Exercices pour se familiariser avec les groupes

En TD, la sélection d'exercices vise à vous faire comprendre des méthodes ou des idées classiques gravitant autour des cours de la semaine. Ce document vise à fournir une petite liste d'exercices pour se familiariser d'abord avec le cours. Il s'agira d'énoncés dont les preuves nécessitent uniquement de connaître les définitions ou faire quelques calculs basiques, ce qui est toujours important pour s'habituer à de nouveaux objets. Le document est découpé suivant les TDs et propose trois ou quatre exercices par semaine de cours. Comme d'habitude, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr ou à venir me poser les questions directement au bureau T13.

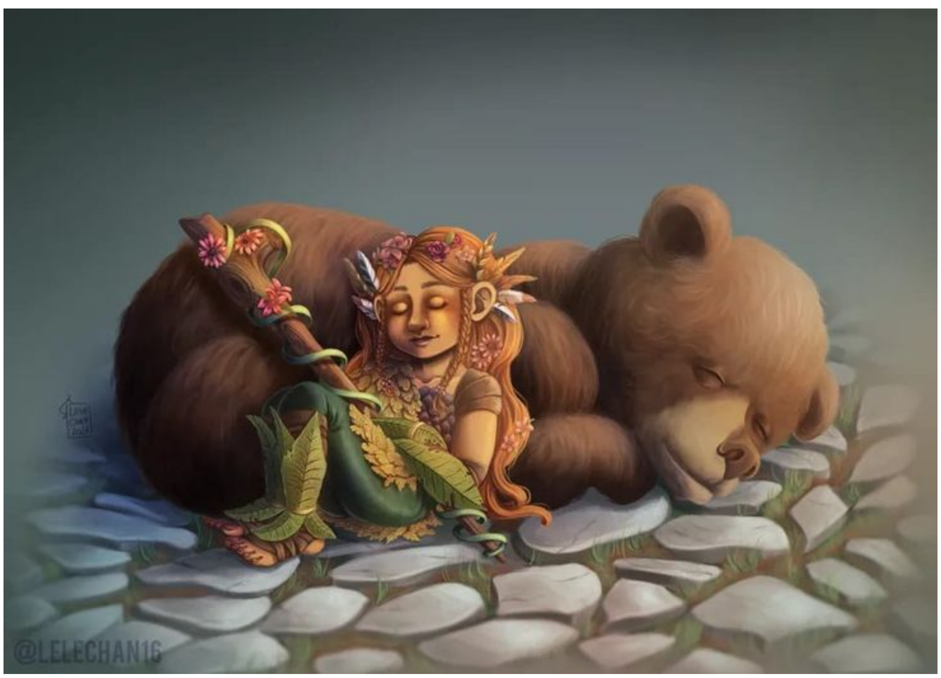

FIGURE 1 – Devenez aussi familier·ère avec les groupes que la druide avec cet ourson !

TD n°1 : Groupes et groupes cycliques

Exercice 1.

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes [1].

1. Démontrer que $f(1_G) = 1_{G'}$ et que pour tout $x \in G$, nous avons $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
2. Soit H un sous-groupe de G. Démontrer que $f(H)$ est un sous-groupe de G'.

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, vérifier que H est un sous-groupe de G, puis que l'application explicite est un isomorphisme de groupes.

1. Soit $n \geq 1$. On considère $G = \mathfrak{S}_n$ et $H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,|\, \sigma(n) = n\}$. L'application sera
$$\mathfrak{S}_{n-1} \to H,\ \ \tau \mapsto [k \mapsto \tau(k) \text{ si } k < n \text{ et } n \mapsto n].$$
2. Soit $n \geq 1$ et $k \leq n$ On considère $G = \mathfrak{S}_n$ et
$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,|\, \forall i \leq k,\ \sigma(i) \leq k\}.$$
L'application sera
$$\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k} \to H,\ \ (\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \left[i \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_1(i) & \text{si } i \leq k \\ k + \sigma_2(i-k) & \text{si } i > k \end{array} \right. \right].$$

Exercice 3.

Soit $n \geq 1$ et $\zeta \in \mathbb{C}^\times$ une racine primitive n-ième de l'unité (i.e. un élément d'ordre n du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$).

Vérifier que le groupe des racines n-ièmes de l'unité $\mu_n = \{z \in \mathbb{C}^\times \,|\, z^n = 1\}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$. Démontrer en considérant le polynôme $X^n - 1$ qu'il possède au plus n éléments.

Exercice 4.

Soit $f : G_1 \hookrightarrow G_2$ un morphisme de groupes injectif et $g_1 \in G_1$. Démontrer que l'ordre de $f(g_1)$ coïncide avec celui de g_1.

TD n°2 : Quotients et groupes abéliens

Exercice 1.

Soit G un groupe.

1. En considérant le sous-groupe $\langle (1\,2), (3\,4) \rangle$ dans $\langle (1\,2\,3\,4), (1\,2) \rangle$, démontrer qu'un sous-groupe distingué K d'un sous-groupe distingué H de G n'est pas nécessairement distingué dans G.

1. À ce stade défini par $\forall (x,y) \in G^2,\ \ f(xy) = f(x)f(y)$.

On dit qu'un sous-groupe H de G est *caractéristique* si tout automorphisme φ de G stabilise H (i.e. $\varphi(H) = H$).

1. Soit H un sous-groupe distingué de G. Démontrer qu'un sous-groupe caractéristique K de H est distingué dans G.
2. Soit G un groupe abélien et n un entier. Démontrer que les sous-ensembles $nG = \{ng \mid g \in G\}$ et $G[n] = \{g \in G \mid ng = 0_G\}$ sont des sous-groupes caractéristiques de G.

Exercice 2.

Soit G un groupe, $N \triangleleft G$ un sous-groupe distingué et $H < G$ un sous-groupe. Démontrer que l'ensemble $NH = \{nh \mid n \in N,\, h \in H\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 3.

Cet exercice classe dans un premier temps les groupes abéliens d'ordre 27 à isomorphisme près.

1. Décomposer 27 en facteurs premiers.
2. Trouver les suites $d_1|d_2|\dots|d_n$ d'entiers se divisant telles que $\prod_i d_i = 27$. On pourra commencer par séparer les telles suites selon le diviseur d_n de 27.
3. Utiliser le théorème de classification des groupes abéliens finis pour trouver des représentants des classes d'isomorphismes de groupes abéliens d'ordre 27.

Nous continuons en choisissant $p_1, \dots, p_k$ des premiers distincts.

1. Démontrer que la seule suite $d_1|\dots|d_n$ telle que $\prod_i d_i = \prod_{j\leq k} p_j$ est $\prod_{j\leq k} d_j$.
2. En déduire qu'il n'existe qu'une classe d'isomorphisme de groupes abéliens d'ordre $\prod_{j\leq k} p_j$.

Exercice 4.

Nous considérons le groupe $G = {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}/_{4\mathbb{Z}}$.

1. Quels sont les éléments d'ordre 1, 2 et 4 de G ?
2. Trouver les sous-groupes de G. On pourra distinguer selon le cardinal et l'ordre maximal d'un élément du sous-groupe.

Exercice 5.

Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué. On dit qu'un sous-groupe K de G est *un complément de H* si $HK = G$ (vérifier que c'est un sous-groupe dès que H est disitngué) et que $K \cap H = \{e\}$. Dans ce cas, on dira que G est *produit semi-direct interne de K par H.*

1. Démontrer qu'un complément contient un unique représentant de chaque classe de G/H.
2. On dit que la suite exacte
$$1 \to H \to G \xrightarrow{\pi} {}^{G}/_{H} \to 1$$
est *scindée* s'il existe un morphisme s $G/H \to G$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{G/H}$. Un tel morphisme sera appelé *section.*

   Soit K un complément. Démontrer que s qui à gH envoie l'unique représentant dans K définit une section.
3. Réciproquement, si s est une section, démontrer que $\mathrm{Im}(s)$ est un complément de H.

TD n°3 : Groupes abéliens de type fini, résolubles ou nilpotents

Exercice 1.

Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe un élément d'ordre égala au pgcd des ordres des éléments.

Exercice 2.

Nous voulons retrouver l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

1. Soit p un premier divisant $n \geq 1$. Démontrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède un sous-groupe d'indice p.
2. Soit $n = \prod p^{n_p}$ une décomposition en facteurs premiers de l'entier $n \geq 1$. Démontrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède une suite de composition dont les facteurs sont les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec multiplicité n_p.
3. En déduire l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Exercice 3.

Soit G un groupe et $x, y, z \in G$. Démontrer les formules

1. $[x, y]^{-1} = [y, x]$.
2. $[x, yz] = [x, y](y[x, z]y^{-1})$ et $[xy, z] = [y, z](x[xz]x^{-1})$.

Exercice 4.

1. Déterminer le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_3$. On pourra d'abord démontrer qu'il est distingué et strict pour réduire la liste des possibilités.
2. Déterminer le groupe dérivé du groupe dihédral D_{2n}.

TD n°4 : Groupes linéaires et présentation des groupes

Exercice 1.

Soit $n \geq 1$ et k un corps. Démontrer qu'il existe une suite exacte courte

$$1 \to \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{GL}_n(k) \to k^\times \to 1.$$

Démontrer que la suite est scindée, et même que $\mathrm{GL}_n(k) \cong \mathrm{SL}_n(k) \times k^\times$.

Exercice 2.

Lister les classes de conjugaison de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. On pourra considérer les polynômes minimaux et caractéristiques des matrices. (Ou aller chercher un cours sur ces notions)

Reprendre la question avec $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.

On rappelle que pour un ensemble I, il existe un groupe $F(I)$ appelé groupe libre sur I, avec des éléments distingués g_i tel que

$$\forall \text{groupe } G,\ \ \{f\ :\ F(I) \to G\} \to G^I,\ \ f \mapsto (f(g_i))_{i\in I} \ \text{ est une bijection.}$$

1. Démontrer que pour toute application $I \to J$, il existe un morphisme $F(I) \to F(J)$.
2. Pour G_1 et G_2 deux groupes, trouver un groupe $G_1 * G_2$ avec deux morphismes depuis G_1 et G_2 tel que

$$\forall \text{groupe } G,\ \ \{f\ :\ G_1 * G_2 \to G\} \to \{(f_1, f_2)\,|\, f_i\ G_i \to G\},\ \ f \mapsto ((f_i)_{|G_i}) \ \text{ est une bijection.}$$

On pourra considérer un quotient du groupe $F(G_1 \sqcup G_2)$.

TD n°5 : Actions de groupes et théorèmes de Sylow

Exercice 1.

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. On se fixe un élément $x \in X$.

1. Montrer que $g_1 \bullet x = g_2 \bullet x$ ssi $\exists h \in \mathrm{Stab}_x$ tel que $g_1 = g_2 h$.
2. Rappeler pourquoi le stabilisateur de x est un sous-groupe de G.
3. En déduire que l'application
$$G \to X,\ \ g \mapsto g \bullet x$$
se factorise et corestreint en une bijection
$$G/\mathrm{Stab}_x \to \mathrm{Orb}_x$$
où l'ensemble source est celui des classes à gauches.

Exercice 2.

Soit G un groupe fini d'ordre pair. Nous voulons ici démontrer que G possède un élément d'ordre 2 (cela s'appelle le théorème de Cauchy pour un premier général). Nous détaillons la preuve pas à pas.

1. Démontrer que $g \mapsto g^{-1}$ est une bijection de G, d'ordre 2 vue dans le groupe des permutations $\mathfrak{S}_G$.
2. Démontrer que les points fixes de $g \mapsto g^{-1}$ sont précisément les éléments d'ordre divisant 2.
3. En déduire un morphisme de groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathfrak{S}_G$ et donc une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur l'ensemble G.
4. En utilisant la formule des classes démontrer que G possède un nombre pair d'éléments d'ordre divisant 2.
5. Se rappeler l'existence du neutre et conclure que G possède un élément d'ordre 2.

Exercice 3.

Soit G un groupe d'ordre 60, quelles sont les valeurs possibles pour $\mathrm{n}_5(G)$? Donner un exemple de groupe G qui réalise chaque valeur prédite.

Exercice 4.

1. Soit G un groupe d'ordre pm avec $p \nmid m$. Soient g_1, g_2 deux éléments d'ordre p. Démontrer qu'il existe $g \in G$ et $i \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ tels que $g_2 = g g_1^i g^{-1}$.
2. Soit G un groupe d'ordre $p^2 m$ avec $p \nmid m$. Soit $g \in G$ d'ordre p. Montrer que l'on se trouve exactement dans l'une des deux situations suivantes : il existe $g' \in G$ d'ordre p^2 tel que $g'^p = g$ ou il existe $g_1, g_2 \in G$ d'ordre p tels que $g_1 g_2 = g$ et $\langle g_1 \rangle \cap \langle g_2 \rangle = \{1\}$.

   Indication : *on pourra commencer par le cas d'un groupe d'ordre p^2.*

TD n°6 : Groupes symétriques

Exercice 1.

Exhiber un élément d'ordre 6 dans $\mathfrak{S}_6$.

Exercice 2.

Soit $n \geq 2$ et $c = (1\,2\,\ldots\,n)$ un grand cycle fixé de $\mathfrak{S}_n$. Nous cherchons à déterminer son commutant.

1. Rappeler pourquoi $\langle c \rangle$ est contenu dans son commutant.
2. Soit σ dans son commutant. Démontrer que $\sigma c \sigma^{-1} = c$, puis que $(\sigma(1)\,\sigma(2)\,\ldots\,\sigma(n)) = (1\,2\,\ldots\,n)$.
3. Fixons i tel que $\sigma(1+i) = 1$. En déduire par récurrence sur j que pour tout j, nous avons $\sigma(j+i) = j$. Conclure que $\sigma = c^{\circ(-i)}$.

Exercice 3.

Nous considérons le sous-groupe $\mathrm{K}_4 = \{\mathrm{Id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ de $\mathfrak{A}_4$.

1. Vérifier que K_4 est bien un sous-groupe, puis en considérant le type cyclique de ses éléments, démontrer qu'il est distingué.
2. Démontrer qu'il existe une suite exacte courte scindée

$$1 \to \mathrm{K}_4 \xrightarrow{\iota} \mathfrak{A}_4 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to 1.$$

TD n°7 : Simplicités classiques

Exercice 1.

Soit $c = (i_1\,\ldots\,i_l)$ un l-cycle dans $\mathfrak{S}_n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Démontrer que

$$\sigma c \sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\,\ldots\,\sigma(i_l)).$$

Généraliser à une permutation quelconque.

Exercice 2.

Soit k un corps et V un k-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(V)$ tel que

$$\forall v \in V, \ \ \{v, f(x)\} \text{ est liée.}$$

Démontrer que f est une homothétie.

Exercice 3.

Soit p un premier.

1. Quel est le cardinal de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$? D'un de ses p-Sylow ?
2. Démontrer que $\left\{\mathbb{F}_p^\times \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \, a \in \mathbb{F}_p\right\}$ est un p-Sylow.
3. Montrer que le groupe précédent est un stabilisateur pour l'action de $\mathrm{PLS}_2(\mathbb{F}_p)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$.
4. En déduire que $n_p = p + 1$.

TD n°8 : Représentations

Exercice 1.

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X et k un corps. Soit $kX := \oplus_{x\in X} kx$ (i.e. un k-espace vectoriel de base indexée par X). Démontrer que

$$g \cdot \left(\sum_{x\in X} \lambda_x x\right) = \sum_{x\in X} \lambda_x g \cdot x = \sum_{x\in X} \lambda_{g^{-1}\cdot x} x$$

définit une représentation de G dans kX.

Exercice 2.

Soit G un groupe et k un corps. Construire une bijection entre les morphismes de groupes $\chi : G \to k^\times$ et les classes d'isomorphismes de représentations de G dans des k-espace vectoriels de dimension 1.

Exercice 3.

Soit G un groupe et (V, ρ) une représentation irréductible de G.

1. Soit $v \in V \backslash \{0\}$. Démontrer que
$$\mathrm{Vect}\{g \cdot v \,| g \in G\} = V.$$
2. En déduire, pour G fini, que $\dim V \leq |G|$.

Exercice 4.

Quelles sont les représentations semi-simples (i.e. qui se décomposent en somme directe de représentations irréductibles) de $\mathbb{Z}$ sur k^2 ? On pourra d'abord traiter le cas algébriquement clos qui est plus simple. Donner un exemple de telle représentation irréductible pour $k = \mathbb{R}$.

TD n°11 : Intégralité et caractères

Exercice 1.

On rappelle qu'un élément $z \in \mathbb{C}$ est dit entier algébrique s'il existe un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(z) = 0$. On va rappeler quelques propriétés des entiers algébriques.

1. Démontrer que z est algébrique si et seulement s'il est contenu dans un sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par un nombre fini d'éléments (comme anneau).
2. En déduit que le produit et la multiplication de deux éléments algébriques sont également algébriques.
3. Soit z un entier algébrique. On admet que $\{Q \in \mathbb{Q}[X] \,|\, Q(z) = 0\}$ est un idéal principal, engendré par un unique polynôme unitaire à coefficients entiers. On appelle conjugués de z les racines de ce polynôme. Démontrer que le produit des conjugués est un entier, non nul dès que z est non nul.
4. En déduire qu'un entier algébrique de module < 1 dont tous les conjugués sont de module ≤ 1 est nul.
5. En déduire que si $\frac{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n}{n}$ est un entier algébrique, avec ζ_i des racines de l'unité, alors $\zeta_1 = \ldots = \zeta_n$ ou $\zeta_1 + \ldots + \zeta_n = 0$.

Exercice 2. Une table de caractères

Notre but est d'écrire la table de caractères de $\mathfrak{S}_3$ étape par étape.

1. Donner les classes de conjugaisons.
2. En considérant que l'on connaît la représentation triviale, démontrer que les deux autres représentations irréductibles sont de dimensions respectives 1 et 2.
3. Quel caractère de dimension 1 connaissez-vous ?
4. Rappeler pourquoi les colonnes de la table des caractères sont orthogonales (attention, ce n'est vrai pour les lignes qu'après pondération par la taille des classes de conjugaison).
5. Compléter la table des caractères grâce à l'orthogonalité des colonnes et en connaissant la dimension du caractère manquant.
6. En faisant plongeant $\mathfrak{S}_3$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ comme groupes d'isométries d'un triangle équilatéral dans $\mathbb{R}^2$, identifier cette représentation manquante.

Exercice 3.

Soient V et W deux représentations complexes de dimension finies d'un groupe fini G.

1. Retrouver la preuve que
$$\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W.$$
2. En déduire que si V de dimension 1 de caractère χ, alors $V \otimes W$ est irréductible si et seulement si W l'est.
3. En considérant les représentations de $\mathfrak{S}_3$ construites ci-dessus, donner un cas où $V \otimes W \cong W$ et un cas où c'est faux.