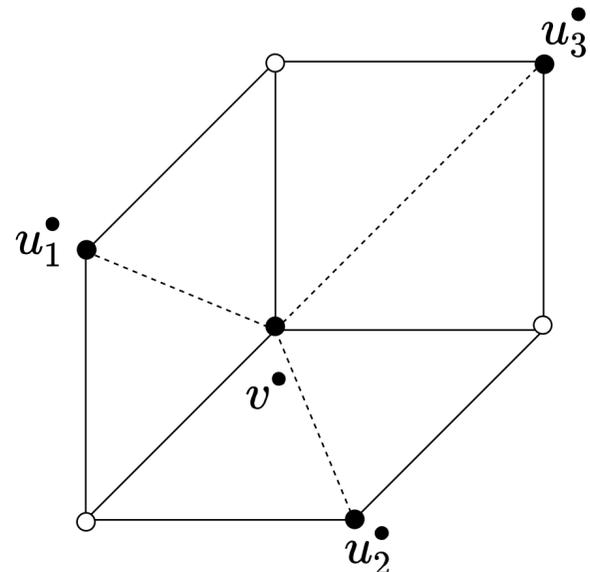
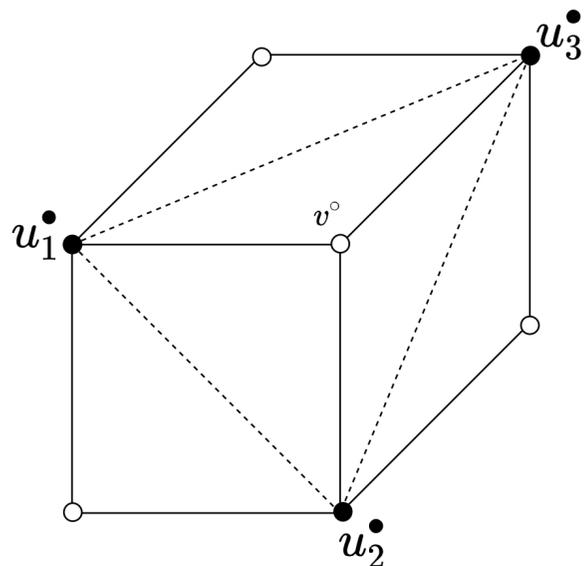


Poids Z-invariant de Baxter

- Fixer un paramètre elliptique q pour toute la grille
- Choisir pour *angles abstraits* $\bar{\theta}_i$ les *angles géométriques* des losanges
- Lien entre géométrie et modèle

Les poids Z-invariants de Baxter sur les graphes isoradiaux

- Graphe isoradial : Graphe planaire où chaque face est inscrite dans un cercle rayon δ , centre du cercle \in face



Poids Z-invariant de Baxter

- Fixer un paramètre elliptique q pour toute la grille
- Choisir pour *angles abstraits* $\bar{\theta}_i$ les *angles géométriques* des losanges
- Lien entre géométrie et modèle

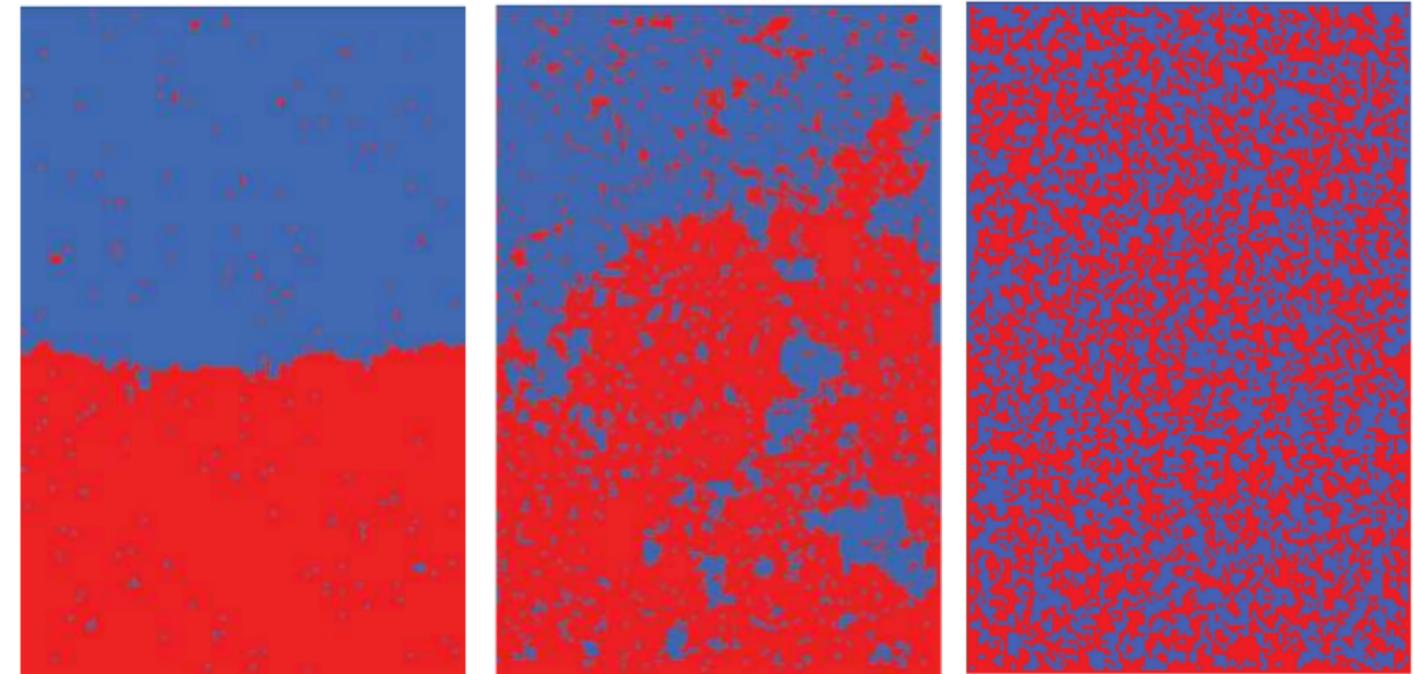
Transformation triangle-étoile sur graphe isoradial

BAP : les angles géométriques $\bar{\theta}_i$ sont bornés inférieurement

Les poids Z-invariants de Baxter sur les graphes isoradiaux

Avec la paramétrisation de Baxter

- Transition de phase du second ordre
divergence logarithmique de f'' par
Boutillier, de Tilière et Raschel (2017)
- Criticalité pour $q = 0$
- En suivant travaux de Lis (2014)
Magnétisation positive $q > 0$
Décorrélation exponentielle $q < 0$
- Décorrélation polynomiale par Chelkak
et Smirnov (2011) $q = 0$



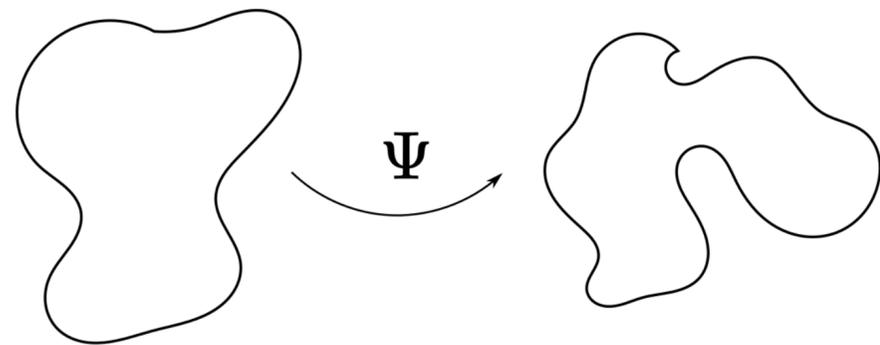
Poids Z-invariant de Baxter

- Fixer un paramètre elliptique q
pour toute la grille
- Choisir pour *angles abstraits* $\bar{\theta}_i$
les *angles géométriques* des
losanges
- Lien entre géométrie et modèle

Invariance conforme sur le réseau carré

- Invariance conforme du modèle d'Ising critique prédite par physiciens de la CFT : Belavin, Polyakov Zamolodchikov (1980')
- Diverse simulations numériques par Langlands et collaborateurs (1990')
- Introduction du SLE par Schramm (2000)
- Utilisation de l'analyse complexe discrète par Keynon (Dimères 2000-2002) Smirnov (Percolation 2001)

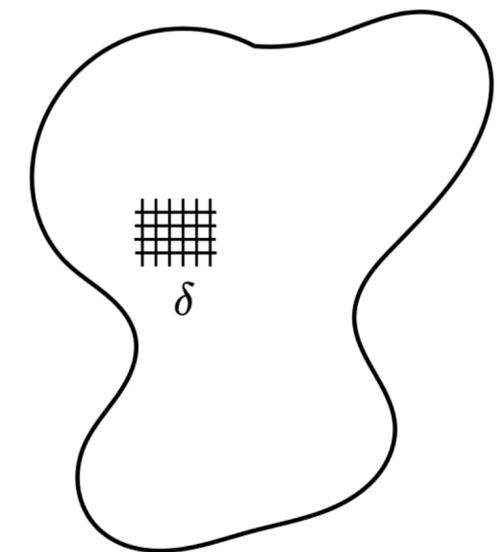
Limite d'échelle existe, et compose bien avec les applications conformes entre domaines simplement connexes



$\Psi(\text{limite d'echelle sur } \Omega)$

||

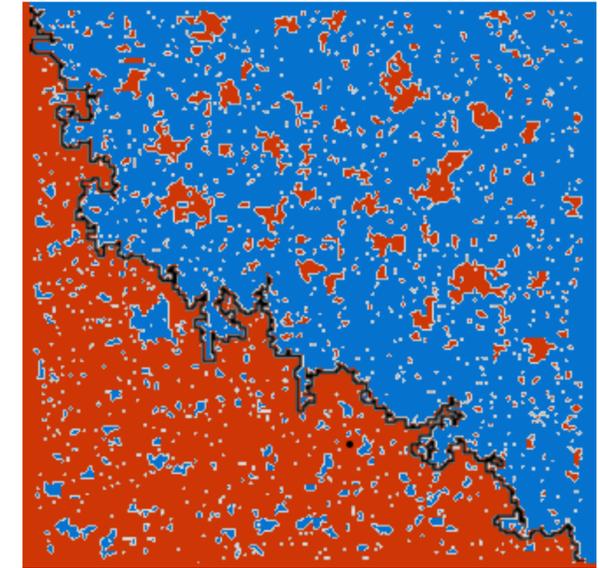
limite d'echelle sur $\Psi(\Omega)$



Discrétisation d'un domaine

Invariance conforme sur le réseau carré

- Convergence interface FK vers SLE(16/3) par Smirnov (2006)
puis interface spins vers SLE(3) Smirnov et al. (2013)



- Convergence de l'ensemble des boucles par Benoist et Hongler vers CLE(3) (2019)

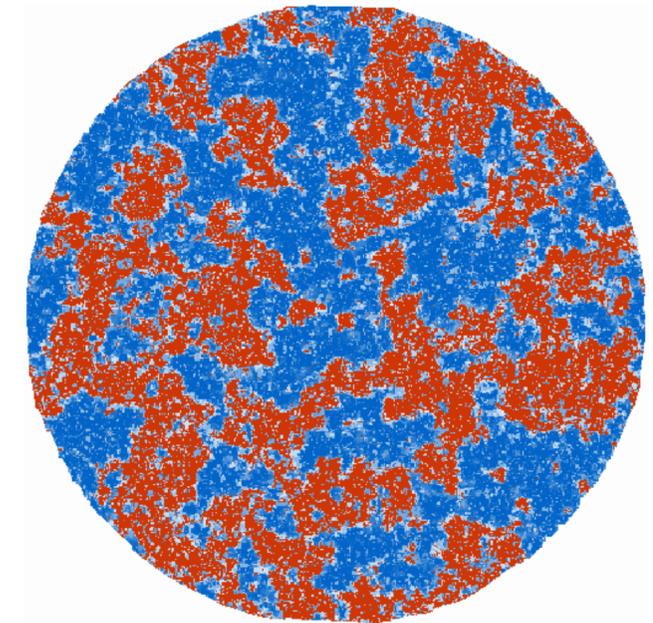
- Convergence de la densité d'énergie normalisée $\varepsilon_{a\delta} := \sigma_{a_+^\delta} \sigma_{a_-^\delta}$ par Hongler et Smirnov (2013) vers la *métrique hyperbolique* (+ thèse d'Hongler 2010)

$$\sqrt{2} \frac{\mathbb{E}_{\Omega_\delta}[\varepsilon_{a\delta}] - \mathbb{E}_{\mathbb{C}_\delta}[\varepsilon_{a\delta}]}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \ell_\Omega(a)$$

- Convergence des corrélations de spins par Chelkak Hongler et Izyurov

$$\delta^{-\frac{n}{8}} \mathbb{E}_{\Omega_\delta}^+ [\sigma_{u_1^\delta} \cdots \sigma_{u_n^\delta}] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathcal{C}_\sigma^n \langle \sigma_{u_1} \cdots \sigma_{u_n} \rangle_\Omega^+$$

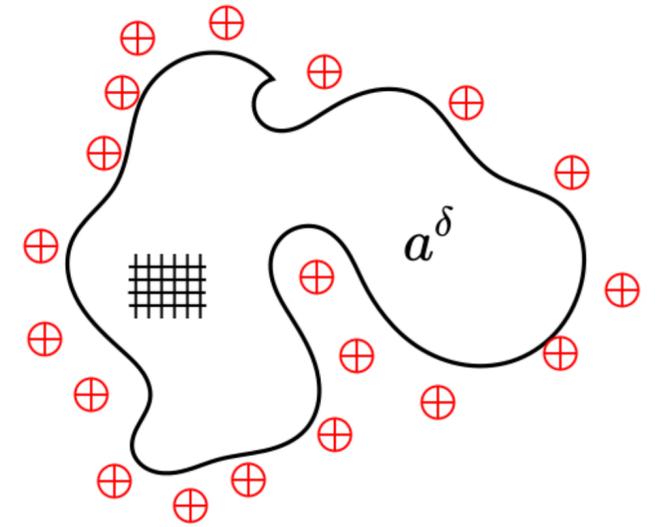
$$\Psi[\text{SLE}(\Omega)] = \text{SLE}(\Psi[\Omega])$$



$$\Psi[\text{CLE}(\Omega)] = \text{CLE}(\Psi[\Omega])$$

Invariance conforme sur le réseau carré

- Convergence interface FK vers SLE(16/3) par Smirnov (2006) puis interface spins vers SLE(3) Smirnov et al. (2013)



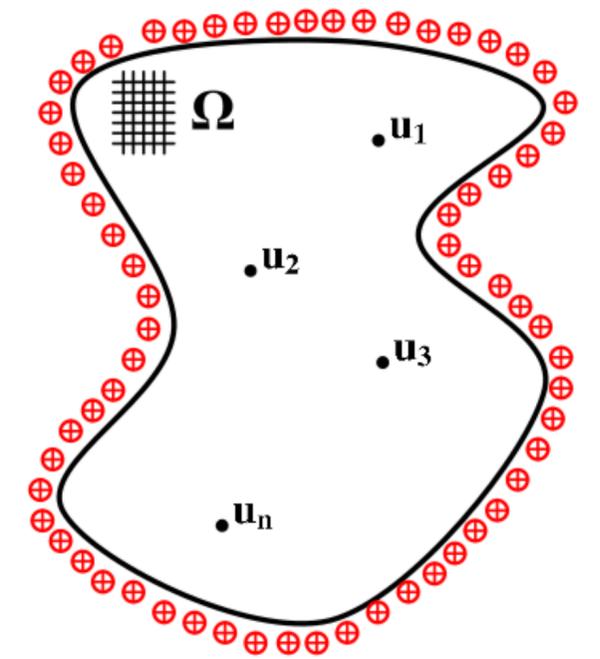
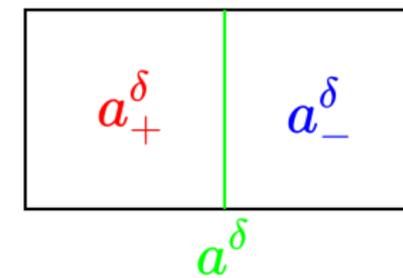
- Convergence de l'ensemble des boucles par Benoist et Hongler vers CLE(3) (2019)

- Convergence de la densité d'énergie normalisée

$\varepsilon_{a^\delta} := \sigma_{a_+^\delta} \sigma_{a_-^\delta}$ par Hongler et Smirnov (2013) vers la *métrique hyperbolique* (+ thèse d'Hongler 2010)

$$\ell_\Omega(a) = |\Psi'(a)| \ell_{\Psi(\Omega)}(\Psi(a))$$

$$\sqrt{2} \frac{\mathbb{E}_{\Omega_\delta}[\varepsilon_{a^\delta}] - \mathbb{E}_{\mathbb{C}_\delta}[\varepsilon_{a^\delta}]}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \ell_\Omega(a)$$



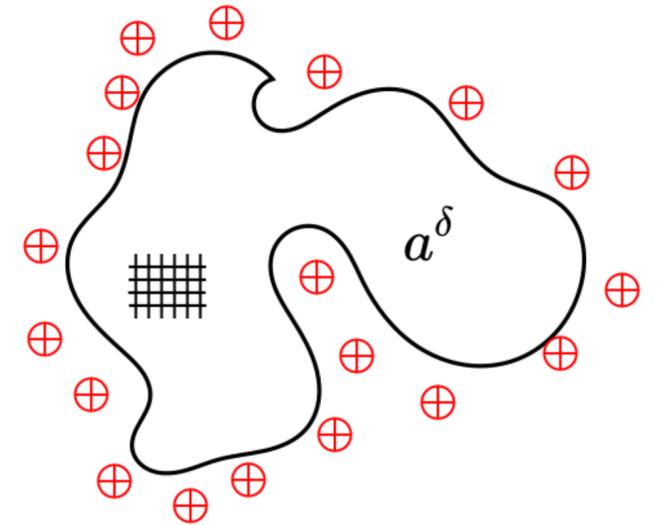
- Covariance conforme des corrélations de par Chelkak Hongler et Izyurov (2015)

$$\delta^{-\frac{n}{8}} \mathbb{E}_{\Omega_\delta}^+ [\sigma_{u_1^\delta} \cdots \sigma_{u_n^\delta}] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathcal{C}_\sigma^n \langle \sigma_{u_1} \cdots \sigma_{u_n} \rangle_\Omega^+$$

$$\langle \sigma_{u_1} \cdots \sigma_{u_n} \rangle_\Omega^+ = \langle \sigma_{\Psi(u_1)} \cdots \sigma_{\Psi(u_n)} \rangle_{\Psi(\Omega)}^+ \prod_{i \leq n} |\Psi'(u_i)|^{\frac{1}{8}}$$

Invariance conforme sur le réseau carré

- Convergence interface FK vers SLE(16/3) par Smirnov (2006) puis interface spins vers SLE(3) Smirnov et al. (2013) ✓



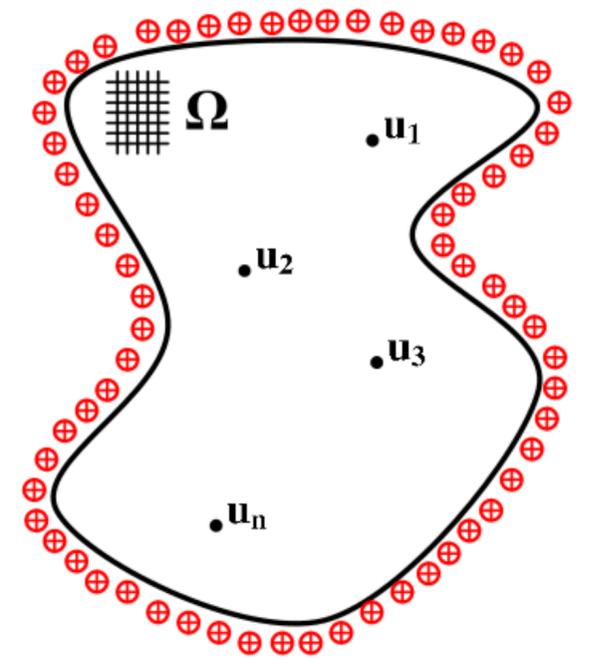
- Convergence de l'ensemble des boucles par Benoist et Hongler vers CLE(3) (2019) ✓

- Convergence de la densité d'énergie normalisée $\varepsilon_{a^\delta} := \sigma_{a^\delta_+} \sigma_{a^\delta_-}$ par Hongler et Smirnov (2013) vers la *métrique hyperbolique* (+ thèse d'Hongler 2010) ✓

$$\sqrt{2} \frac{\mathbb{E}_{\Omega_\delta}[\varepsilon_{a^\delta}] - \mathbb{E}_{\mathbb{C}_\delta}[\varepsilon_{a^\delta}]}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \ell_\Omega(a)$$

$$\ell_\Omega(a) = |\Psi'(a)| \ell_{\Psi(\Omega)}(\Psi(a))$$

- Covariance conforme des corrélations de par Chelkak Hongler et Izyurov (2015) ✗



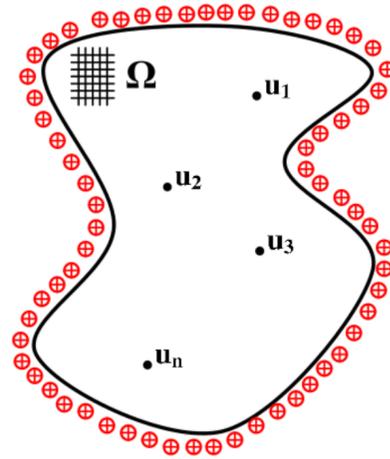
$$\delta^{-\frac{n}{8}} \mathbb{E}_{\Omega_\delta}^+ [\sigma_{u_1^\delta} \cdots \sigma_{u_n^\delta}] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathcal{C}_\sigma^n \langle \sigma_{u_1} \cdots \sigma_{u_n} \rangle_\Omega^+$$

$$\langle \sigma_{u_1} \cdots \sigma_{u_n} \rangle_\Omega^+ = \langle \sigma_{\Psi(u_1)} \cdots \sigma_{\Psi(u_n)} \rangle_{\Psi(\Omega)}^+ \prod_{i \leq n} |\Psi'(u_i)|^{\frac{1}{8}}$$

Universalité des corrélations sur les graphes isoradiaux

- Régime massif $q = \frac{1}{2}m\delta$
sur le réseau de pas δ

- $m \in \mathbb{R}$, appelé masse



Théorème: Chelkak, Izyurov, M.

- Il existe une fonction de corrélation en volume infini pour $m \in \mathbb{R}$

$$\delta^{-\frac{1}{4}} \mathbb{E}_{\mathcal{G}_\delta}^{(m)} [\sigma_{u_1^\delta} \sigma_{u_2^\delta}] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathcal{C}_\sigma^2 \cdot \mathbb{E}(|u_2 - u_1|, m)$$

- Invariance par rotation et universalité sur les graphes isoradiaux
- Normalisation du réseau carré
- Universalité sur simplement connexes à bord lisse

- Formule de Baxter $\mathbb{E}_{\mathcal{G}_1^+} [\sigma_0] = (1 - k^2)^{\frac{1}{4}}$

Théorème: Park (2018)

Pour $m \leq 0$ et $\partial\Omega$ lisse, réseau carré massif, \exists une fonction de corrélation

$$\delta^{-\frac{n}{8}} \mathbb{E}_{\Omega_\delta}^{+, (m)} [\sigma_{u_1^\delta} \cdots \sigma_{u_n^\delta}] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathcal{C}_\sigma^n \langle \sigma_{u_1} \cdots \sigma_{u_n} \rangle_{\Omega}^{+, (m)}$$

Hypothèse sur $\partial\Omega$ importante (Park 2021)

Méthode pour trouver la limite d'échelle

Observables holomorphes discrètes $F^\delta(z)$, à partir d'Ising caractérisées par

- Holomorphie discrète

$$\oint F^\delta(z) dz = 0$$

- BVP sur $\partial\Omega_\delta$

$$H[F^\delta] = \int \text{Im}[F^\delta(z)^2 dz] = 0$$

- Singularités discrète

Smirnov, Hongler
Chelkak, Izyurov



Convergence
 $\delta \rightarrow 0$

- f holomorphe

- $\int \text{Im}[f^2 dz] = 0$ sur $\partial\Omega$

- Singularité dans le continu

Co-invariance de f prouve l'invariance conforme du modèle

Méthode pour trouver la limite d'échelle

Observables massives-holomorphes $F_m^\delta(z)$, $q = \frac{1}{2}m\delta$

- Holomorphie massive discrète

$$\oint F_m^\delta(z) dz = \iint m F_m^\delta(z) dA(z)$$

- BVP sur $\partial\Omega_\delta$

$$H[F_m^\delta] = \int \text{Im}[F_m^\delta(z)^2 dz] = 0$$

- Singularités discrète

Smirnov, Hongler
Chelkak, Izyurov
Park



Convergence
 $\delta \rightarrow 0$

- f massive-holomorphe
 $\bar{\partial}f + im\bar{f} = 0$

- $\int \text{Im}[f^2 dz] = 0$ sur $\partial\Omega$

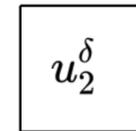
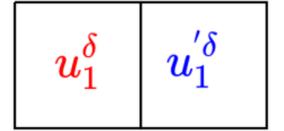
- Singularité dans le continu

Existence d'une limite d'échelle du modèle

Universalité des corrélations sur les graphes isoradiaux

- Dérivée logarithmique des corrélations (CHI 2015, Park 2018)

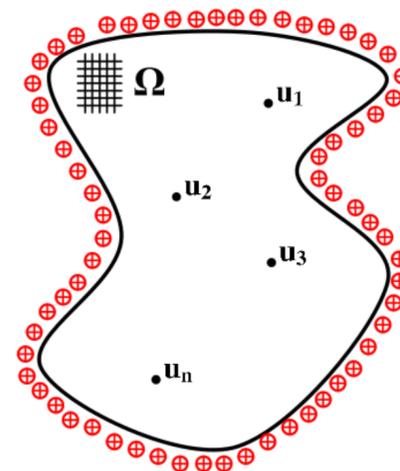
$$\frac{\mathbb{E}_{\Omega_\delta}^+ [\sigma_{u_1^\delta} \sigma_{u_2^\delta}]}{\mathbb{E}_{\Omega_\delta}^+ [\sigma_{u_1'^\delta} \sigma_{u_2^\delta}]} = 1 + \operatorname{Re} \left[\mathcal{A}_{(\Omega, u_1, u_2)}^{(m)} \cdot (u_1^\delta - u_1'^\delta) \right] + o(\delta)$$



- $\mathbb{E}_{\Omega_\delta}^{+, (m)} [\sigma_{u_1^\delta} \sigma_{u_2^\delta}] = \oint \operatorname{Im} [F_m^\delta(z) \cdot G_{[u_1]}^\delta(z) dz]$ via formule de Cauchy pour F_m^δ
 (analogue de $F(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint F(z) \cdot \frac{1}{z-a} dz$) avec $G_{[u_1]}^\delta$ explicite via exponentielles discrètes

- Corrélation continue primitive naturelle de la forme discrète, $\mathcal{A}_{(\Omega, u_1, u_2)}^{(m)}$ coeff expansion de f

$$\langle \sigma_{u_1} \sigma_{u_2} \rangle_{\Omega}^{+, (m)} := \exp \int \operatorname{Re} [\mathcal{A}_{(\Omega, w, s)}^{(m)} dw ds]$$



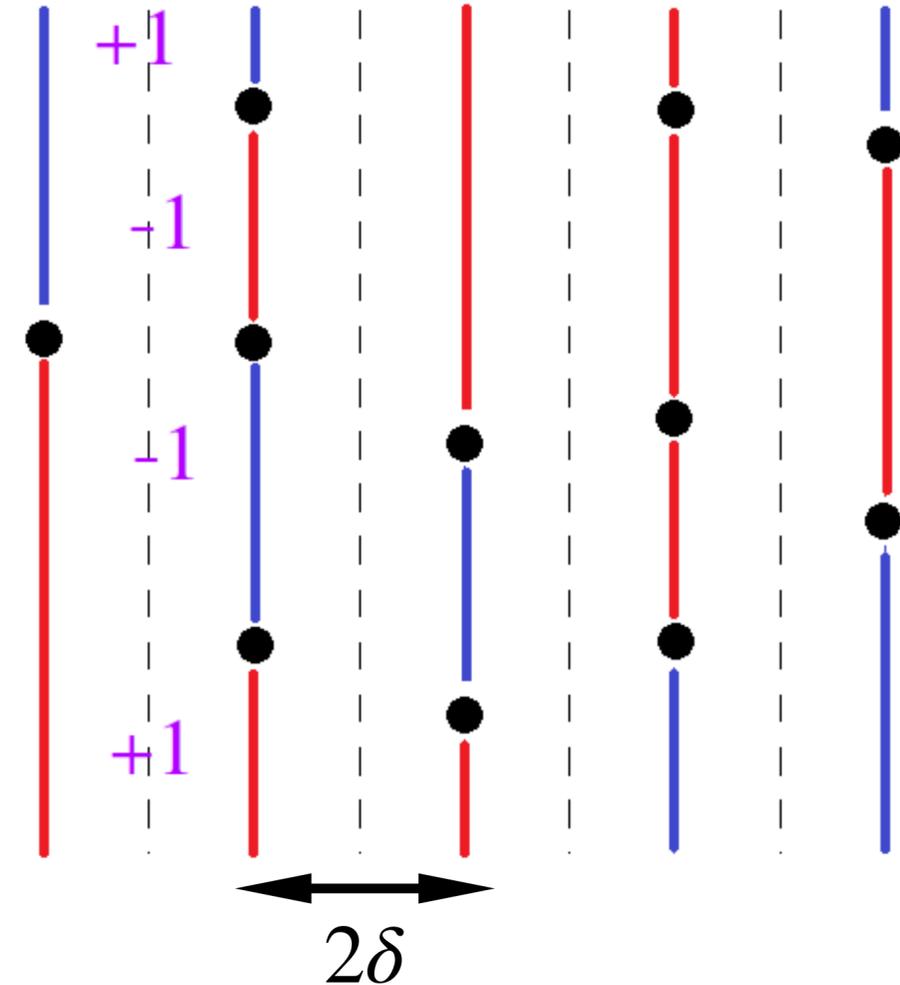
Normalisation du réseau rect
McCoy-Wu (preuve chapitre 2)

Le modèle d'Ising quantique

- Modèle de spins sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$
- Deux paramètres positifs θ, τ
- $PPP^\bullet(\tau)$ indépendants sur les lignes Ω_δ^\bullet
- Configuration admissibles de $+1$ ou -1 , flip autorisé sur points de $PPP^\bullet(\tau)$

$$\mathbb{P}[\sigma] = \frac{1}{Z} \exp[\theta \mathcal{H}^\bullet(\sigma)]$$

$$\mathcal{H}^\bullet(\sigma) := \text{Leb}^\bullet(\varepsilon) = \sum_{\Omega^\bullet} \int \sigma_{y^+} \sigma_{y^-} dy$$



Hamiltonien favorise les voisins verticaux alignés

Le modèle d'Ising quantique

Transition de phase du modèle

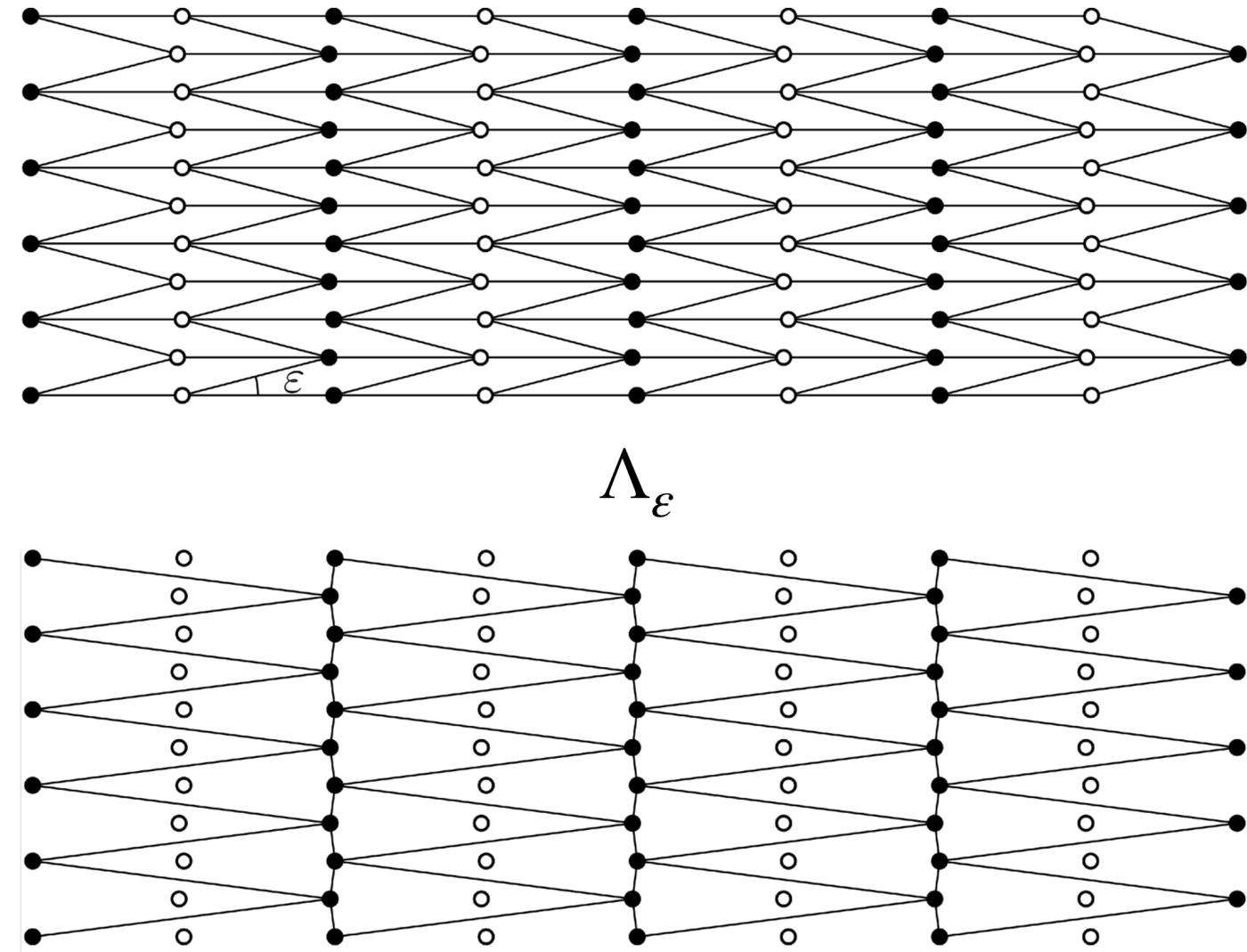
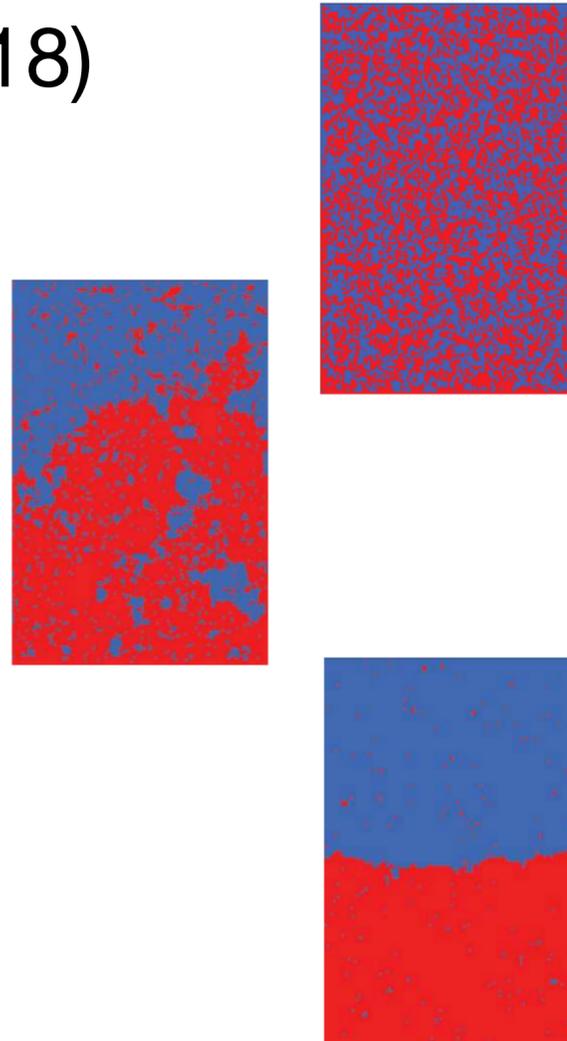
Björnberg-Grimmett (2009)

Duminil-Li-Manolescu (2018)

• Sur-critique $\frac{\theta}{\tau} < 2$

• Critique $\frac{\theta}{\tau} = 2$

• Sous-critique $\frac{\theta}{\tau} > 2$



Limite sur les graphes isoradiaux aplatis
lorsque ε tend vers 0

Invariance conforme de l'interface
FK vers SLE(16/3) par Li

Invariance conforme du modèle quantique

Théorèmes: Li, M.

- Modèle critique sur Ω_δ^\bullet

$$\tau = \frac{1}{\delta} \text{ et } \theta = \frac{2}{\delta}$$

- Densité énergie normalisée

$$\varepsilon_a = \sigma_{a+\delta} \sigma_{a-\delta} - \frac{2}{\pi}$$

- Sur Λ_ε isoradial densité

$$\text{d'énergie } \frac{2\varepsilon}{\pi \cos \frac{\pi}{2} - \varepsilon}$$

Boutillier, de Tilière (2011)

- $\theta^* = 2\tau$

- Covariance conforme densité d'énergie critique

$$\frac{\mathbb{E}_{\Omega_\delta^\bullet}^+[\varepsilon_{a^\delta}]}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \ell_\Omega(a)$$

$$\frac{\mathbb{E}_{\Omega_\delta^\bullet}^+[\varepsilon_{a_1^\delta} \cdots \varepsilon_{a_n^\delta}]}{\delta^n} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \langle \varepsilon_{a_1} \cdots \varepsilon_{a_n} \rangle_\Omega^+$$

- Covariance conforme des corrélations critiques

$$\delta^{-\frac{n}{8}} \mathbb{E}_{\Omega_\delta^\bullet}^+ [\sigma_{u_1^\delta} \cdots \sigma_{u_n^\delta}] \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathcal{C}_\sigma^n \langle \sigma_{u_1} \cdots \sigma_{u_n} \rangle_\Omega^+$$

Invariance conforme du modèle quantique

Théorèmes: Li, M.

- Invariance par rotation du modèle

- Magnétisation en volume infini $\frac{\theta}{\tau} > 2$

$$\mathcal{M}(\theta, \theta^*) = \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^+[\sigma_0] = (\theta^2 + \theta^{*2}) \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta^*}\right)^2\right)^{\frac{1}{8}}$$

- Distance de décorrélation $\frac{\theta}{\tau} < 2$

$$\xi = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^+[\sigma_0 \sigma_n] = \frac{1}{2} \log \frac{\theta}{\theta^*}$$

- Corrélation critique

$$\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^+[\sigma_0 \sigma_n] \sim \frac{\mathcal{C}_{\sigma}^2}{(2n)^{\frac{1}{4}}}$$

- Extension de l'AC au réseau semi-discret par Li et Bjornberg (2016-18)
- Introduction du formalisme de Kadanoff-Ceva semi-discret pour les corrélateurs
- Normalisations et constantes via polynômes orthogonaux (adaptation chapitre 2)
- Impossible d'échanger directement $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\delta \rightarrow 0$ sans perdre la dépendance verticale

Interprétation d'un opérateur quantique

- Chaîne quantique de spins sur \mathbb{Z} par Pfeuty
- Opérateurs de Pauli $\sigma^{(1)} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma^{(3)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Opérateur $\sigma_x^{(k)}$ coïncide avec l'identité en dehors de la coordonnée x

- $\mathbf{H} := -\theta \sum_{x \sim y} \sigma_x^{(3)} \sigma_y^{(3)} - \tau \sum_x \sigma_x^{(1)}$ Hamiltonien

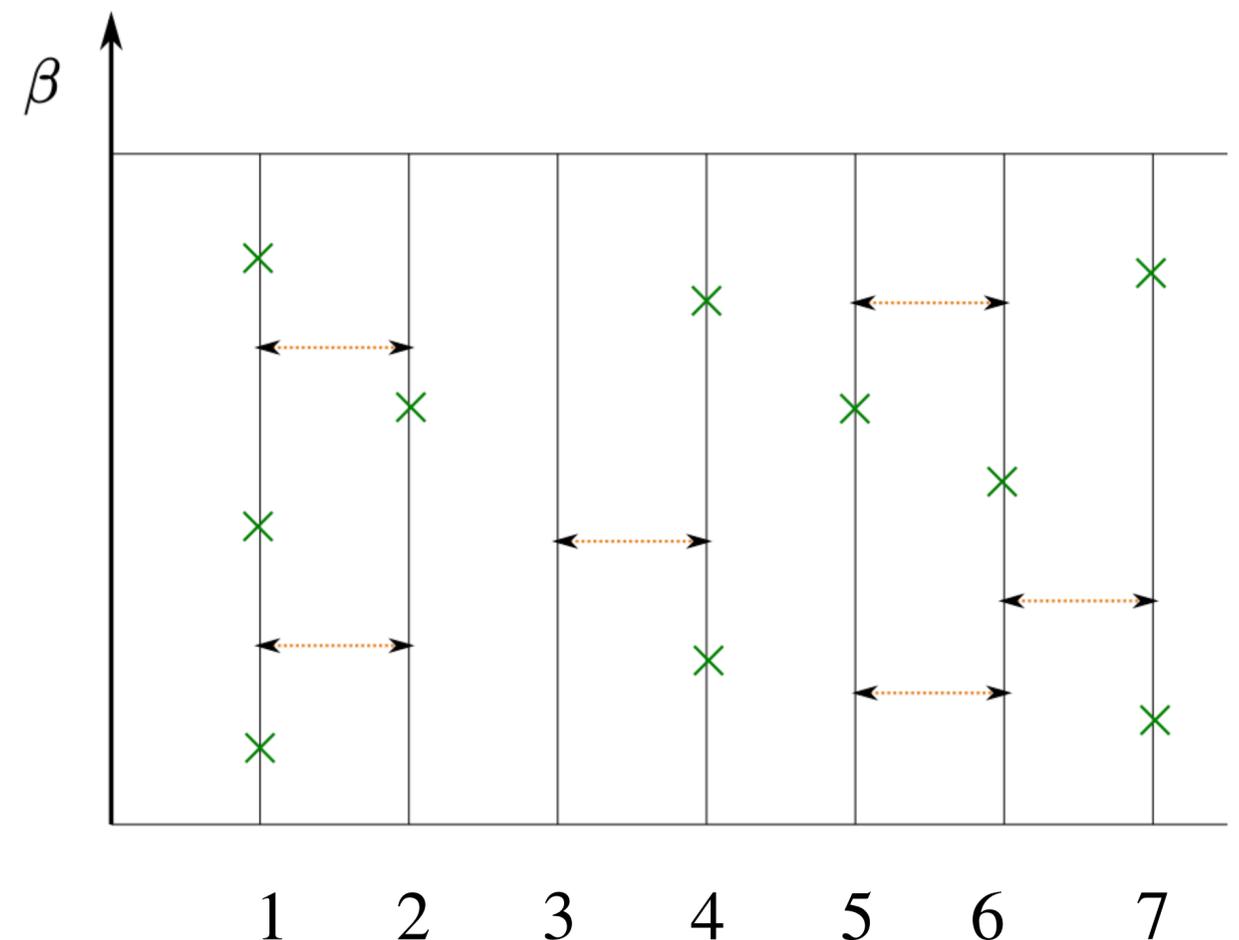
quantique qui agit sur $\bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^2$ ou $\bigotimes_{[-n;n]} \mathbb{C}^2$

- Etudie l'opérateur $\exp(-\beta \mathbf{H}_n)$, intégrale de chemin par Aizenmann, Klein, Newman

$$e^{-\beta \mathbf{H}_n} = \int \mathcal{K}_n^{(\beta)}(\omega) d\omega$$

$\xi_{i,j}$ et ξ_i processus de Poisson IID jusqu'au temps β , apparition d'opérateur $K_{i,j}$ et K_i qui sont CL de $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(3)}$ et Id

$K_n^{(\beta)}(\omega)$ est le produit temporel



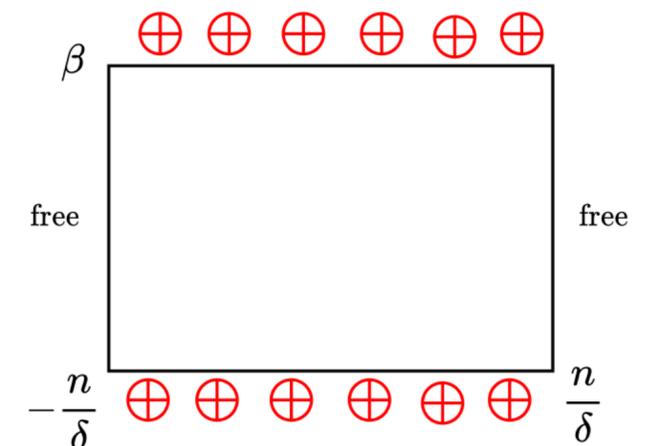
Interprétation d'un opérateur quantique

- Travaux de Ioffe (2009) relient les corrélations de la représentation graphique sur $\left[-\frac{n}{\delta}; \frac{n}{\delta}\right]$ avec des spins sur $\left[-\frac{n}{\delta}; \frac{n}{\delta}\right]$ et l'intégrale de chemin de l'opérateur $\exp(-\beta \mathbf{H}_{\frac{n}{\delta}})$
- Expressions explicites pour la limite d'échelle de la représentation graphique donnent l'expression explicite des corrélations du modèle quantique.

- Fixe $(x, t) \in \left(\frac{1}{\delta} \mathbb{Z} \times \mathbb{R}\right)$. Alors $\mathbb{E}_{\left[\pm \frac{n}{\delta}\right] \times [0; \beta]}^{+f+f} \left[\sigma_{\left(\frac{x}{\delta}, t\right)} \sigma_{\left(\frac{x}{\delta} + 1, t\right)} \right] = \frac{\langle + | e^{-\frac{t}{\delta} \mathbf{H}_{\frac{n}{\delta}}} \sigma_{\frac{x}{\delta}}^{(3)} \sigma_{\frac{x}{\delta} + 1}^{(3)} e^{-\frac{\beta - t}{\delta} \mathbf{H}_{\frac{n}{\delta}}} | + \rangle}{\text{Tr} \exp \left[-\frac{\beta}{\delta} \mathbf{H}_{\frac{n}{\delta}} \right]}$

- Limite thermodynamique $n \rightarrow \infty$ puis état fondamental $\beta \rightarrow \infty$ donne $\mathbb{E}_{\mathbb{H}_{\delta}}^{+} \left[\sigma_{\left(\frac{x}{\delta}, t\right)} \sigma_{\left(\frac{x}{\delta} + 1, t\right)} \right]$

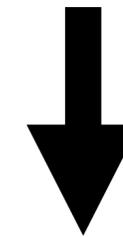
- Corrélation explicite sur le demi-plan $\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{H}_{\delta}}^{+} \left[\sigma_{\left(\frac{x}{\delta}, t\right)} \sigma_{\left(\frac{x}{\delta} + 1, t\right)} \right] - \frac{2}{\pi}}{\delta} \longrightarrow \frac{1}{\pi t}$



Et après ?

- Compréhension très précise des grilles isoradiales critiques et massives où seules manque l'étude des interfaces massives (Chelkak, Park, Wan 2022+)
- Cadre isoradial est trop restreint, CNS sur l'existence d'un graphe isoradial par Kenyon et Schlenker
- Graphes critiques doublement périodiques, Cimasoni et Duminil-Copin (2012)
- Ising sur les cartes aléatoire , conjecture de convergence vers la Gravité Quantique de Liouville

- Criticalité doit être abstraite
- Limite d'échelle requiert un plongement



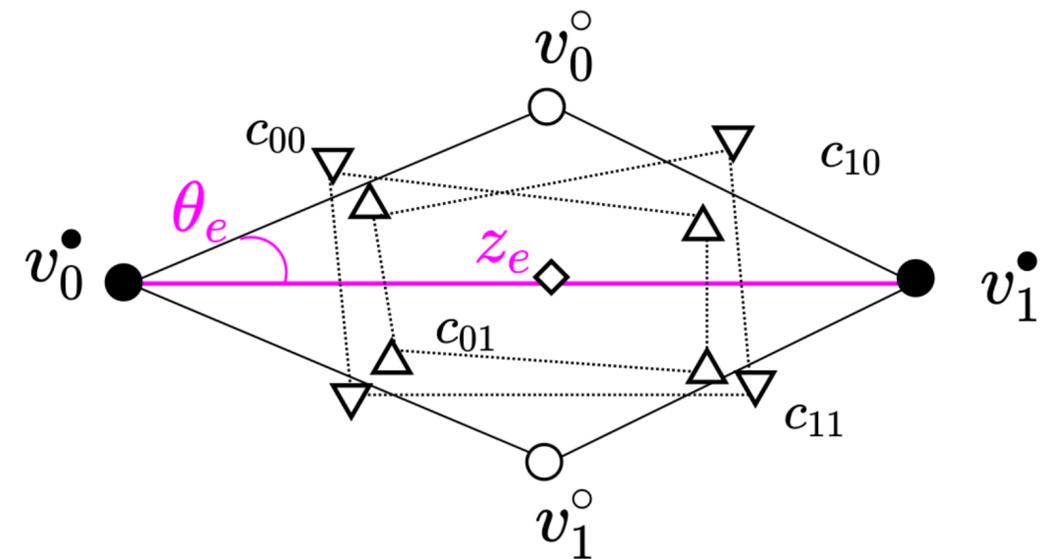
Le choix du plongement (dessin) est crucial

L'idée de la construction

- Construire un plongement à partir d'un graphe modéré (G, x) , puis prouver, lorsque cela est possible, des résultats de convergence. Idée de Chelkak (2017)

Une observation sur les graphes isoradiaux critiques

- G^\bullet le graphe primal, notés v^\bullet
- G° le graphe dual, notés v°
- $\Lambda(G) := G^\bullet \cup G^\circ$, bipartite
- $\Upsilon(G)$ des coins, matérialisé par des coins $c_{pq} = (v_p^\bullet v_q^\circ)$ notés \triangle
- $\theta_e = \arctan(x_e)$



Equation de propagation
(Dotkenso, Perk, Mercat)

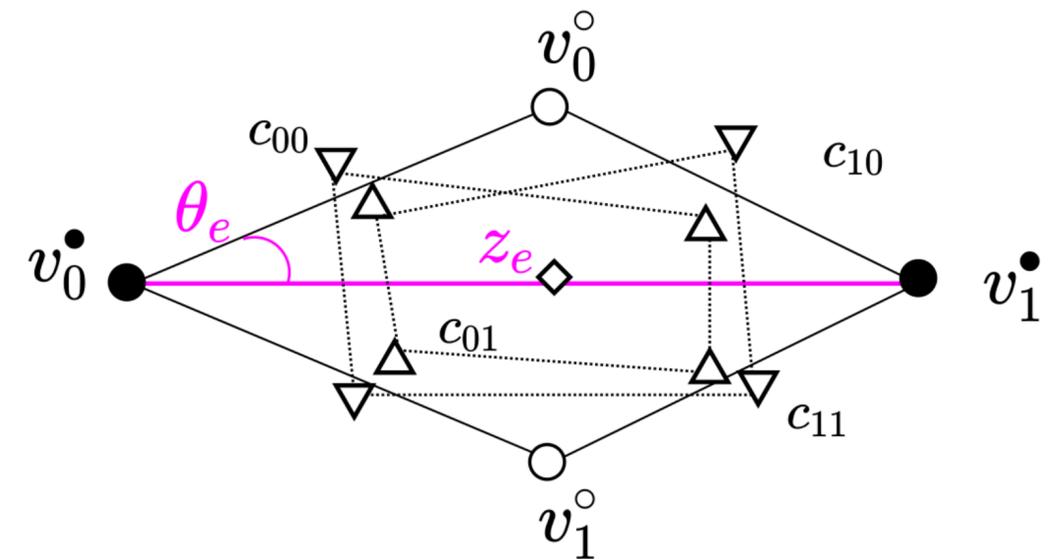
$$X(c_{pq}) = \cos \theta_e X(c_{c,1-q}) + \sin \theta_e X(c_{1-p,q})$$

L'idée de la construction

- Construire un plongement à partir d'un graphe modéré (G, x) , puis prouver, lorsque cela est possible, des résultats de convergence. Idée de Chelkak (2017)

Une observation sur les graphes isoradiaux critiques

- Construction de corrélateur ordre-désordre
- Sur les graphes isoradiaux, équivalent à l'holomorphie discrète de Smirnov
- $\mathcal{X}(c) := \left(\Gamma^\delta[v^\bullet(c)] - \Gamma^\delta[v^\circ(c)] \right)^{-\frac{1}{2}}$ solution de l'équation de propagation
- Primitive discrète de \mathcal{X}^2 est bien définie (EP)
- $\Gamma^\delta[v^\bullet(c)] - \Gamma^\delta[v^\circ(c)] = \overline{\mathcal{X}(c)^2}$



Equation de propagation
(Dotkenso, Perk, Mercat)

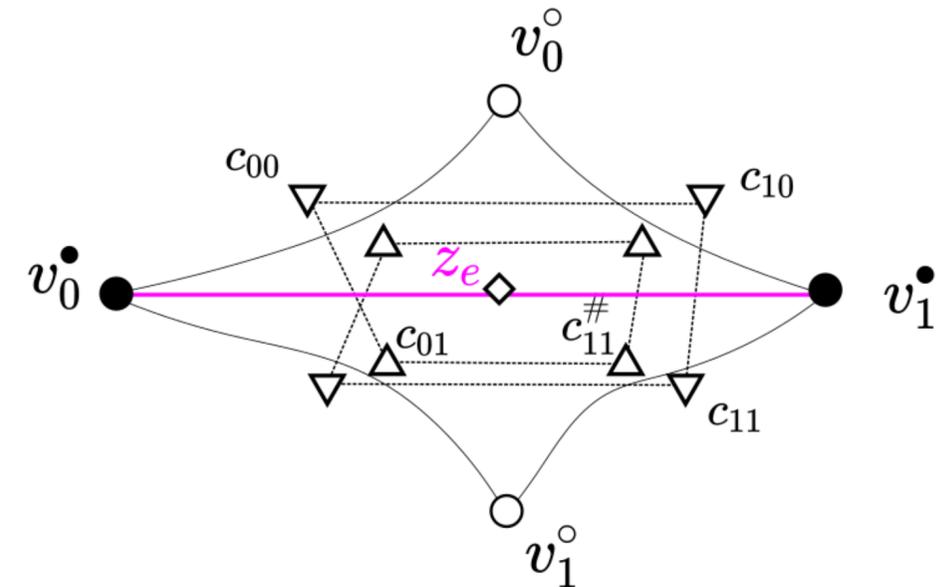
$$X(c_{pq}) = \cos \theta_e X(c_{c,1-q}) + \sin \theta_e X(c_{1-p,q})$$

L'idée de la construction

- Construire un plongement à partir d'un graphe modéré (G, x) , puis prouver, lorsque cela est possible, des résultats de convergence

Une observation sur les graphes isoradiaux critiques

- Construction de corrélateur ordre-désordre
- Sur les graphes isoradiaux, équivalent à l'holomorphie discrète de Smirnov
- $\mathcal{X}(c) := \left(\Gamma^\delta[v^\bullet(c)] - \Gamma^\delta[v^\circ(c)] \right)^{-\frac{1}{2}}$ solution de l'équation de propagation



- Primitive discrète de \mathcal{X}^2 est bien définie (EP)

Equation de propagation
(Dotkenso, Perk, Mercat)

- $\Gamma^\delta[v^\bullet(c)] - \Gamma^\delta[v^\circ(c)] = \overline{\mathcal{X}(c)^2}$

$$X(c_{pq}) = \cos \theta_e X(c_{c,1-q}) + \sin \theta_e X(c_{1-p,q})$$

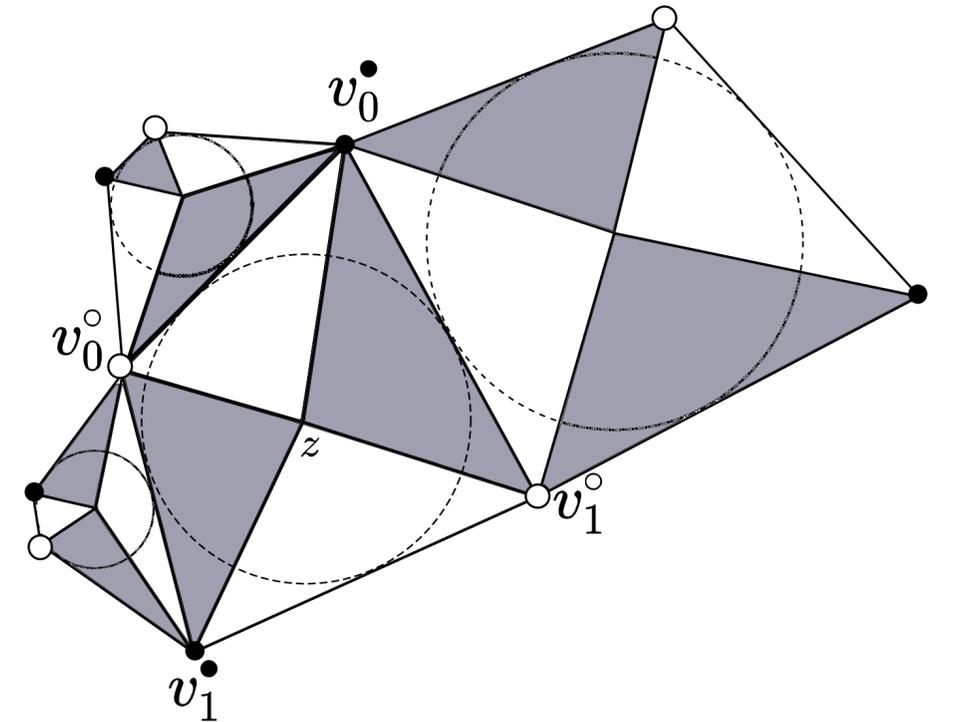
Reproduire pour un graphe abstrait

Définition d'un s-plongement

- On se donne (G, x, \mathcal{X}) , un graphe pondéré muni d'une solution complexe \mathcal{X} de l'EP
On définit le s-plongement de (G, x) via \mathcal{X} comme la fonction $\mathcal{S}_{\mathcal{X}} : \Lambda(G) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{X}}(v^\bullet(c)) - \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(v^\circ(c)) := \mathcal{X}(c)^2$$

- Définition est consistante
- Translation, rotation, homothétie, conjug des s-plongements le restent
- Géométriquement, une face de $z \in \Lambda(G)$ est un quadrilatère tangent de rayon r_z



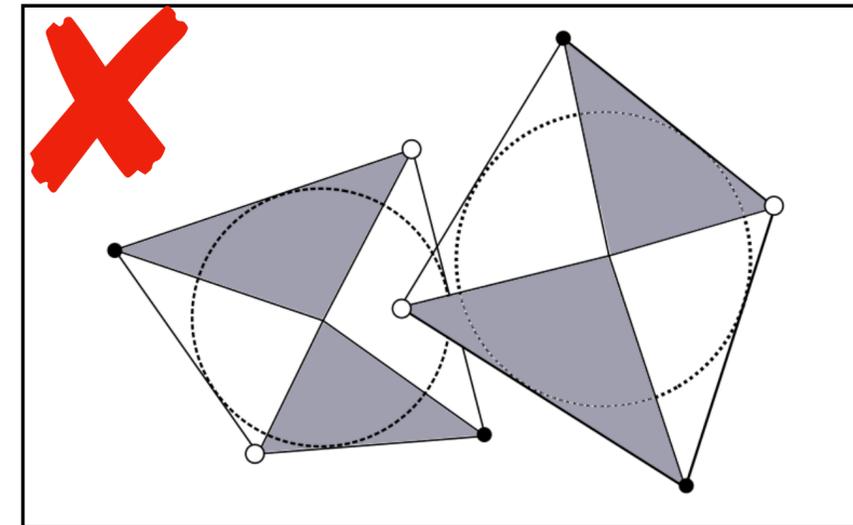
Procédure fonctionne pour tout graphe pondéré

Définition d'un s-plongement

- On se donne (G, x, \mathcal{X}) , un graphe pondéré muni d'une solution complexe \mathcal{X} de l'EP
On définit le s-plongement de (G, x) via \mathcal{X} comme la fonction $\mathcal{S}_{\mathcal{X}} : \Lambda(G) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{X}}(v^{\bullet}(c)) - \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(v^{\circ}(c)) := \mathcal{X}(c)^2$$

- Définition est consistante
- Translation, rotation, homothétie, conjug des s-plongements le restent
- Géométriquement, une face de $z \in \Lambda(G)$ est un quadrilatère tangent de rayon r_z

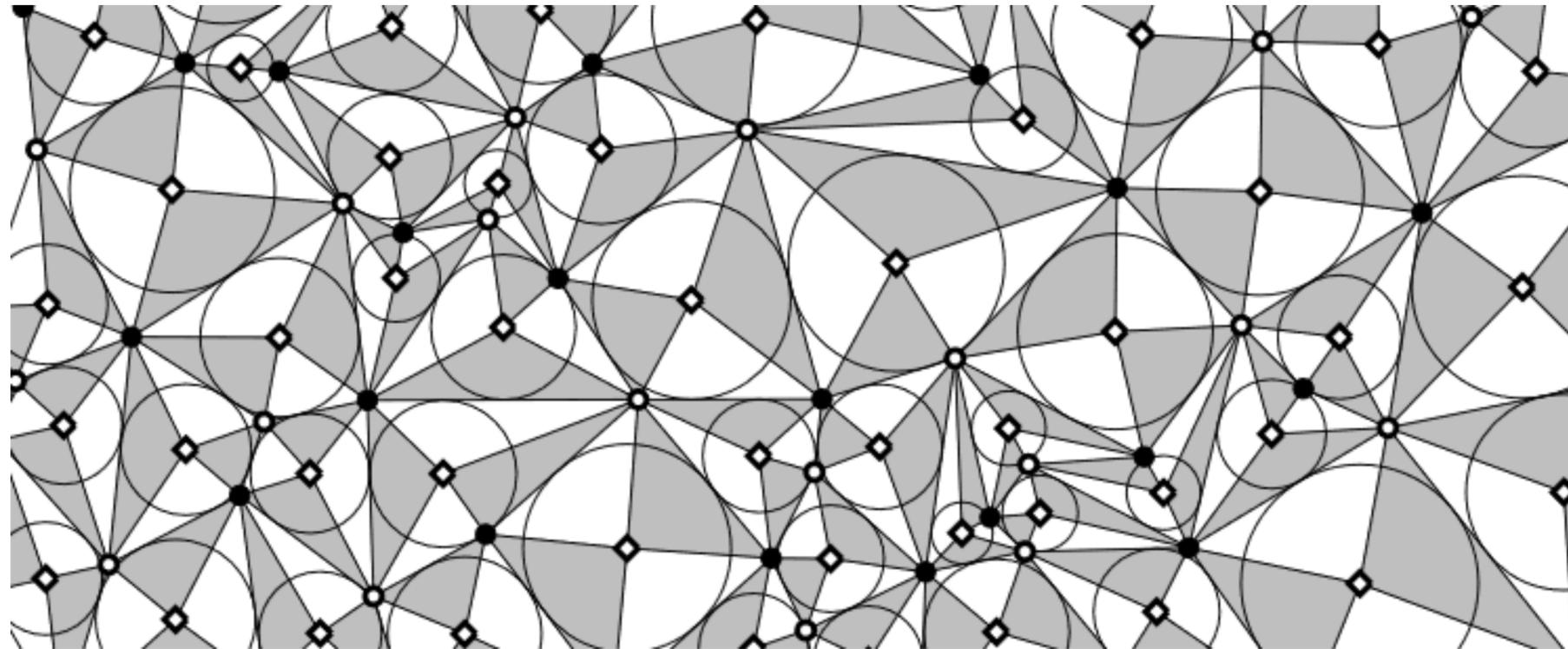


Le plongement n'est pas forcément propre, des faces peuvent se recouvrir selon le choix de \mathcal{X}

Définition du s-plongement

- On se donne (G, x, \mathcal{X}) , un graphe pondéré muni d'une solution complexe \mathcal{X} de l'EP
On définit le s-plongement de (G, x) via \mathcal{X} comme la fonction $\mathcal{S}_{\mathcal{X}} : \Lambda(G) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{X}}(v^{\bullet}(c)) - \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(v^{\circ}(c)) := \mathcal{X}(c)^2$$



Les résultats ne concernent que les s-plongement propres

(G, x, \mathcal{X})



Plongement propre



Convergence

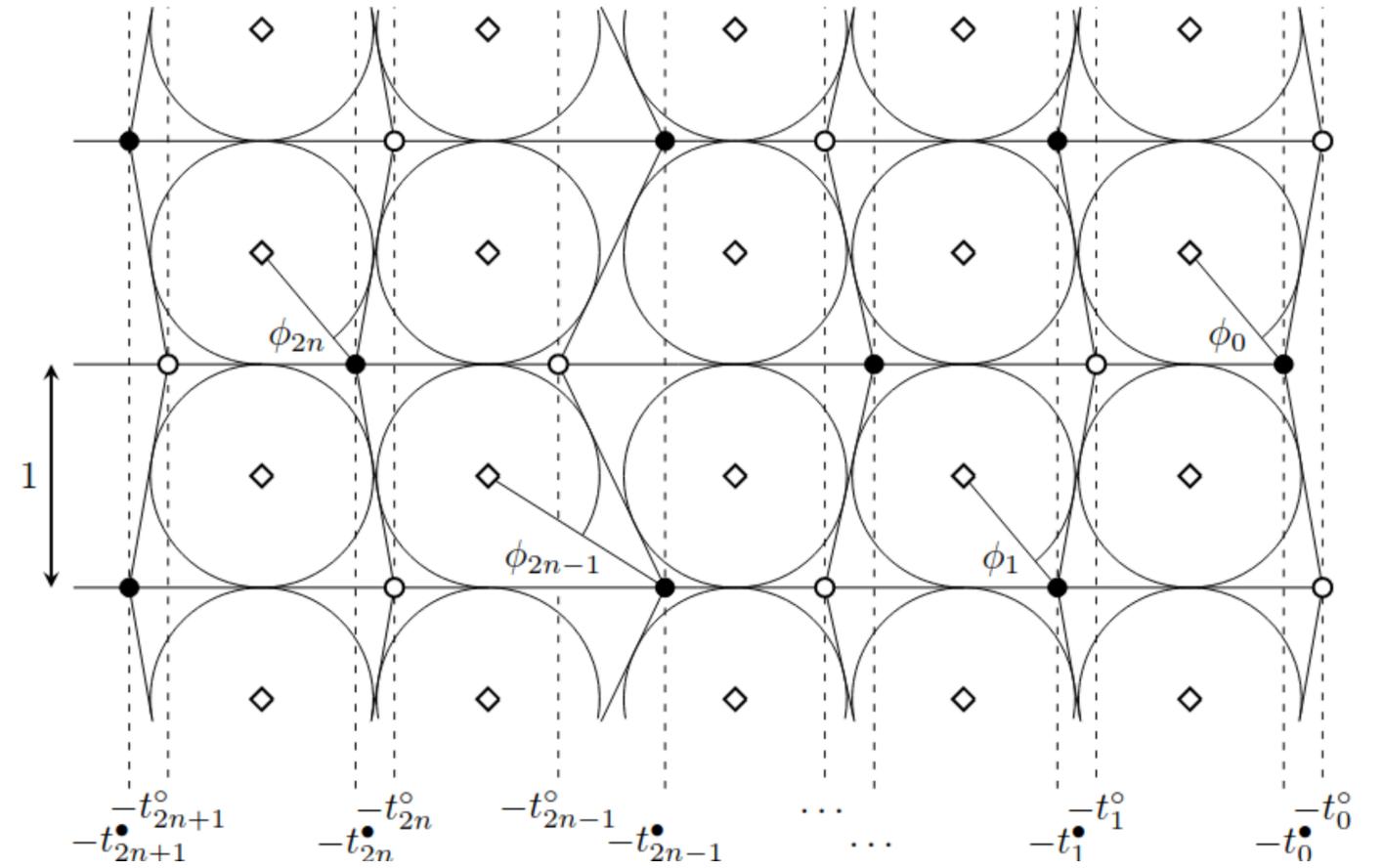
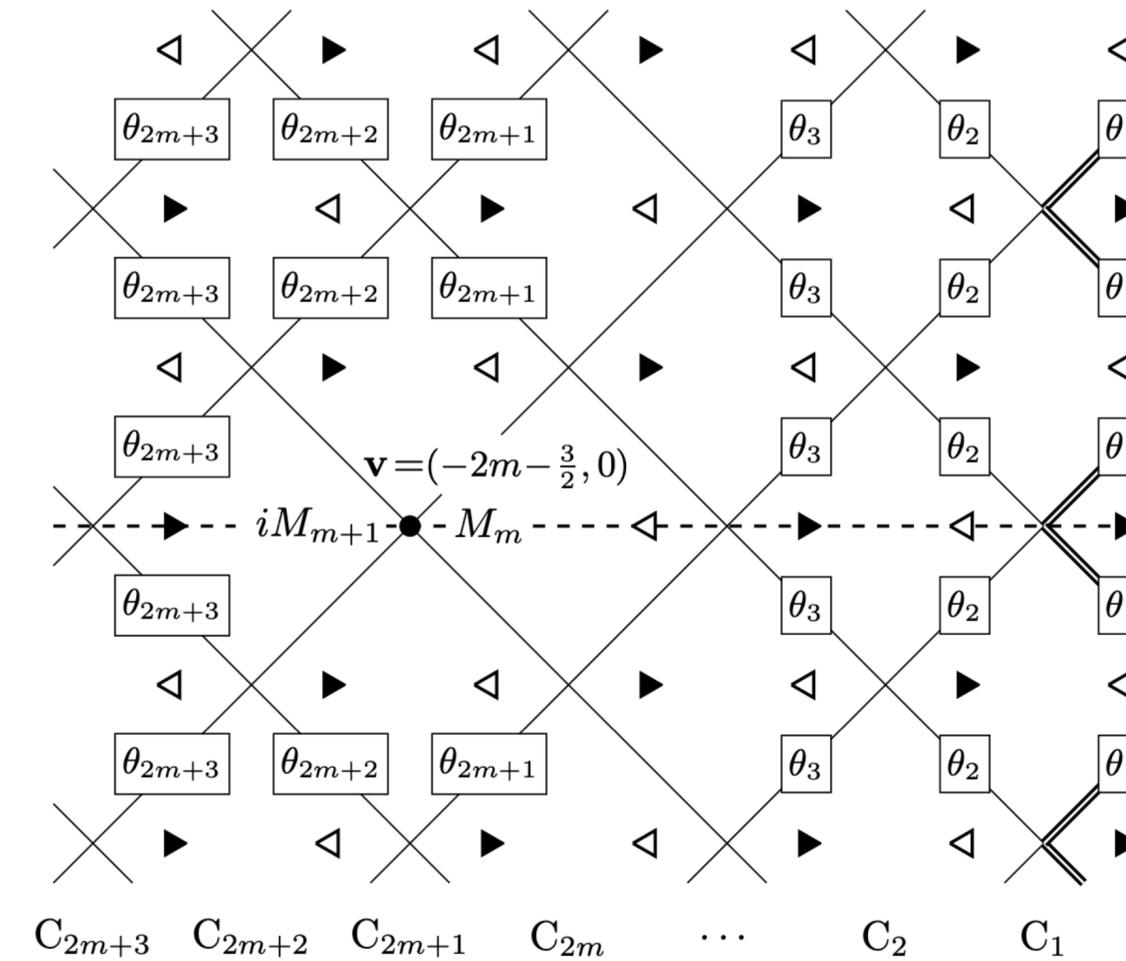
Exemples de graphes abstraits admettant un plongement propre

- Tout graphe fini admet un s-plongement propre (Chelkak)
- Graphe isoradial infini équipé des poids critiques $\mathcal{X} = \left(v^\bullet(c) - v^\circ(c) \right)^{\frac{-1}{2}}$
- Graphe isoradial infini équipé des poids massifs \mathcal{X} via exponentielles discrètes (CIM)
- Graphes doublement périodiques critiques \mathcal{X} via solutions périodiques EP (Chelkak)
- Réseau carré par couche (chapitre 2) pour toutes les constantes de couplage (CHM)
- Modèle sur les Circle Pattern (Lis)

Et bien d'avantage

Une manière de vérifier l'existence d'un s-plongement propre est de trouver une solution de l'EP dont on maîtrise les asymptotiques à l'infini (CLR2 suivant Kenyon-Sheffield)

Exemples de graphes abstraits admettant un plongement propre



Formalisme qui unifie tous les précédents

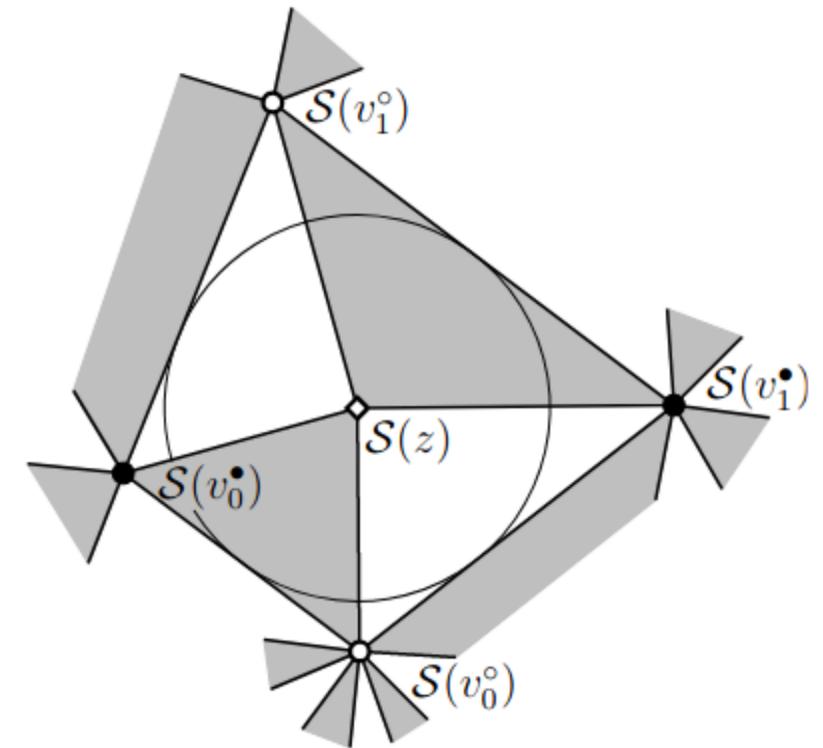
Quid d'une forme de criticalité?
 Quid des résultats de convergence ?

La fonction d'origami et le pas du réseau

Pour $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{X}}$ un s-plongement propre, on définit la fonction d'Origami $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathcal{X}} : \Lambda(G) \rightarrow \mathbb{R}$ dont les incréments incréments sont donnés par

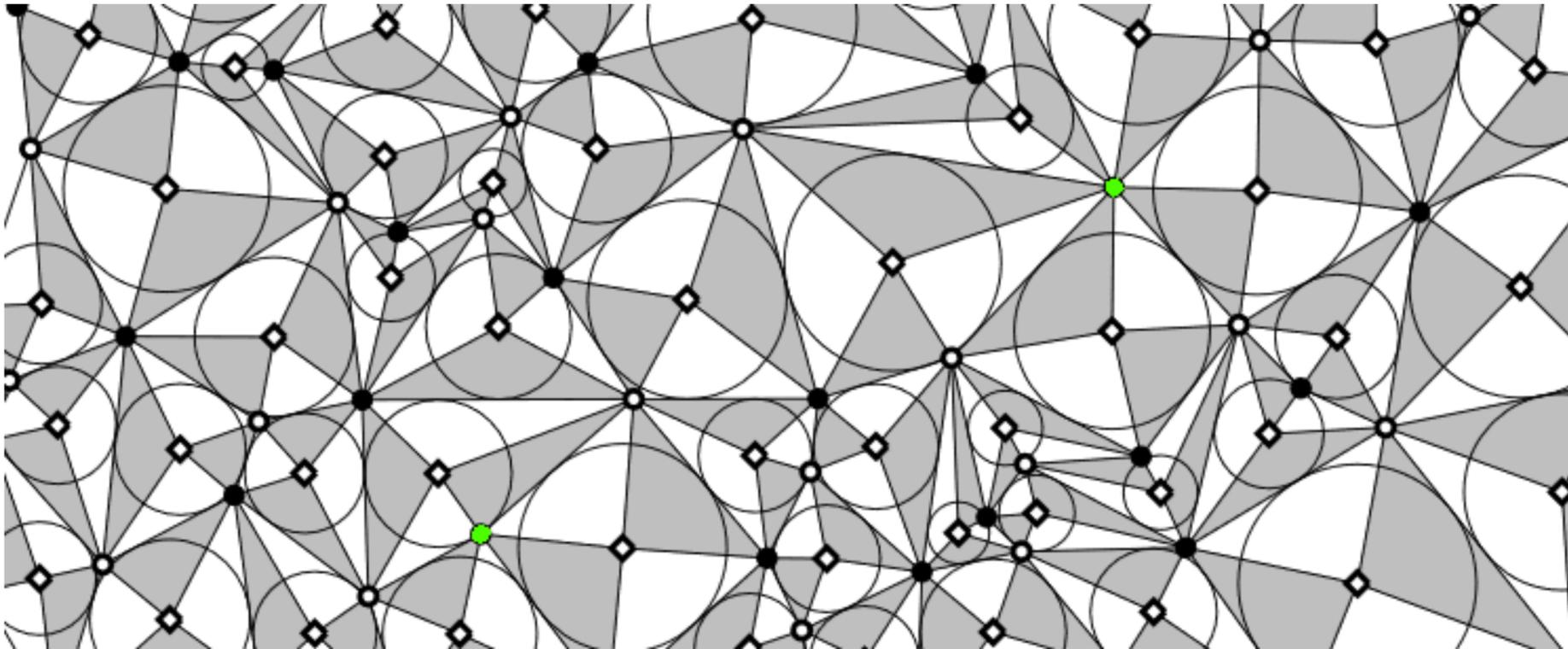
$$\mathcal{Q}_{\mathcal{X}}(v^{\bullet}(c)) - \mathcal{Q}_{\mathcal{X}}(v^{\circ}(c)) := |\mathcal{X}(c)|^2$$

- Pour un quadrilatère tangent, somme alternée des longueurs est nulle
- Consistance vient de l'EP
- Correspond aux repliement le long des diagonales
- \mathcal{Q} est une fonction 1-Lipchitz
- Graphe isoradial $\mathcal{Q} = \delta$ sur $\mathcal{S}(G^{\bullet})$ et $\mathcal{Q} = 0$ sur $\mathcal{S}(G^{\circ})$



Définition du pas du plongement

- Pour une grille irrégulière, il n'y a pas de définition naturelle du pas δ du réseau. On utilise l'origami pour définir le pas du réseau (CLR1)
- Fixe $\kappa < 1$. \mathcal{S} vérifie l'hypothèse Lip (κ, δ) si l'Origami est κ -Lipchitz au-delà de la distance δ : $|\mathcal{S}(z) - \mathcal{S}(z')| \leq \delta \Rightarrow |\mathcal{Q}(z) - \mathcal{Q}(z')| \leq \kappa |\mathcal{S}(z) - \mathcal{S}(z')|$
- \mathcal{Q} contracte les distances d'un facteur strictement meilleur que 1



$\text{pas}_{\kappa} := \inf\{\delta', \text{Lip}(\kappa, \delta') \text{ est vérifiée}\}$

Définition du pas du plongement

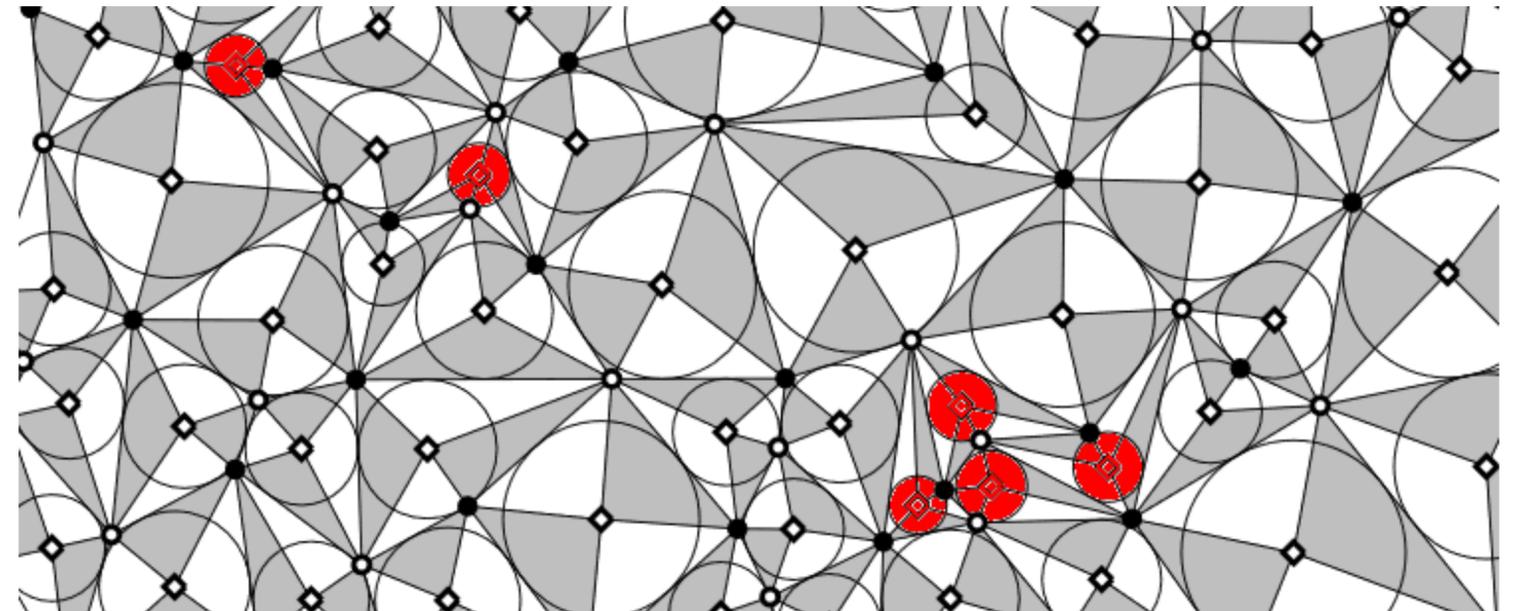
- Pour une grille irrégulière, il n'y a pas de définition naturelle du pas δ du réseau. On utilise l'origami pour définir le pas du réseau (CLR1)
- Fixe $\kappa < 1$. \mathcal{S} vérifie l'hypothèse Lip (κ, δ) si l'Origami est κ -Lipchitz au-delà de la distance δ : $|\mathcal{S}(z) - \mathcal{S}(z')| \leq \delta \Rightarrow |\mathcal{Q}(z) - \mathcal{Q}(z')| \leq \kappa |\mathcal{S}(z) - \mathcal{S}(z')|$
- \mathcal{Q} contracte les distances d'un facteur strictement meilleur que 1
- Limite d'échelle $\delta \rightarrow 0$ correspond à une sous-suite $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ vérifiant Lip (κ, δ_n) pour la même constante κ
- Grille infinie de pas = 1, hypothèse à vérifier $\limsup_{z, z' \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{Q}(z) - \mathcal{Q}(z')|}{|\mathcal{S}(z) - \mathcal{S}(z')|} < 1$

Un premier théorème de criticalité : RSW pour FK-Ising

- Hypothèse principale est $\text{Lip}(\kappa, \delta)$
- Contrainte géométrique locale (régularité des observables) $\text{LENTGH-EXP-FAT}(\delta)$:
pour tout $\gamma > 0$ $\sum_{z \in \blacklozenge, r_z \leq \exp(-\gamma\delta^{-1})} \text{diam}(z) = o_{\delta \rightarrow 0}(1)$
- Seconde hypothèse demande que les faces exponentiellement petites en δ^{-1} n'envahissent pas le graphe

Formulation usuelle pour une grille infinie de pas $\delta = 1$

- $\limsup_{z, z' \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{Q}(z) - \mathcal{Q}(z')|}{|\mathcal{S}(z) - \mathcal{S}(z')|} < 1$
- $\sum_{z \in \blacklozenge \cap \mathcal{B}_n, r_z \leq \exp(-\gamma n)} \text{diam}(z) = o(n)$



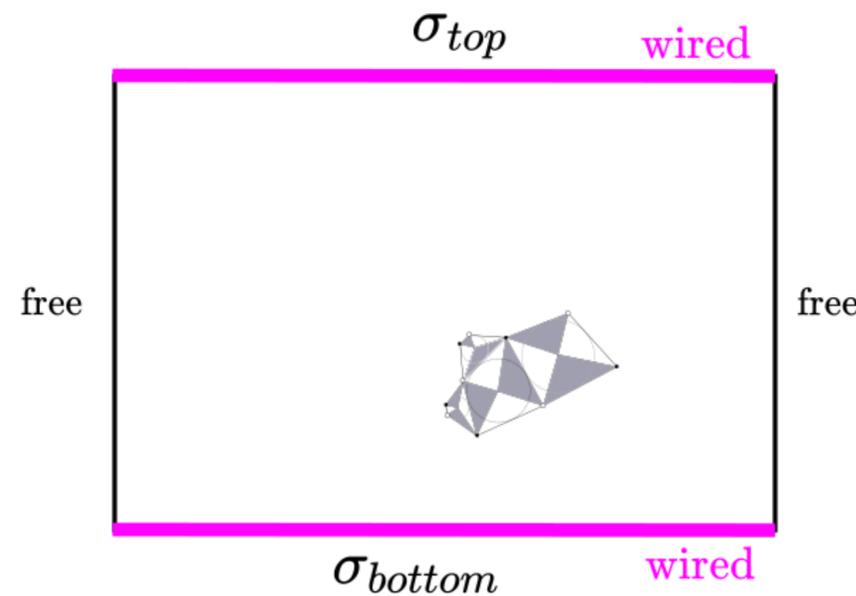
Une forme générale de criticalité (RSW pour FK-Ising)

Théorème: M.

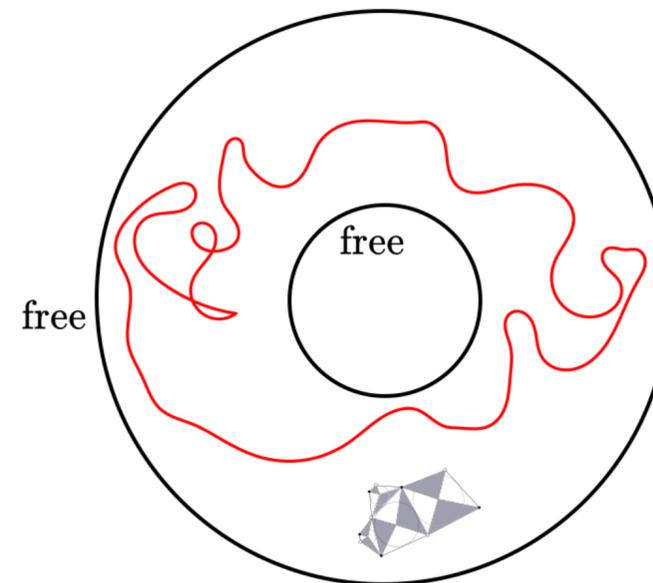
Lip (κ, δ)

LENTGH-EXP-FAT(δ)

- Magnétisation spin-Ising: grilles \mathcal{S}_δ recouvrant $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}_{\mathcal{R}(2,1)}^{wfwf} [\sigma_{top} \sigma_{bottom}] > 0$
- RSW pour FK $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}_{\mathcal{A}(1,3)}^{FK, free} [\text{Il existe un circuit ouvert dans l'anneau}] > 0$



Spin



FK

Chelkak (2020)
UNIF(δ) et FLAT(δ)

Traite toutes les grilles présentées précédemment (hypothèse LENTGH-EXP-FAT(δ) vérifiée avec marge énorme), qui peut être affaiblie

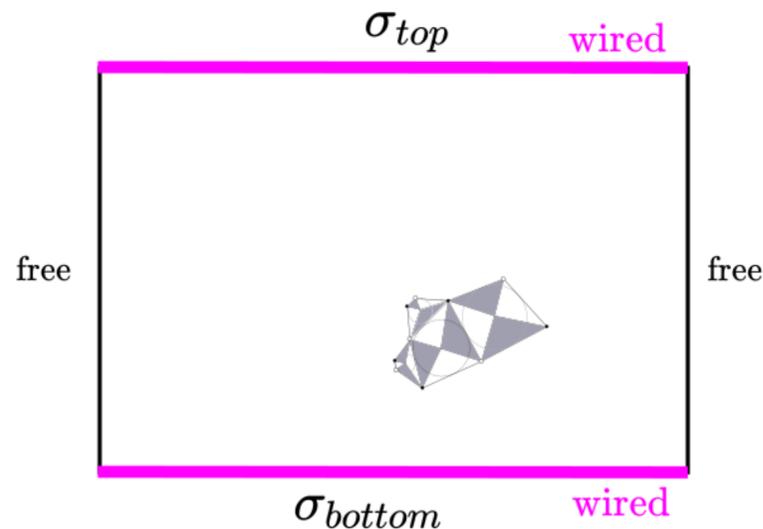
Une forme générale de criticalité (RSW pour FK-Ising)

Théorème: M.

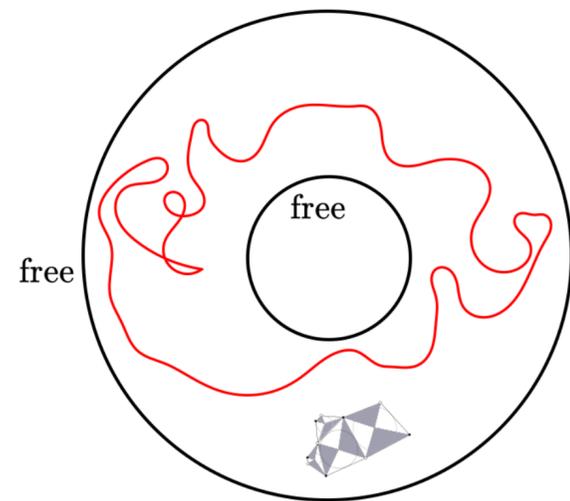
Lip (κ, δ)

LENTGH-EXP-FAT (δ)

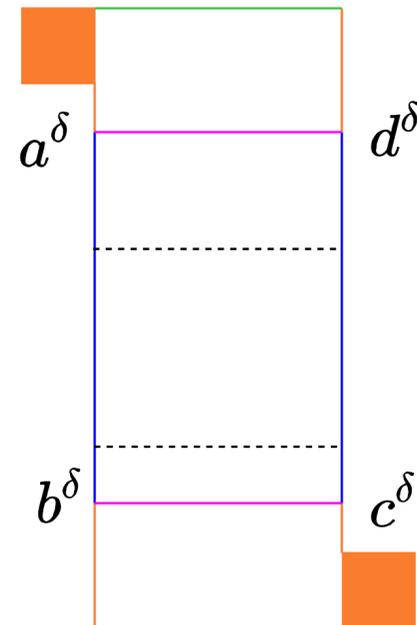
- Magnétisation spin-Ising: grilles \mathcal{S}_δ recouvrant $2\mathcal{R}$ $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}_{\mathcal{R}}^{wfwf} [\sigma_{top} \sigma_{bottom}] > 0$
- RSW pour FK $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}_{\mathcal{A}(1,3)}^{FK,free} [\text{Il existe un circuit ouvert dans l'anneau}] > 0$



Spin



FK



Pas d'angles bornés ou de comparabilité entre la taille des faces

Traite toutes les grilles présentées précédemment (hypothèse LENTGH-EXP-FAT (δ) vérifiée avec marge énorme), qui peut être affaiblie

Un forme générale de criticalité (RSW pour FK-Ising)

Théorème: M.

Lip (κ, δ)

LENTGH-EXP-FAT(δ)

- Magnétisation spin-Ising, $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}_{\mathcal{R}}^{wfwf} [\sigma_{top} \sigma_{bottom}] > 0$
- RSW pour FK $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}_{\mathcal{A}(1,3)}^{FK, free} [\text{Il existe un circuit ouvert dans l'anneau}] > 0$

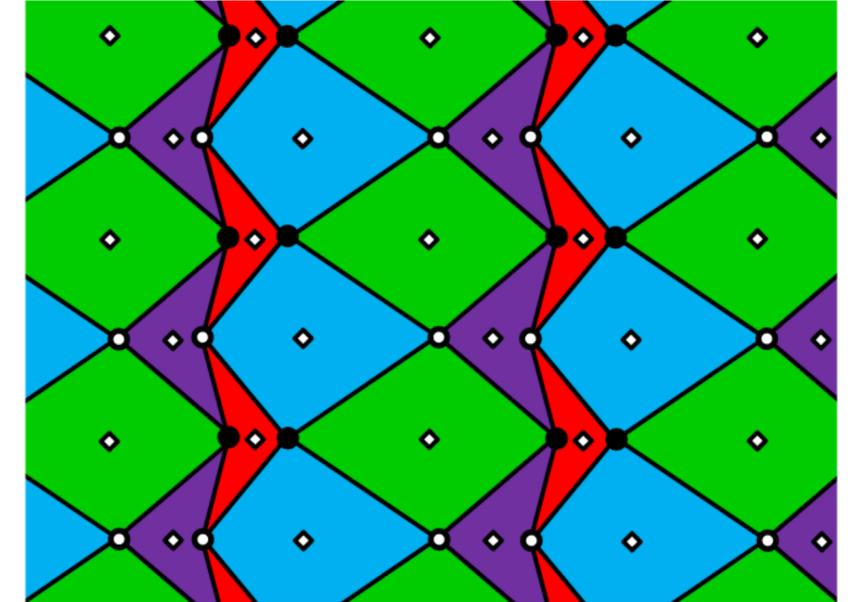
Ces deux théorèmes sont faux sur les grilles hors-critiques

- Réseau carré hors-critique : constante de Lipchitz optimale pour \mathcal{Q} vaut 1
- Réseau carré massif: la constante de Lipchitz optimale pour \mathcal{Q} tend vers 1 lorsque $|m| \rightarrow \infty$

Lip est l'hypothèse cruciale dans les conclusions de ce théorème

Limite d'échelle des observables

- Généralisation des observables sur les s-plongements
Convergence interface FK vers SLE(16/3) sur graphes doublement périodiques (Chelkak 2020)
- Formalisme développé va au-delà de ces résultats
- Q^δ est 1-Lipchitz et définie à constante additive près
OPS que $Q^\delta \rightarrow \vartheta$ uniformément sur les compacts



- $\oint F^\delta(z) d\mathcal{S}^\delta + i\overline{F^\delta(z)} dQ^\delta = 0$



- $\oint f dz + i\bar{f} d\vartheta = 0$

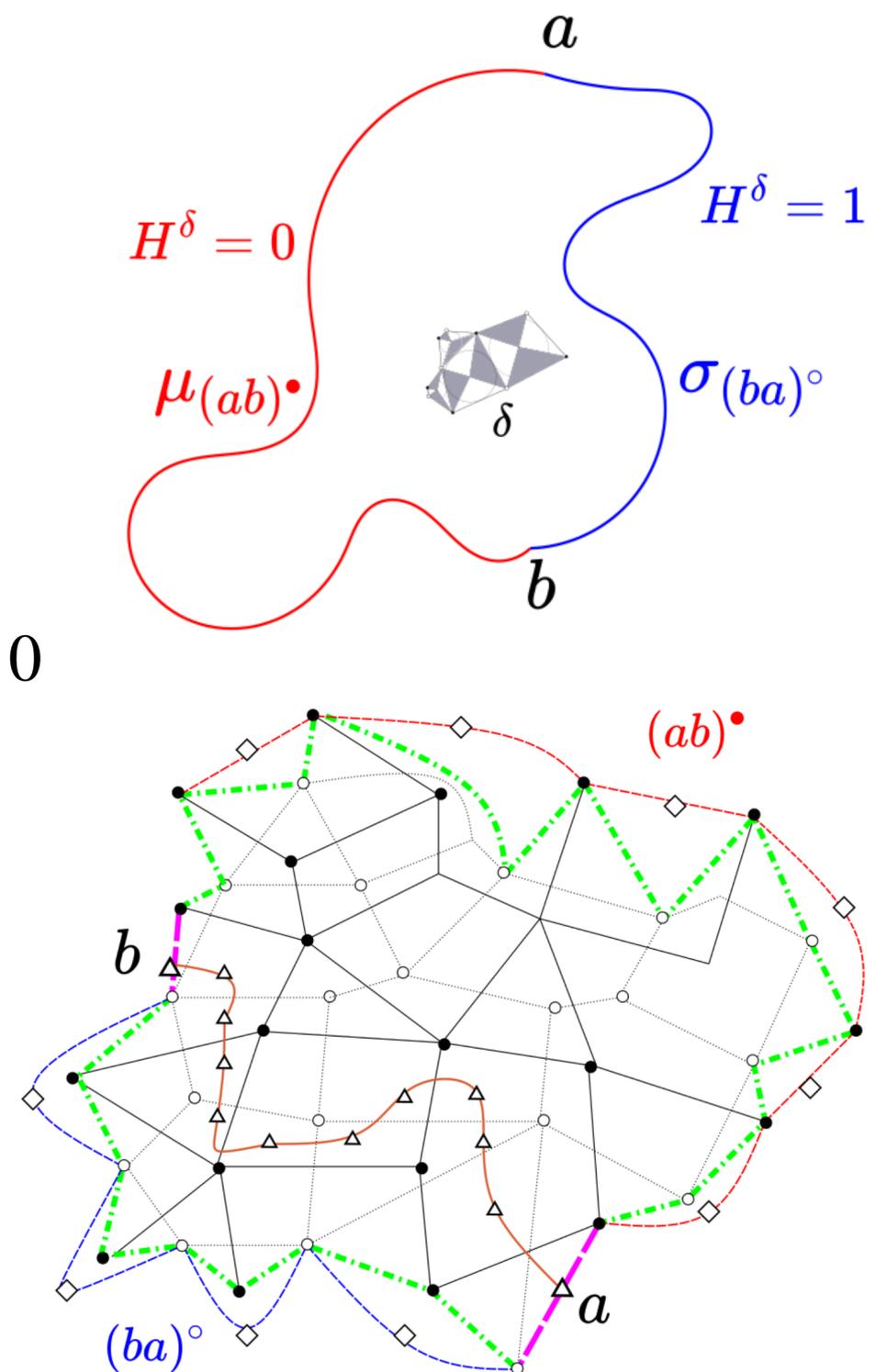
- $H^\delta[F^\delta] := \int \text{Im}[F^\delta(z)^2 d\mathcal{S}^\delta] + |F^\delta(z)|^2 dQ^\delta$

- $h = \int \text{Im}[f^2 dz] + |f|^2 d\vartheta$

Structure de la limite d'échelle va au de la de l'holomorphie massive

Une résultat de convergence pour les observables

- Considère l'observable FK-Ising (martingale), arc libre $(ab)^\bullet$ et arc branché $(ba)^\circ$ (Smirnov 2010)
- Complexification F^δ du corrélateur
Kadanoff-Ceva $X^\delta(c) = \mathbb{E}_{\Omega_\delta}^{\text{wf}} [\sigma_{(ba)^\circ} \mu_{(ab)^\bullet} \mu_c \sigma_c]$
- $H^\delta[F^\delta] = H^\delta[X^\delta] = 0$ sur $(ab)^\bullet$ $\oint F^\delta(z) d\mathcal{S}^\delta + i \overline{F^\delta(z)} d\mathcal{Q}^\delta = 0$
 $H^\delta[F^\delta] = H^\delta[X^\delta] = 1$ sur $(ba)^\circ$
- Pré-compactié des observables F^δ (CLR1)
- Ω_δ approxime Ω , bord est de classe \mathcal{C}^1
- $\mathcal{Q}^\delta \rightarrow \mathcal{I}$ supposée de classe \mathcal{C}^2
- Grille supposée UNIF(δ) (peut s'affaiblir)



Convergence de l'observable FK

Théorème M.

\mathcal{D} classe \mathcal{C}^2 Ω lisse

- Sous les hypothèses précédentes, F^δ converge vers l'unique fonction f

$$\oint f dz + i \bar{f} d\vartheta = 0$$

$$h = \int \text{Im}[f^2 dz] + |f|^2 d\vartheta \text{ vaut } 0 \text{ sur } (ab)^\bullet$$

et 1 sur $(ba)^\circ$

- Nouveau contrôle conditions de bord (discret/continu) : hypothèse sur $\partial\Omega$ et extension du graphe
- Hypothèse sur \mathcal{D} peut-être affaiblie (problème d'unicité dans le continu)
- Nécessité de traiter condition de bord rugueuses pour la convergence des interfaces
- Permet de contrôler les conditions de bord d'autres observables

Une meilleure description dans $\mathbb{R}^{2,1}$ (Chelkak)

- Condition sur la forme $\oint f dz + i \bar{f} d\vartheta = 0$ est difficile à interpréter
- Relation s'observe comme de l'holomorphie massive après changement de variable. L'idée centrale est de considérer $(z, \vartheta(z)) \subset \mathbb{R}^{2,1}$, métrique de Minkowski
- Paramétrisation conforme par $\zeta \in \mathbb{D}$

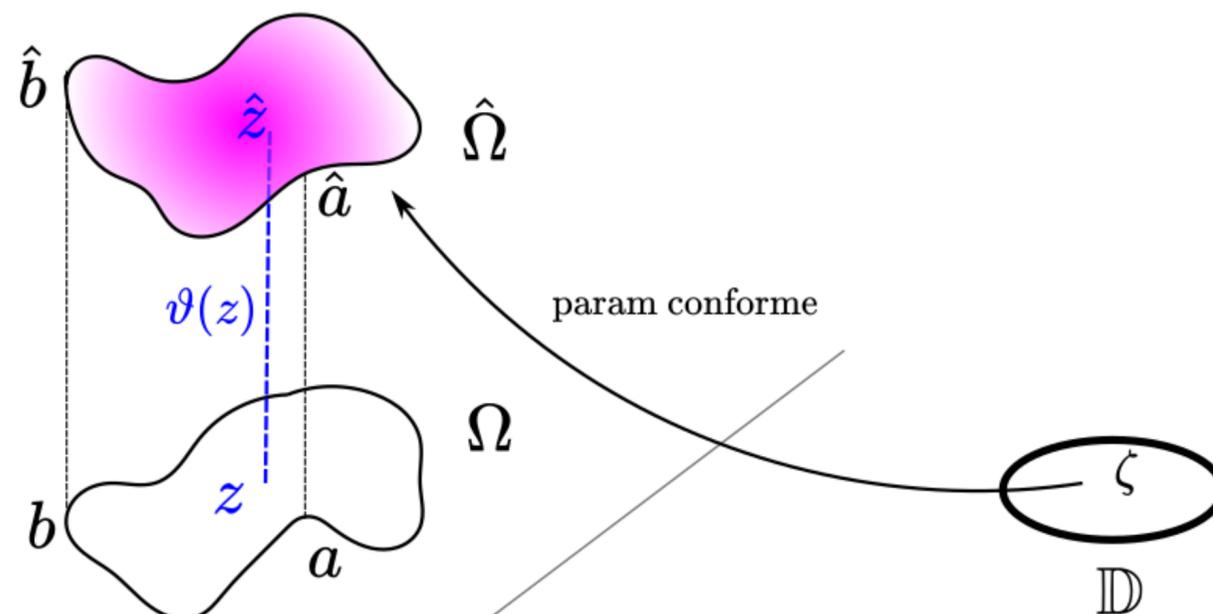
$$\varphi := \bar{\zeta} f \cdot (z_\zeta)^{\frac{1}{2}} + \zeta \bar{f} \cdot (\bar{z}_\zeta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\bar{\partial}_\zeta \varphi = im(\zeta) \bar{f}}$$

$$m(\zeta) = \frac{1}{2} \text{courbure moy}(\zeta) \times \text{elmnt lg}(\zeta)$$

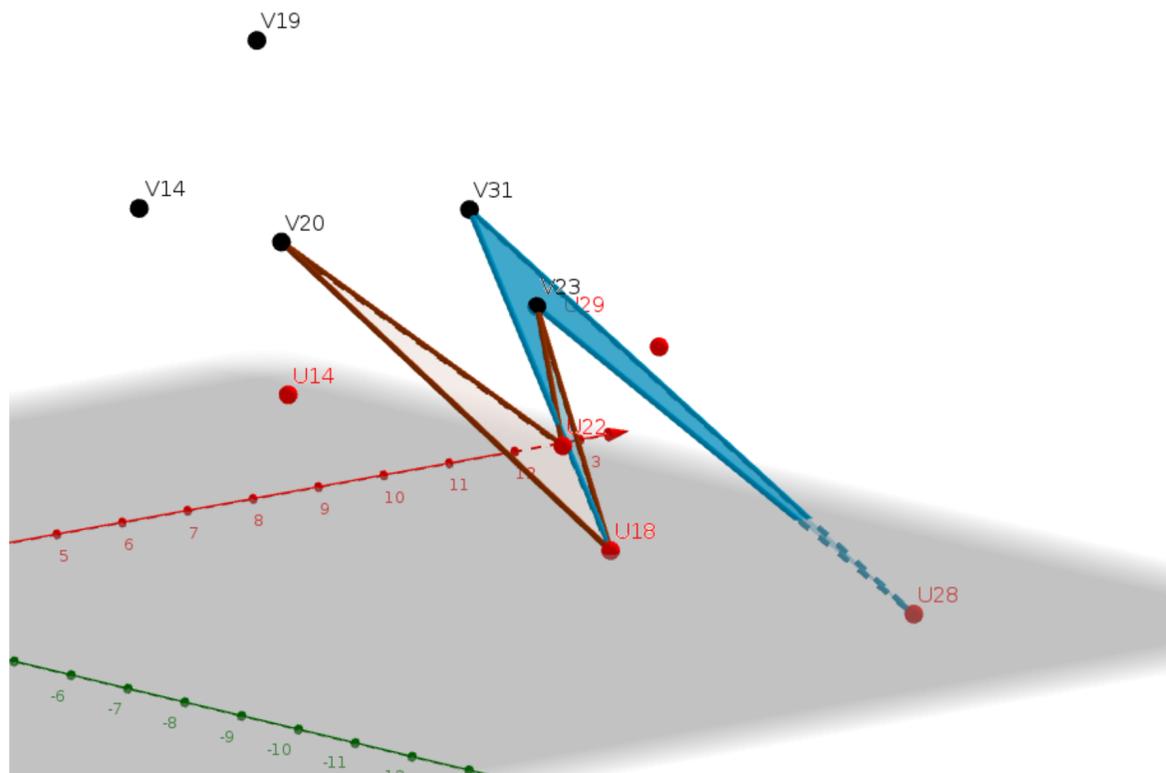
$$m(\zeta) = \frac{(|\vartheta_{\zeta\bar{\zeta}}|^2 - |z_{\zeta\bar{\zeta}}|^2)^{\frac{1}{2}}}{2(|z_\zeta| - |z_{\bar{\zeta}}|)}$$

Holomorphie sur les surfaces minimales (CLR2)



Idée cruciale : plonger le graphe dans $\mathbb{R}^{2,1}$

- Replonger le graphe \mathcal{S}^δ comme une surface discrète $(\mathcal{S}^\delta, \mathcal{Q}^\delta) \subset \mathbb{R}^{2,1}$
- Expression explicites sur les surfaces minimales pour φ avec $h = \int \text{Im} [\varphi^2 d\zeta]$
 Φ l'uniformisation de \mathbb{D} vers $\mathbb{R} \times]0; 1[$, $\hat{a}^{-1}, \hat{b}^{-1} \rightarrow \pm \infty$, alors $\varphi = \sqrt{\Phi}$
- Massive isoradiale $q = \frac{1}{2}m\delta$, $(z, \vartheta(z))$ de courbure moyenne proportionnelle à m



interprétation géométrique
de la distance de corrélation

Applications et perspectives potentielles

- Construction explicite de surfaces et interfaces sur les surfaces minimales
- Graphe \mathbb{Z}^2 avec poids aléatoires
- Convergence générale des corrélations
- Compréhension des surfaces aléatoires

MERCI DE VOTRE ATTENTION