De la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ aux difficultés pour $\mathrm{GL}_n(K)$

Introduction au domaine de recherche, par Nataniel Marquis

Mai 2022

Je tiens d'abord à remercier les quelques relecteurs et relectrices de ce court texte, tant du point de vue orthographique que mathématique.

Cette introduction au domaine de recherche a été écrite dans le cadre de la validation du DENS. Il s'agit d'introduire avec un minimum de prérequis mon domaine de recherche, en l'occurence la correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}_2(K)$. Nous commencerons par une première partie expliquant l'émergence de l'étude des corps locaux p-adiques à partir de problèmes d'arithmétique. Ce sera l'occasion de proposer une introduction à la théorie de Galois, aux corps locaux p-adiques puis de commencer à dévisser le groupe de Galois absolu des corps locaux p-adiques. Un lecteur ou un lectrice avec plus d'expérience en théorie des nombres pourra se contenter de survoler cette partie. Nous la concluons par la théorie du corps de classes locale, qui peut s'interpréter comme une première correspondance de Langlands locale pour $\mathrm{GL}_1(K)$. La deuxième partie tire partie de cette première saveur de correspondance de Langlands : elle tente de motiver la correspondance pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ puis discute de sa résolution dans [Col10]. Nous en profitons pour introduire les (φ, Γ)-modules qui sont des objets primordiaux dans le domaine de recherche. La troisième partie finit par parler des développements et questions récentes autour des correspondances pour $\mathrm{GL}_2(K)$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, la première étant centrale dans mon projet de thèse.

1 Théorie de Galois des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$: pourquoi et comment ?

1.1 La théorie de Galois

Différents pans des mathématiques visent à résoudre au mieux des équations polynomiales sur un corps F ou certains de leurs sous-anneaux, avec la volonté par exemple pour les équations diophantiennes de trouver les solutions qui demeurent sur le corps originel. La méthode de Cardan dans [Car45] introduit à mi-voix l'utilisation de nombres imaginaires pour résoudre les équations de degré 3, autrement dit, l'idée qu'il faut parfois quitter notre corps de base et raisonner sur des quantités abstraites pour ensuite revenir dans notre corps. Suivant cette trajectoire, les démonstrations classiques du théorème des deux carrés (voir par exemple [Per96, Chapitre II, §6]) passent par les complexes. Plus exactement, pour voir si un nombre premier p s'écrit comme somme de deux carrés, la démonstration interprète cette somme de deux carrés comme le produit d'un élément de $\mathbb{Z}[i]$ et de son conjugué. Ces deux exemples encouragent à considérer des corps plus gros que F dans lesquels de nouvelles solutions d'équations polynomiales existent.

Définition 1.1. Une *extension* de F est un corps E muni d'une injection de corps de F dans E. L'extension sera dite *algébrique* si tout élément de E est racine d'un polynôme de $F[X]$.

Un corps F sera dit *séparablement clos* si tout polynôme de $F[X]$ premier avec sa dérivée possède une racine dans F.

La condition sur les polynômes est inutile dans les cas qui nous intéressent, i.e. celui des corps de caractéristique nulle et des corps finis. Nous la conservons cependant par rigueur. Il est possible d'être ambitieux et de tenter de trouver des racines à tous ces polynômes simultanément :

Proposition 1.2. *Pour tout corps F, il existe une extension algébrique de F qui est séparablement close, que l'on appelle clôture séparable de F et que l'on note F^{sep}.*

Cette extension est unique à isomorphisme près. Par la suite, nous supposerons systématiquement une telle clôture fixée.

Exemple 1.3.

1. L'exemple le plus simple consiste à considérer $\mathbb{C}|\mathbb{R}$. Tout complexe non réel $z = a + ib$ est racine du polynôme irréductible $(X - a)^2 + b^2$. Le théorème de d'Albembert-Gauss affirme que $\mathbb{C}$ est une clôture séparable de $\mathbb{R}$.

2. Si x est algébrique sur F, alors la F-algèbre engendrée par x l'est également [Bou81, Chapitre V, §3, Théorème 2]. Puisque le réel $\sqrt[3]{2}$ est racine du polynôme $X^3 - 2$ irréductible sur $\mathbb{Q}$, la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ de $\mathbb{R}$ engendrée par $\sqrt[3]{2}$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$.

3. Pour tout entier n, la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/n})$ de $\mathbb{C}$ engendrée par une racine primitive n-ièmes de l'unité est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$.

Malheureusement, considérer simplement $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ manque d'informations puisqu'elle ne distingue pas les deux racines de X^2+1. Coder cette symétrie dans leur rôle nous amène à considérer pour une extension algébrique $E|F$ le groupe $\mathrm{Aut}_F(E)$ des automorphismes de F-algèbres qui agit sur E. Ces automorphismes doivent en particulier envoyer une racine dans E d'un polynôme de $F[X]$ sur une autre de ses racines. L'étude de ces symétries a mené É. Galois à la fin du XIX$^{\text{iéme}}$ siècle dans [Gal46] à introduire le concept d'extension galoisienne. Nous résumons dans le théorème suivant les résultats qui nous seront utiles et nous renvoyons à [Bou81, Chapitre V, §10] pour une étude exhaustive.

Théorème 1.4. *Soit $E|F$ une extension algébrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *Le corps E est corps de décomposition d'une famille de polynômes de $F[X]$ premiers à leur dérivée, i.e. minimal pour la propriété que ces polynômes se décomposent en facteurs de degré 1 sur E.*

- *Tout polynôme irréductible de $F[X]$ qui possède une racine dans E se décompose sur E en facteurs de degré* 1.

- *Les invariants du corps E vérifient $E^{\mathrm{Aut}_F(E)} = F$.*

Dans ce cas, l'extension est dite galoisienne et le groupe d'automorphismes est appelé groupe de Galois et noté $\mathrm{Gal}(E|F)$.

Ce groupe est muni d'une structure de groupe topologique dont l'une des bases de voisinages de l'identité est donnée par les $\mathrm{Gal}(E|E')$ *pour tout extension finie de F contenue dans E. C'est un groupe topologique compact et totalement discontinu. Dans le cas où $E|F$ est finie, la topologie obtenue est la topologie discrète.*

Nous pouvons interpréter le caractère galoisien comme l'existence d'assez de symétries qui permettent donc de redescendre au corps de base. Regardons ce que donnent les trois exemples que nous avons évoqués.

Exemple 1.5. 1. L'extension $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ est galoisienne et un élément du groupe de Galois est entièrement déterminé par l'image de i, qui appartient à $\{i, -i\}$. Il contient extactement l'identité et la conjugaison et par conséquent

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

2. L'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q}$ n'est pas galoisienne. En effet, les autres racines complexes de $X^3 - 2$ n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Nous avons également $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = \{\mathrm{Id}\}$

3. L'extension $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/n})$ est galoisienne comme corps de décomposition du polynôme $X^n - 1$. En effet, toutes les racines dudit polynôme sont des puissances de $e^{2i\pi/n}$. Un élément du groupe de Galois est uniquement déterminé par l'image de $e^{2i\pi/n}$ qui doit être une racine primitive n-ième de l'unité. Nous construisons ainsi un morphisme

$$\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^{\times} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(e^{2i\pi/n})|\mathbb{Q}), \ \ j \mapsto \left[e^{2i\pi/n} \mapsto e^{2ij\pi/n}\right]$$

qui se trouve être un isomorphisme.

Lorsque $E = F^{\mathrm{sep}}$, nous appelons *groupe de Galois absolu* de F et nous notons G_F le groupe $\mathrm{Gal}(E|F)$.

La théorie de Galois permet de transmuter les caractéristiques des extensions en propriétés des groupes de Galois. Notamment, le théorème fondamental de la théorie de Galois affirme qu'il existe une correspondance bijective entre les sous-extensions algébriques de F contenues dans E et les sous-groupes fermés de $\mathrm{Gal}(E|F)$, ce qui restreint drastiquement l'étude des imbrications entre extensions. Nous prendrons une direction légèrement différente dans la suite de ce texte, en caractérisant plutôt certaines extensions par les propriétés de leur groupe de Galois [1].

Définition 1.6. Un extension galoisienne $E|F$ sera dite *finie* (resp. *abélienne*) si le groupe $\mathrm{Gal}(E|F)$ est fini [2] (resp. abélien).

Exemple 1.7. En particulier, nos deux exemples d'extensions galoisiennes sont abéliennes. Il ne faut cependant pas le prendre comme une généralité : si nous suivions notre deuxième exemple en considérant $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j\sqrt[3]{2}, j^2\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q}$, nous obtiendrions une extension galoisienne de groupe de Galois isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Il devient ainsi naturel pour résoudre des équations sur $\mathbb{Q}$ de s'intéresser au groupe $G_{\mathbb{Q}}$, qui est loin d'être parfaitement décortiqué.

1.2 Des problèmes de rationnels à l'étude de $\mathbb{Q}_p$

Trouver des solutions d'équations polynomiales parmi les rationnels, ou de manière encore plus fine parmi les entiers, s'inscrit comme une question fondamentale de la théorie des nombres dont l'un des problèmes les plus médiatisés reste sans nul doute le grand théorème de Fermat. Les rationnels présentent cependant le problème d'être poreux : si nous pouvons faire varier continûment des paramètres pour trouver les solutions de $x^n + y^n = z^n$ sur $\mathbb{R}$, il s'avère plus ardu de détecter lesquelles de ces solutions vont retomber sur la maille que tisse $\mathbb{Q}$ parmi les réels.

1. L'exemple le plus célèbre, plutôt orthogonal à la direction de ce texte, reste la résolubilité par radicaux d'un polynôme, dont É. Galois prouve qu'elle est caractérisée par la résolubilité du groupe de Galois de son corps de décomposition.

2. Ce qui est équivalent à dire que la dimension de E comme F-espace vectoriel est finie. On le note $[E : F] < +\infty$.

Définition 1.8. Soit K un corps. Une valuation [3] est une application $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\begin{aligned}
&|x| = 0 \text{ si et seulement si } x = 0 \\
&\forall x, y \in K, \ |xy| = |x||y| \\
&\forall x, y \in K, \ |x+y| \leq |x| + |y| \\
&\exists x \in K^\times, \ |x| \neq 1
\end{aligned}$$

Toute valuation permet de voir K comme un espace métrique via $d(x, y) = |x - y|$ et nous disons que deux valuations sont *équivalentes* si elles définissent la même topologie.

Remarque 1.9. Le dernier axiome exclut ce qui est habituellement appelée valuation triviale, qui donnerait la topologie discrète sur notre corps, assez peu intéressante.

Exemple 1.10.

1. L'exemple le plus simple concerne $\mathbb{F}_p((T))$ que l'on munit de la valuation T-adique définie par

   $$|P|_T = p^{-n} \text{ si et seulement si } P = T^n Q \text{ avec } Q \in \mathbb{F}_p^\times + T\mathbb{F}_p[\![T]\!].$$

   L'ensemble des éléments de valuation inférieure à 1 correspond à $\mathbb{F}_p[\![T]\!]$, d'unique idéal maximal engendré par T et la projection modulo T correspond à l'évaluation en 0.

2. Sur $\mathbb{Q}$, la valeur absolue fournit une valuation qui sera notée $|\cdot|_\infty$. L'espace métrique obtenue correspond à la topologie venant de $\mathbb{R}$.

3. Pour tout nombre premier p fixé, il existe une valuation sur $\mathbb{Q}$ appelée valuation p-adique et donnée par

   $$\left|\frac{a}{b}\right|_p = p^{-[v_p(a) - v_p(b)]}$$

   où v_p correspond à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers. L'espace métrique obtenu est plus déstabilisant puisque $p^n \to 0$. De plus, la valuation vérifiant de plus

   $$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \ |x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$$

   tout point d'une boule est centre de la boule. Une bonne manière de s'imaginer le sous-espace des entiers dans cet espace topologique consiste à considérer le développement en base p desdits entiers. Deux entiers seront très proches si le début de leur développement en base p coïncident. Une boule autour d'un entier n contient donc les entiers dont le début du développement en base p coïncide avec celui de n. Cette description permet de mieux visualiser la topologie, et également de comprendre qu'une boule peut-être découpée en p boules disjointes plus petites en fonction du coefficient choisi pour continuer le développement en base p.

Il se trouve que sur le corps $\mathbb{Q}$ qui nous intéresse, les exemples précédents suffisent à comprendre les valuations : le théorème d'Ostrowski nous donne une description complète des classes d'équivalence des valuations sur $\mathbb{Q}$. Une démonstration complète et élémentaire du théorème suivant se trouve dans [Neu99, Chapitre 1, proposition 3.7].

Théorème 1.11 (Ostrowski)**.** *Toute valuation sur $\mathbb{Q}$ est équivalente à $|\cdot|_\infty$ où à l'une des valuations $|\cdot|_p$.*

3. La terminologie est étrange dans le domaine, introduisant une ambiguïté entre la notion de norme p-adique et la théorie générale des corps valués. Nous gardons cette notation valuative. Nous n'aurons pas besoin de la théorie plus générale de la valuation et nous appelons valuation une valuation de hauteur 1.

Ce théorème énonce en substance qu'il n'existe que deux types de porosité de $\mathbb{Q}$: celle que, biberonnés aux réels, nous voyions en plongeant $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et celles des valuations p-adiques. Pour constater cette dernière, il faut regarder $\mathbb{Q}$ comme des développement en base p et s'insurger du fait que toutes les décompositions infinies en base p n'existent pas [4] ; ce sont les trous de $\mathbb{Q}$ avec la valuation p-adique. La philosophie que je veux souligner pour introduire les nombres p-adiques part du constat, par l'exemple réel, que la résolution d'équation sur des corps non poreux est plus aisée. Nous abandonnons par la suite cette métaphore de la porosité pour parler plutôt de complétude.

Définition 1.12. Le corps topologique $\mathbb{R}$ s'identifie au complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation $|\cdot|_\infty$. Le corps topologique $\mathbb{Q}_p$ est défini comme le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique.

Remarque 1.13. Pour manipuler précisément ses éléments, il est possible d'imaginer les nombres p-adiques commes des séries

$$\sum_{n\gg-\infty} a_n p^n$$

où les a_n appartiennent à $[\![0, p-1]\!]$. Les opérations s'effectuent comme pour des séries formelles mais avec des retenues :

$$\begin{aligned}
1\times p^0 + \sum_{n\geq 0}(p-1)p^n &= \left[1\times p^0 + (p-1)\times p^0\right] + \sum_{n\geq 1}(p-1)p^n \\
&= p^1 + \sum_{n\geq 1}(p-1)p^n \\
&= 1\times p^1 + (p-1)\times p^1 + \sum_{n\geq 2}(p-1)p^n \\
&= \ldots = 0
\end{aligned}$$

Une première remarque imprécise aide à comprendre l'intrication entre les nombres p-adiques et les rationnels d'un point de vue galoisien. L'inclusion $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}_p$ entraîne que $\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}}$ est un sous-corps de $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{sep}}$. Tout élément de $G_{\mathbb{Q}_p}$ laisse stable $\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}}$, ce qui fournit par restriction un morphisme

$$G_{\mathbb{Q}_p}\to G_{\mathbb{Q}}.$$

Pour le dire grossièrement, comprendre la théorie de Galois de $\mathbb{Q}_p$ permet de comprendre un morceau de celle de $\mathbb{Q}$. De tels résultats, couplés à ceux pour $\mathbb{R}$, suffit parfois pour remonter aux extensions finies de $\mathbb{Q}$, que nous appelons *corps de nombres*.

Précisons un peu notre cadre pour un corps de nombres F, afin de conclure cette section en incarnant notre philosophie de la remontée par l'exemple du théorème de Čebotarev. Chaque classe de valuation sur F est appelée *place*. Elle induit sur $\mathbb{Q}$ une valuation ; dans le cas où cette valuation est équivalente à $|\cdot|_\infty$, la place est dite *archimédienne* et le complété F_v de F par rapport à cette valuation est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la valuation induite est équivalente à $|\cdot|_p$, la place est dite *non archimédienne* et le complété F_v est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Les mêmes arguments qu'au paragraphe précédent fournissent un morphisme

$$\mathrm{Gal}(F_v|\mathbb{Q}_p)\to\mathrm{Gal}(F|\mathbb{Q}).$$

Le théorème de Čebotarev s'énonce alors de manière simplifiée [5] comme suit :

4. Certains développement infinis existent déjà. Par exemple, la somme $\sum_{n\geq 0} p^n$ est l'inverse formel de $1-p$ et existe déjà dans $\mathbb{Q}$, incarnée par $\frac{1}{1-p}$.

5. Pour un corps de nombres F, et pour toutes les places sauf un nombre fini, l'extension $F_v|\mathbb{Q}_p$ est non ramifiée (voir [Neu99, Chapitre I, proposition 8.4] ou pour un énoncé plus précis [Neu99, Chapitre III, corollaire 2.12]). Le théorème de Chebotarev complet, par exemple dans [Neu99, Chapitre VII, proposition 13.4], donne la densité de l'ensembles des places pour lesquelles l'image du Frobenius de $\mathrm{Gal}(F_v|\mathbb{Q}_p)$ dans $\mathrm{Gal}(F|\mathbb{Q})$ est dans la classe de conjugaison de σ.

Théorème 1.14 (Čebotarev, version simplifiée)**.** *Soit F un corps de nombres. Pour tout élément σ de $\mathrm{Gal}(F|\mathbb{Q})$, il existe une place non archimédienne v telle que la classe de conjugaison de σ intersecte l'image de $\mathrm{Gal}(F_v|\mathbb{Q}_p)$.*

Corollaire 1.15. *Soit P un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Si P est scindé sur $\mathbb{Q}_p$ pour tout nombre premier p, alors P est scindé sur $\mathbb{Q}$.*

Le corollaire précédent fournit un exemple de remontée de résultats depuis les complétés de $\mathbb{Q}$ vers les rationnels. Dans certains cas, comprendre qu'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ possède suffisamment de racines dans les $\mathbb{Q}_p$ permet de prouver l'existence de telles racines dans $\mathbb{Q}$. Ce succès de la philosophie permet à ce texte de glisser sereinement vers l'étude exclusive des places non archimédiennes.

1.3 Un peu de vocabulaire de corps locaux

Pour fluidifier l'étude des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$, que nous appelons par la suite *corps locaux p-adiques*, il faut introduire un certain nombre de définitions. Deux introductions plus détaillées à ces notions [6] se trouvent dans [Neu99, Chapitre I §8, chapitre II §5] ou de manière plus concise au début de [Ser04]. Nous fixons dans cette section un corps local p-adique K et une extension algébrique $L|K$. La complétude de $\mathbb{Q}_p$ rend plus rigides ses extensions et nous déplions dans les quelques définitions qui suivent les objets qui émergent de cette rigidité.

Proposition 1.16. *La valuation p-adique sur $\mathbb{Q}_p$ s'étend de manière unique en une valuation $|\cdot|_p$ sur K.*

Définition 1.17. L'anneau des entiers de K est défini comme

$$\mathcal{O}_K = \big\{ x \in K \,\big|\, |x|_p \leq 1 \big\}.$$

C'est un anneau principal et local, i.e. tout idéal est engendré par un élément et il existe un unique idéal maximal $\mathfrak{m}_K$. Tout élément engendrant ledit idéal sera appelé *uniformisante* de K et notée π_K. Le *corps résiduel* que l'on note κ_K est défini par

$$k_K = \mathcal{O}_K / \mathfrak{m}_K.$$

C'est un corps fini dont nous notons q_K le cardinal, qui est une puissance de p.

Définition 1.18.

1. Lorsque l'extension $L|K$ est finie, il existe un entier $e_{L|K}$ appelé *indice de ramification* tel que
$$|\pi_K|_p = |\pi_L|_p^{e_{L|K}}.$$
2. L'extension est dite *non ramifiée* lorsque $e_{L|K} = 1$.
3. L'extension est dite *modérément ramifiée* lorsque $e_{L|K}$ est premier à p.
4. Les mêmes notions de ramifications s'étendent aux extensions quelconques $L|K$ lorsqu'elles sont unions d'extensions finies vérifiant les propriétés de ramification.

La liste de définitions précédente peut paraître un peu indigeste. Il est possible de résumer la notion de ramification en regardant ce qu'il se passe au niveau des valuations. La formule définissant l'indice de ramification fournit le lien entre les valuations π_K- et π_L-adiques sur L qui sont elles-mêmes équivalentes à $|\cdot|_p$. Cet indice indique moralement à quel point la valuation se scinde et à quel point l'uniformisante π_K, qui était irréductible dans $\mathcal{O}_K$, se factorise.

6. Bien que toutes deux introduisent des notions plus générales pour traiter les corps de nombres.

Exemple 1.19. Pour $\mathbb{Q}_p$, l'anneau des entiers correspond à $\mathbb{Z}_p$; nous pouvons prendre p comme uniformisante ; le corps résiduel est $\mathbb{F}_p$.

Nous pouvons comparer ces trois objets à $\mathbb{F}_p[\![T]\!]$ comme anneau des entiers de $\mathbb{F}_p((X))$, ayant pour corps résiduel $\mathbb{F}_p$.

Exemple 1.20. Soit n un entier. Dans le corps de décomposition du polynôme $X^{p^n} - p$ de $\mathbb{Q}_p[X]$, toute racine π_n dudit polynôme vérifie

$$|\pi_n|_p^n = |\pi_n^n|_p = |p|_p.$$

Il se trouve que π_n est une uniformisante de ce corps ce qui implique qu'aucune de ces extensions n'est non ramifiée, et qu'elle est modérément ramifiée si et seulement si n est premier à p.

Selon ce premier prisme de la ramification, nous allons pouvoir effectuer un premier dévissage de G_K pour un corps local p-adique. Il permettra de digérer la lecture de cette section un peu compacte et de nous mener paisiblement au second dévissage qui nous intéresse davantage.

1.4 Premier dévissage de G_K

Nous pouvons comprendre ce qu'il se passe d'un point de vue galoisien en une place archimédienne : le théorème de d'Alembert-Gauss affirme que $\mathbb{C}$ est une clôture séparable de $\mathbb{R}$ et par conséquent que $G_{\mathbb{R}}$ est isomorphe à ${}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$ avec pour générateur la conjugaison complexe. Lorsque le corps de nombre grossit, cette simplicité apparente est modérée par la prolifération des places archimédiennes ; il faut analyser l'interaction entre lesdites places. Il n'en demeure pas moins que les groupes de Galois eux-mêmes sont élémentaires. A contrario, toute clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ est de degré infini.

Dans cette section, nous fixons K un corps local p-adique. Nous gardons les notations de la section précédente, en omettant l'indice lorsqu'il s'agit de K, i.e. une uniformisante π et k le corps résiduel. Bien que le groupe de Galois absolu G_K soit infini, il est possible de le dévisser quelque peu. La première étape du dévissage consiste à comprendre les extensions non ramifiées de K. Le théorème suivant résume les résultats clés à ce sujet dans [CF67, Chapitre I, §7], qui fonctionne dans un cadre bien plus général que le nôtre.

Théorème 1.21. *Pour le corps local p-adique K :*

1. *Soit $l|k$ une extension galoisienne. Il existe une extension finie algébrique et séparable $L|K$ vérifiant les deux propriétés suivantes : k_L est isomorphe à l et $L|K$ est non ramifiée. Cette extension est galoisienne, caractérisée comme sous-corps de K^{sep} par ces deux propriétés.*

2. *Pour tout extension $L|K$, la restriction de tout élément de $\mathrm{Gal}(L|K)$ à $\mathcal{O}_L$ passe au quotient en un élément de $\mathrm{Gal}(k_L|k)$. Dans le cas d'une extension construite au premier point, le morphisme de groupes topologiques*

$$\mathrm{Gal}(L|K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(l|k)$$

est un isomorphisme.

3. *Soit $l|k$ une extension galoisienne. Soit P un polynôme unitaire de $\mathcal{O}_K[X]$ tel que l soit le corps de décomposition de sa réduction $\overline{P}$ modulo π, qui appartient à $k[X]$. Le corps de décomposition de P vérifie les propriétés du premier point.*

4. *Il existe une extension non ramifiée maximum de K dans K^{sep}, que l'on note K^{nr}.*

Regardons ce que ce théorème donne dans notre cadre. Les extensions galoisiennes[7] de k sont exactement les corps de décomposition des polynômes $X^{q^n-1}-1$ pour $n \geq 1$. Il découle des troisième et quatrième points du théorème 1.21 que K^{nr} est obtenue en rajoutant à K les racines (q^n-1)-ième de l'unité pour tout n. Ceci équivaut à rajouter les racines l-ièmes de l'unité pour tout l premier à p.

De plus, le deuxième point du théorème 1.21 appliqué à $l = k^{\mathrm{sep}}$ fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}|K) \cong G_k.$$

Ce dernier est est topologiquement engendré par la puissance q-ième, isomorphe à la complétion profinie $\widehat{\mathbb{Z}}$. Nous notons Frob la *substitution de Frobenius*, image réciproque de la puissance q-ième par l'isomorphisme précédent. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}|K)$ est ainsi topologiquement engendré par Frob, isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}$. L'isomorphisme

$$\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}|K)$$

envoie un entier m sur l'unique automorphisme de K^{nr} qui envoie toute racine de l'unité sur sa puissance q^m-ième. Nous pouvons ainsi écrire un premier dévissage via la suite exacte

$$1 \longrightarrow I_K \longrightarrow G_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}|K) \longrightarrow 1$$

où $I_K = G_{K^{\mathrm{nr}}}$ est appelé *groupe d'inertie*.

La deuxième étape du dévissage consiste à comprendre les extensions modérement ramifiées de K. Le théorème suivant résume les résultats relatifs à ce sujet dans [CF67, Chapitre I, §8][8].

Théorème 1.22. *Il existe une extension modérément ramifiée maximum de K, que l'on note K^{mr}. Cette extension est engendrée par les racines j-ièmes de π pour j premier à p. Elle contient l'extension K^{nr} via les quotients de telles racines.*

Pour découper le groupe $G_{K^{\mathrm{nr}}}$, nous pouvons à présent nous intéresser à son quotient $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{mr}}|K^{\mathrm{nr}})$. Fixons nous $(\pi_j)_{j,\, \gcd(j,p)=1}$ un système cohérent de racines primitives j-ièmes de π, i.e. tel que

$$\forall (i,j), \;\; \pi_{i\times j} = \pi_i^j.$$

Puisque les racines primitives j-ièmes de π diffèrent d'un élément de K^{nr}, se donner un élément de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{mr}}|K^{\mathrm{nr}})$ revient à se donner l'image du système (π_j) qui doit être un autre système cohérent. Nous obtenons ainsi un isomorphisme, unique à automorphisme intérieur près

$$\begin{aligned} \prod_{l\neq p} \mathbb{Z}_l &\longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{mr}}|K^{\mathrm{nr}}) \\ (x_l) \;\; &\mapsto \left[\pi_j \mapsto \pi'_j \text{ tq } \forall j = l^n k \text{ avec } \gcd(k,l)=1,\; \pi_j'^k = \pi_{l^n}^{x_l}\right]. \end{aligned}$$

La deuxième étape du dévissage s'écrit alors comme la suite exacte

$$1 \longrightarrow I_{K,2} \longrightarrow I_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{mr}}|K^{\mathrm{nr}}) \longrightarrow 1$$

où $I_{K,2} = G_{K^{\mathrm{mr}}}$ s'appelle le *groupe d'inertie sauvage*[9] En résumé, il est possible de dévisser de manière explicite G_K comme

$$1 \longrightarrow I_{K,2} \longrightarrow G_K \longrightarrow \left(\prod_{l\neq p} \mathbb{Z}_l\right) \rtimes \widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0.$$

7. Pour une introduction à la théorie de Galois des corps finis, voir [Bou81, Chapitre V, §12].

8. Notons que ces résultats fonctionnent dans un cadre bien plus général que le nôtre. Les démonstrations dans le cadre des corps locaux sont toutefois loin d'être les plus pertientes au sens où nous avons une description plus générale de l'extension modérément ramifiée d'un corps valué. Une lecture intéressée emmènera vers ref.

9. Il s'agit en effet d'un pro-p-groupe, autrement dit la partie p-primaire du groupe d'inertie.

Remarque 1.23. Il est à première vue étonnant que cette extension ne dépende pas de l'uniformisante choisie. Il se trouve cependant que $\mathcal{O}_{K^{\mathrm{nr}}}$ est hensélien, c'est-à-dire qu'une racine simple d'un polynôme au niveau du corps résiduel se relève. Le corps résiduel de K^{nr} étant algébriquement clos, le quotient de deux uniformisantes admet déjà des racines arbitraires dans K^{nr}.

Ce dévissage, dont les démonstrations omises utilisent l'éventail des objets classiques dont la section précédente a dévoilé un pan, permettent de souligner que la complexité du groupe G_K se loge dans sa partie sauvagement ramifiée. Notre dévissage a également souligné une filtration décroissante du groupe de Galois G_K par le groupe d'inertie, puis le groupe d'inertie sauvage, et nous pourrions la prolonger en une filtration séparée. Un théorème de S. Mochizuki dans [Moc97] affirme qu'un isomorphisme entre groupes de Galois absolus de corps locaux p-adiques qui respecte ces filtrations provient d'un isomorphisme de corps. La théorie de Galois d'un corps local p-adique concentre sa difficulté dans l'inertie sauvage et dans l'interaction de cette dernière avec la partie modérément ramifiée.

1.5 Théorie du corps de classes local et deuxième dévissage

De ce point de vue, la théorie du corps de classes local opère un dévissage légèrement différent de G_K, qui permet de comprendre davantage la ramification sauvage. Nous l'abordons depuis l'angle des lois de Lubin-Tate, ce qui nous servira dans la dernière partie de ce texte. La théorie du corps de classes s'intéresse à la description de l'abélianisé de G_K, ce qui revient à comprendre les caractères de G_K. Historiquement, le cas des corps de nombres a été étudié par T. Tagaki [10] en 1920 puis raffiné dans les années 1930 notamment par E. Artin pour en déduire la version pour les corps locaux p-adiques que nous appelons théorie du corps de classe locale. Ces démonstrations avaient cependant le défaut de décrire principalement G_K^{ab} sans pouvoir expliciter l'extension maximum abélienne K^{ab}. Ceci arrive en 1965 dans [LT65], et nous allons détailler quelque peu ce qu'ils introduisent. La présentation actuelle du corps de classes local privilégie des méthodes cohomologiques [11] pour décrire G_K^{ab} puis utilisent les arguments de Lubin et Tate pour construire une extension avec le bon groupe de Galois. Nous conseillons plutôt, tant pour l'architecture de la présentation que pour les méthodes plus élémentaires, de lire [Yos06] qui commence par construire l'extension de Lubin-Tate puis démontre par une plongée fine dans les groupes de ramification qu'il s'agit de l'extension abélienne maximum.

Dans [LT65], J. Lubin et J. Tate choisissent un polynôme f de $\mathcal{O}_K[X]$ vérifiant

$$f \equiv \pi X + X^q \mod \pi X^2 \mathcal{O}_K[X].$$

Ils montrent ensuite l'existence d'une famille $([a]_{\mathrm{LT}})_{a\in\mathcal{O}_K}$ d'éléments de $\mathcal{O}_K[\![X]\!]$ définie par les deux propriétés

$$f = [\pi]_{\mathrm{LT}} \text{ et } \forall a \in \mathcal{O}_K,\ \ [a]_{\mathrm{LT}} \equiv aX \bmod X^2\mathcal{O}_K[\![X]\!],$$

$$\forall a, b \in \mathcal{O}_K,\ \ [ab]_{\mathrm{LT}} = [a]_{\mathrm{LT}} \circ [b]_{\mathrm{LT}} \text{ et en particulier } f \circ [a]_{\mathrm{LT}} = [a]_{\mathrm{LT}} \circ f.$$

J. Lubin et J. Tate retrouvent à partir de ces objets la description de G_K^{ab} qui existait déjà, en donnant de sucroît une construction explicite de K^{ab} :

Théorème 1.24. *Soit K_{LT} une extension de Lubin-Tate que l'on définit comme corps de décomposition des itérés $(f^{\circ n})_{n\geq 1}$.*

10. Il étudie un quotient fini et primoridal, le corps de classes de Hilbert sur lequel nous n'aurons pas le temps de nous étendre.

11. Un peu plus absconses.

1. *Il existe une injection continue*
$$K^\times \hookrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}K_{\mathrm{LT}}|K),\ a \mapsto \sigma_a$$
dont l'image est dense. L'élément σ_π agit par
$$(\sigma_\pi)_{|K^{\mathrm{nr}}} = \mathrm{Frob},\ \ (\sigma_\pi)_{|K_{\mathrm{LT}}} = \mathrm{Id}.$$
Pour tout élément a de $\mathcal{O}_K^\times$, l'élément σ_a agit par
$$(\sigma_a)_{|K^{\mathrm{nr}}} = \mathrm{Id}$$
et pour toute racine z d'un $f^{\circ n}$, la série $[a]_{\mathrm{LT}}(z)$ converge et
$$\sigma_a(z) = [a]_{\mathrm{LT}}(z).$$
2. *L'extension abélienne maximum K^{ab} coïncide avec $K^{\mathrm{nr}}K_{\mathrm{LT}}$.*

Remarque 1.25. L'extension K_{LT} dépend de l'uniformisante choisie mais nous supposerons jusqu'à la fin cette uniformisante fixée. En particulier nous choisirons p comme uniformisante de $\mathbb{Q}_p$. L'extension $K^{\mathrm{nr}}K_{\mathrm{LT}}$ ne dépend en revanche pas des choix de l'uniformisante. Nous pouvons moralement justifier cette indépendance de la même manière qu'en remarque 1.23 : l'adjonction du corps K^{nr} rajoute des éléments qui permettent de faire le lien entre les différentes uniformisantes. Mieux, l'injection continue du théorème précédent ne dépend pas non plus de l'uniformisante.

Exemple 1.26. Un avantage de la méthode de Lubin-Tate étant d'expliciter l'extension K^{ab}, nous regardons le résultat pour $\mathbb{Q}_p$. Ce cas particulier présente de grandes simplifcations calculatoires puisque nous pouvons choisir comme polynôme de Lubin-Tate $(1+X)^p - 1$. Ses itérés sont donnés par
$$(1+X)^{p^n} - 1.$$
Ainsi, une extension de Lubin-Tate est obtenue en ajoutant les racines p^n-ièmes de l'unité pour tout n ; nous l'appelons $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$. Pour toute racine p^n-ième ζ_{p^n}, nous avons
$$\sigma_a(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{(a \mod p^n\mathbb{Z}_p)}.$$
Le théorème permet donc en particulier de retrouver le théorème de Kronecker-Weber pour $\mathbb{Q}_p$: l'extension $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}}$ est engendrée par toutes les racines de l'unité.

Ce théorème permet d'effectuer le dévissage suivant de G_K :
$$1 \longrightarrow G_{K^{\mathrm{ab}}} \longrightarrow G_K \longrightarrow G_K^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}|K) \cong \widehat{K^\times} \longrightarrow 1$$
dont nous voyons qu'il capture des extensions de ramifications diverses. Il contient évidemment la partie non ramifiée et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}|K)$ correspond au quotient $\pi^{\widehat{\mathbb{Z}}}$ de $\widehat{K^\times}$. Il contient également l'extension totalement ramifiée $K_{\mathrm{LT}}|K$ de groupe de Galois correspond au quotient $\mathcal{O}_K^\times$. Ce dernier possède un quotient fini isomorphe à
$$\mathcal{O}_K^\times/1+\pi\mathcal{O}_K \cong k^\times$$
ce qui fournit, par le théorème fondamental de la théorie de Galois, une extension finie K_1 modérément ramifiée. Considérer l'extension $K_{\mathrm{LT}}|K_1$ correpond étendre le groupe de Galois par un pro-p-groupe : nous commençons ainsi à décortiquer quelque peu l'inertie sauvage. En particulier, nous obtenons le dévissage suivant :
$$1 \longrightarrow G_{K_{\mathrm{LT}}} \longrightarrow G_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{LT}}|K) \cong \mathcal{O}_K^\times \longrightarrow 1$$
qui nous servira sous peu.

2 La correspondance de Langlands locale pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

2.1 Motivations de la correpondances de Langlands locale p-adique

Nous étudierons les représentations continues de G_K à coefficients dans un corps local p-adique L. Commençons par se demander pourquoi elles émergent comme objets d'études. Nous pouvons proposer deux pistes. La première, très générale [12], consiste à dire que les représentations d'un groupe offrent beaucoup de prises, comme l'illustre la théorie des caractères des représentations d'un groupe fini, et que comprendre toutes ces représentations permet de disséquer convenablement le groupe en question. Par exemple, un groupe profini abélien est entièrement caractérisé par ses caractères à coefficients dans les corps locaux p-adiques [13].

Ces représentations émergent aussi naturellement de la géométrie. Considérons par exemple $E(\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}})$ les *points d'une courbe elliptique définie sur* $\mathbb{Q}$ dans une cloture séparable, autrement dit pour un couple de rationnels (a, b) fixé [14] l'ensemble des triplets

$$\left\{\, (x, y, z) \in (\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}})^3 \backslash \{(0, 0, 0)\} \text{ tels que } y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3 \,\right\}$$

à multiplication par un scalaire près. Nous pouvons aussi le voir comme l'ensemble des couples

$$\left\{\, (x, y) \in (\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}})^2 \text{ tels que } y^2 = x^3 + ax + b, \right\}$$

auxquels on a rajouté un point ∞ qui correspond au triplet $(0, 1, 0)$. Il est possible de munir cet espace d'une loi de groupe abélien (voir [Sil09, §III.2]). On dispose d'un isomorphisme depuis le sous-groupe des points p^n-torsion de $E(\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}})$:

$$E(\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}})[p^n] \cong \left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right)^2.$$

De plus, la p^{n+1}-torsion s'envoie par la multiplication par p sur la p^n-torsion, ce qui permet de décrire le groupe suivant que l'on appelle *module de Tate de* E :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_p E &= \lim_{\substack{n \geq 0 \\ p\times - \,:\, E(\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}}) \to E(\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}})}} E(\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}})[p^n] \\ &= \left\{ (Q_n)_{n\geq 0} \in \prod_n E(\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}})[p^n] \;\middle|\; \forall n,\ pQ_{n+1} = Q_n \right\} \\ &\cong \mathbb{Z}_p^2. \end{aligned}$$

La loi de groupe sur $E(\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}})$ est définie par des fractions rationnelles sur $\mathbb{Q}$. Ainsi, l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur $E(\mathbb{Q}^{\mathrm{sep}})$ est additive et passe à la limite en une action continue et $\mathbb{Z}_p$-linéaire de $G_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathrm{T}_p E$. Nous en déduisons un morphisme de groupes

$$G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p).$$

Ce contexte des courbes elliptiques fait donc naturellement apparaître des représentations de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}_p}$ à coefficients dans un corps local p-adique qui seront l'objet d'étude majoritaire de cette section sur la correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Les différents branches et variations du programme de Langlands visent à comprendre les correspondances entre représentations galoisiennes d'un côté et représentations plus analytiques. Dans le cadre local qui nous intéresse [15] nous considérons des représentations de groupes

12. Probablement trop générale.
13. Ces derniers contiennent en effet toutes les racines de l'unité.
14. Avec la condition $47a^3 + 27b^2 \neq 0$.
15. Dans le cadre global des corps de nombres, il s'agit de représentations automorphes provenant de courbes modulaires.

algébriques, que nous limitons dans ce texte aux groupes de matrices $\mathrm{GL}_n(K)$. Il se trouve que la section précédente a déjà souligné de tels liens ; la théorie du corps de classes locale (voir sous-section 1.5), via le théorème 1.24 fournit une bijection entre les L-caractères continus de G_K et certains [16] L-caractères de $\mathrm{GL}_1(K) = K^\times$. Ceci peut être interpété comme la correspondance de Langlands p-adique. Historiquement, une correspondance était démontrée pour certaines représentations censées venir de la géométrie et non pour toutes, ceci se traduisait par une condition plus forte que des représentations continues pour la topologie p-adique du côté groupes linéaire : les représentations obtenues étaient à stabilisateurs ouverts. Il n'en reste pas moins que cette version incomplète de la correspondance permit notamment à C. Breuil et A. Mézard dans [BM02] de décrire les relevés d'une représentation modulo p, à action de l'inertie fixée, en fonction justement de la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ associée à cette dernière représentation. C. Breuil et A. Mézard énoncent dans le même article la possibilité d'une correspondance qui ne souffre plus des précédentes restrictions et qui mette en correspondance toutes les $\mathbb{Q}_p$-représentations 2-dimensionelles galoisiennes de $G_{\mathbb{Q}_p}$ qui sont continues [17] et une classe nécessairement plus vastes de $\mathbb{Q}_p$-représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

P. Colmez répond à cette interrogation dans une conférence à Montréal en 2005, en détaillant une construction de la *correspondance de Langlands locale p-adique pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, en partie en utilisant la théorie des (φ, Γ)-modules dont nous allons discuter pour rendre plus fonctorielle la bijection abstraite qu'était alors la correspondance de Langlands.

2.2 L'équivalence de Fontaine

En 1991, J.-M. Fontaine utilise pour la première fois dans [Fon91] des objets d'algèbre semi-linéaire appelés (φ, Γ)-modules, qui s'avèreront cruciaux pour le développement de la correspondance de Langlands p-adique. Initialement, ces idées émergent dans le cadre de la théorie de Hodge p-adique qui vise à étudier certaines classes de représentations de G_K à coefficients dans d'autres corps locaux p-adiques en leur substituant des objets d'algèbre semi-linéaire. Ces derniers permettent le développement d'un arsenal plus grand de techniques calculatoires, aident à déformer les représentations, etc. Bien que la théorie de Hodge p-adique commence par restreindre les représentations considérées pour ceindre celles qui viendraient de la géométrie, l'équivalence de Fontaine s'intéresse à la classe la plus générale possible. Nous introduisons les quelques objets nécessaires avant d'expliquer la philosophie de cette équivalence.

Rappelons le dévissage du groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}_p}$ qui suit

$$1 \longrightarrow G_{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})} \longrightarrow G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})|\mathbb{Q}_p) \cong \Gamma \longrightarrow 1.$$

La théorie de Galois de $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ est la même que celle de son complété p-adique $\widehat{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$. Ici, le corps $\widehat{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$ possède deux propriétés très importantes : la puissance p-ième est surjective modulo p et il est complet. La théorie des corps de normes de Fontaine-Wintenbergée, ou celle des corps perfectoïdes développée par P. Scholze fournissent une équivalence entre sa théorie de Galois et celle d'un objet de caractéristique p appelé *basculé* qui s'identifie dans ce cas à la complétion

$$\mathbb{F}_p((X^{p^{-\infty}})) = \widehat{\bigcup_{n \geq 0} \mathbb{F}_p((X^{p^{-n}}))}.$$

Enfin, des outils classiques de théorie de Galois des corps imparfaits que nous avons ignoré dans la première partie nous permette d'identifier la théorie de Galois de ce corps complexe à celle

16. Ceux qui s'étendent à la complétion profinie.
17. En un sens que nous préciserons plus tard.

de $\mathbb{F}_p((X))$. Il nous manque la donnée de l'action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})|\mathbb{Q}_p)$, or son action sur $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ se transmet à $\mathbb{F}_p((X))$ et vérifie

$$\forall a \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \quad a \cdot X = (1+X)^a - 1.$$

J.-M. Fontaine arrive à identifier de telles représentations du groupe de Galois absolu d'un corps de caractéristique p à des objets d'algèbre semi-linéaire (voir [Fon91, Section A1]), ce qui nous mène aux objets suivants.

Définition 2.1. Dans le cas du corps $\mathbb{Q}_p$, J.-M. Fontaine note E le corps

$$E = \mathbb{F}_p((X))$$

et définit la $\mathbb{Z}_p$-algèbre $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ par

$$\mathcal{O}_\mathcal{E} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_k X^k \,\middle|\, \forall k,\ a_k \in \mathbb{Z}_p \text{ et } a_k \xrightarrow[n \to -\infty]{} 0 \right\}.$$

L'anneau $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ est de valuation discrète, d'uniformisante p et de corps résiduel E. Nous munissons cet anneau d'une action $\mathbb{Z}_p$-linéaire de

$$\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})|\mathbb{Q}_p)$$

identifié à $\mathbb{Z}_p^\times$ par la théorie du corps de classes locale. Cette action vérifie que

$$a \cdot X = (1+X)^a - 1$$

pour tout $a \in \mathbb{Z}$. Nous munissons également cet anneau d'un relèvement de Frobenius φ tel que $\varphi(X) = (1+X)^p - 1$. Le Frobenius et l'action de Γ commutent.

Définition 2.2. Soit $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_\mathcal{E})$ la catégorie abélienne des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Ses objets sont les $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-modules D de type fini munis d'un Frobenius φ-semi-linéaire φ_D, d'une action semi-linéaire continue de Γ, commutant entre eux, et tels que $\varphi_D(D)$ engendre le $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-module D. Ses morphismes sont les applications $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-linéaires commutant au Frobenius et à l'action de Γ. Nous utiliserons les mêmes notations dans la suite en changeant l'anneau et le monoïde donnant l'action.

La catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p}$ est la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-modules de type fini V munis d'une action $\mathbb{Z}_p$-linéaire et continue de $G_{\mathbb{Q}_p}$, i.e. telle que

$$G_{\mathbb{Q}_p} \times V \to V$$

est continue pour la topologie canonique du groupe de Galois et la topologie p-adique sur V. Nous utiliserons les mêmes notations dans la suite en changeant l'anneau des coefficients et le corps du groupe de Galois.

Théorème 2.3 (Cas particulier du théorème 3.4.3 dans [Fon91])**.** *La catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p}$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_\mathcal{E})$. Nous appelons $(\mathbb{D}, \mathbb{V})$ le couple de foncteurs quasi-inverses. L'équivalence de catégorie préserve les facteurs invariants. En particulier, la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p} G_{\mathbb{Q}_p}$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, E)$.*

En substance, le théorème affirme que l'information donnée par les représentations galoisiennes est entièrement codée par des objets d'algèbre semi-linéaire, substituant à l'obscurité du groupe de Galois absolu la complexité de l'anneau $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Dans l'anneau $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, il nous est toutefois possible de calculer. Pour illustrer cette idée, des notes de cours non publiées de P. Colmez montrent comment retrouver la théorie du corps de classes pour $\mathbb{Q}_p$ à partir de la théorie des (φ, Γ)-modules ; pour comprendre le groupe $G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$, il suffit de comprendre ses représentations de dimension 1 à coefficients dans toutes les extensions finies $L|\mathbb{Q}_p$, autrement dit les (φ,Γ)-modules de rang 1. Il devient alors possible de décrire explicitement ces (φ,Γ)-modules en utilisant une interprétation de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ en terme d'analyse fonctionnelle p-adique. Notamment, le sous-anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{+} = \mathbb{Z}_p[\![X]\!]$ s'identifie à l'ensemble des mesures sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$, i.e. au dual de $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$ comme $\mathbb{Z}_p$-module.

Différents travaux ont été réalisés pour comprendre comment retrouver certaines informations sur les représentations galoisiennes à partir des (φ,Γ)-modules associés. Nous citerons principalement [Her98] où L. Herr expose comment retrouver la cohomologie galoisienne $\mathrm{H}^\bullet(G_{\mathbb{Q}_p},V)$ à partir de $\mathbb{D}(V)$. Il semble émerger que les (φ,Γ)-modules codent extrêmement bien les représentations galoisiennes.

2.3 La correspondance de Langlands locale p-adique modulo p pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

En 2010 sort un volumineux volume d'Astérisque [Col10] à propos de la correspondance de Langlands qui nous préoccupe. P. Colmez y construit un foncteur

$$\mathbf{V} \,:\, \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}G_{\mathbb{Q}_p}$$

où nous ne précisons pas les conditions techniques sur la catégorie de gauche. Pour ce faire, il construit d'abord un (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}\times\Gamma,E)$ à partir d'une représentation Π de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ puis applique le quasi-inverse $\mathbb{V}$ de $\mathbb{D}$. Essayons d'esquisser pourquoi il semble raisonnable d'espérer construire un (φ,Γ)-module à partir d'une telle représentation. L'action $\mathbb{F}_p$-linéaire du groupe de matrice

$$\begin{pmatrix}1 & \mathbb{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

sur Π fournit une structure de module sur l'anneau

$$\mathbb{F}_p\left[\begin{pmatrix}1 & \mathbb{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right].$$

Ce structure s'étend le long du morphisme d'anneaux

$$\mathbb{F}_p\left[\begin{pmatrix}1 & \mathbb{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] \to \mathbb{F}_p((X)), \quad \left[\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right] \mapsto 1+X$$

en une structure de $\mathbb{F}_p((X))$-module sur Π. Pour trouver un Frobenius (resp. une action de Γ), il faut ajouter l'action de

$$\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \left(\text{resp. } \begin{pmatrix}\mathbb{Z}_p^\times & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

La commutation des deux actions est limpide et nous pouvons nous convaincre de la semi-linéarité en considérant le calcul suivant, pour $v\in\Pi$:

$$\begin{aligned}
\varphi\big((1+X)v\big) &= \begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\big((1+X)v\big)\\
&= \begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot v\\
&= \begin{pmatrix}1 & p\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot v\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^p\cdot\varphi(v)\\
&= (1+X)^p\varphi(v)
\end{aligned}$$

La construction est bien plus subtile mais ceci donne une idée des méthodes pour retrouver l'architecture des (φ, Γ)-modules au sein des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Après construction du foncteur $\mathbf{V}$, nous introduisons la notion de représentation supercuspidale pour illustrer la précision de la correspondance obtenue par P. Colmez. Pour toute paire (χ_1, χ_2) de $\mathbb{F}_p$-caractères de $\mathbb{Q}_p^\times$, le caractère

$$\chi \,:\, B^+(\mathbb{Q}_p) = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_p^\times & \mathbb{Q}_p \\ 0 & \mathbb{Q}_p^\times \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbb{F}_p, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \chi_1(a)\chi_2(b)$$

fournit une représentation induite $\mathrm{Ind}_{B^+(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi)$. Ces représentations sont dites de *la série principale*, les autres représentations de cette catégorie de représentations $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sont appelées *supercuspidales*.

La correspondance de Langlands locale p-adique modulo p pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ s'énonce alors comme suit :

Théorème 2.4 (Énoncés 0.10, IV.2.14, VII.4.8, VII.4.12, VII.4.24 dans [Col10])**.** *Le foncteur*

$$\mathbf{V} \,:\, \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p} G_{\mathbb{Q}_p}$$

est exact.

Pour toute $\mathbb{F}_p$-représentation ρ de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}_p}$, il existe une $\mathbb{F}_p$-représentation $\Pi(\rho)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, unique à isomorphisme près, sans sous-objet de dimension finie, et maximale pour la propriété $\mathbf{V}(\Pi(\rho)) = \rho$. Les représentations supercuspidales sont associées aux représentations absolument irréductibles de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}_p}$.

Bien que l'énoncé doive être alambiqué pour être précis, nous en retenons qu'il existe une manière canonique d'associer les représentations qui vérifie deux propriétés très agréables. Si moralement les séries principales viennent de caractères, c'est-à-dire de représentations de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$, et que les supercuspidales constitue les nouveaux blocs, la correspondance respecte cette morale en associant aux supercuspidales des objets absolument irréductibles. Les extensions entre caractères de $G_{\mathbb{Q}_p}$ peuvent également se retrouver en considérant les extensions de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ convenablement associées.

3 S'acheminer vers la correspondance pour $\mathrm{GL}_n(K)$

3.1 Pistes pour $\mathrm{GL}_2(K)$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$

Partant depuis le flanc linéaire du problème, M.-F. Vigneras adapte dans [Vig11] la construction du foncteur de Colmez au cas de $\mathrm{GL}_2(K)$. Elle remplace la structure de E-espace vectoriel obtenue en étendant l'action $\mathbb{F}_p$-linéaire de

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

par une structure de module sur $\mathbb{F}_p[\![X_1, \ldots, X_d]\!][X_i^{-1} \,:\, 1 \leq i \leq d]$ où $d = [K : \mathbb{Q}_p]$, obtenue en étendant l'action $\mathbb{F}_p$-linéaire de

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O}_K \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'action de

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}_K^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp. } \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

devient une action semi-linéaire de $\mathcal{O}_K^\times$ (resp. un Frobenius semi-linéaire), complexe à expliciter. Malheureusement, cette structure ne fournit pas de manière évidente de représentation galoisienne. M.-F. Vigneras décide de quotienter son module, ce qui la force à restreindre les actions obtenues, pour aboutir à un (φ, Γ)-module classique. Elle obtient donc une représentation de $G_{\mathbb{Q}_p}$ qui paraît perdre de l'information.

Motivé par des conjectures que nous évoquerons plutôt dans la prochaine sous-section, G. Zábrádi a récemment construit dans [Záb18a] un foncteur pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ en s'inspirant de la méthode de P. Colmez. Il note Δ la famille des $(n-1)$ racines simples du groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Dans le cadre de représentations modulo p, l'anneau multivariable introduit est

$$E_\Delta = \mathbb{F}_p[\![X_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta]\!][X_\alpha^{-1} \,|\, \alpha \in \Delta],$$

muni de Frobenius et d'une action de

$$\Gamma_\Delta = \prod_{\alpha \in \Delta} \Gamma_\alpha$$

où l'action de Γ_α imite sur X_α l'action classique dans E et laisse les autres variables fixes. Comme dans la construction de P. Colmez, G. Zábrádi reconstruit cet anneau à partir de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, plus précisément à partir du quotient

$$\begin{pmatrix} 1 & & \mathbb{Z}_p \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbb{Z}_p \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

des matrices unipotentes à coefficients entiers par celles de surdiagonale nulle. En regardant l'action de ce quotient et de certaines matrices diagonales sur certains sous-espaces de Π, il construit des objets de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\Phi_\Delta \times \Gamma_\Delta, E_\Delta)$, où Φ_Δ représente une famille de Frobenius indexés par Δ commutant entre eux. Il construit ainsi un foncteur $\mathbf{D}_\Delta^\vee$ vérifiant :

Théorème 3.1 (Section 2.2 et théorème 2.10 dans [Záb18a])**.** *Le foncteur $\mathbf{D}_\Delta^\vee$ est contravariant et exact à droite depuis une sous-catégorie des $\mathbb{F}_p$-représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ vers $\mathcal{D}^{\text{pro}-\text{ét}}(\Phi_\Delta \times \Gamma_\Delta, E_\Delta)$.*

Pour continuer de développer cette idée pour la correspondance de Langlands dans le cas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, Zábrádi a établi dans [Záb18b] ce que l'on pourrait qualifier d'équivalence de Fontaine multivariable :

Théorème 3.2 (Théorème 3.15 dans [Záb18b])**.** *La catégorie des $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\Phi_\Delta \times \Gamma_\Delta, E_\Delta)$ est équivalente à la catégorie des $\mathbb{F}_p$-représentations linéaires de $G_{\mathbb{Q}_p,\Delta} = \prod_{\alpha \in \Delta} G_{\mathbb{Q}_p}$.*

Deux démonstrations de ce théorème se trouvent dans [Záb18b] pour une démonstration purement algébrique, et une autre dans [CKZ21], co-écrite par A. Carter, K. Kedlaya et G. Zábrádi, avec une méthode géométrique qui utilise les diamants.

Ces pistes ne permettent pas encore de démontrer clairement une correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_n(K)$. Nous y voyions que les objets à considérer ne sont pas fixés, ce que nous allons développer.

3.2 Quelle forme la correspondance devrait-elle adopter ?

L'exemple de l'article de M.-F. Vigneras semble montrer que l'énoncé exact de la correspondance pour $\mathrm{GL}_2(K)$ est encore incertain, notamment par un détail que nous avons passé sous silence dans la section précédente : l'article nécessite des hypothèses fortes sur les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$, qui ne seraient pas vérifiées par les représentations qui apparaissent d'un point de vue géométrique. La classification des représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ étant en friche contrairement à son analogue pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, les propriétés à imposer sur lesdites représentations sont plus incertaines. Une autre difficulté se pose : nous avons vu que la catégorie de (φ, Γ)-modules par laquelle sa construction passe ne permet pas à première vue de faire le lien avec des représentations de G_K. Une piste encore vague pourrait se dessiner pour régler cet imbroglio.

L'article de J.-M. Fontaine [Fon91] propose en revanche des analogues à $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ dans le cas d'un corps local p-adique K. La preuve de l'équivalence de Fontaine utilise crucialement (voir sous-section 2.2) le dévissage de $G_{\mathbb{Q}_p}$ par le groupe de Galois d'une extension perfectoïde, mais s'adapte à d'autres extensions perfectoïdes. Le cas classique de $\mathbb{Q}_p$ se réalise grâve au dévissage via $\widehat{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$ et Fontaine propose d'utiliser $K(\mu_{p^\infty})$ de manière générale, dont le basculé est isomorphe à $\widehat{k((X))^{\mathrm{perf}}}$. Cette méthode fournit effectivement une catégorie de (φ, Γ)-modules équivalentes à $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p} G_K$. Le groupe qui remplace Γ correspond à

$$\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})|K) = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})|K \cap \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}))$$

et correspond à un sous-groupe ouvert de $\mathbb{Z}_p^\times$. Malheureusement l'action de ce sous-groupe sur le basculé est complexe à expliciter, et ne paraît pas aisée à relier aux représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ de manière analogue à la sous-section 2.3. Après l'article originel de Fontaine, une variante appelée (φ, Γ)-*modules Lubin-Tate* est apparue. Cette variante choisit de dévisser G_K par l'extension $\widehat{K_{\mathrm{LT}}}$. Il se trouve que le basculé de $\widehat{K_{\mathrm{LT}}}$ est lui-aussi isomorphe à $\widehat{k((X))^{\mathrm{perf}}}$ mais que l'action déduite de

$$\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{LT}}|K) \cong \mathcal{O}_K^\times$$

(resp. le Frobenius) est simple à expliciter : un élément $a \in \mathcal{O}_K^\times$ agit via la formule

$$a \cdot X = [a]_{\mathrm{LT}}(X) \;\big(\text{resp. } \varphi_K(X) = [\pi]_{\mathrm{LT}}(X)\big).$$

Nous appelons E_K ledit corps avec les actions susmentionnées. Une introduction détaillée à ces (φ, Γ)-modules Lubin-Tate se trouve dans [Sch17], où il prouve notammenet une équivalence de Fontaine Lubin-Tate

Théorème 3.3 (Corollaire 3.2.7 dans [Sch17]). *Les catégories* $\mathrm{Rep}_k G_K$ *et* $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi_K^{\mathbb{N} \times \mathcal{O}_K^\times}, E_K)$ *sont équivalentes.*

C'est principalement l'action de $\mathcal{O}_K^\times$ qui met la puce à l'oreille étant donné que la construction de M.-F. Vigneras aboutit effectivement à une telle action. Il reste toutefois quelques questions pour l'obtention d'un foncteur plus agréable.

De manière moins spécifique, un article récent donne quelques directions quant à la forme que prendrait la correspondance pour $\mathrm{GL}_n(K)$. Dans [Bre+21], cinq auteurs partent de représentations automorphes apparaissant dans un cadre global puis définissent un foncteur que l'on appellera $\mathbf{V}_{\text{général}}$ assez proche de celui de M.-F. Vigneras.

Conjecture 3.4 (Conjecture 1.2.5 dans [Bre+21]). *Pour certaines représentations $\bar{r}_v$ de G_K, à laquelle la cohomologie étale des variétés de Shimura associent une représentation lisse et admissible Π_v de $\mathrm{GL}_n(K)$, nous avons un isomorphisme $G_{\mathbb{Q}_p}$-équivariant pour un certain entier $d \geq 1$:*

$$\mathbf{V}_{\text{général}}(\Pi_v^{\oplus d}) \cong \Big[\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{\mathbb{Q}_p}}\big(\bigotimes_{1\le i<n} \bigwedge^i \bar{r}_v\big)\Big]^{\oplus d}.$$

Interprétons cet énoncé. Du côté de l'entier n, il serait possible que le foncteur de Breuil oubliât l'existence de la représentation $\otimes_{1\le i<n} \wedge^i \bar{r}_v$ de $\prod_{1\le i<n} G_K$, où chaque terme du produit agit sur le terme correspondant du produit tensoriel, et qu'il l'oubliât en passant à l'action diagonale de G_K. La représentation du produit aurait cette forme particulière parce que nous considérons des représentations provenant d'un cadre global. Quant à l'induite tensorielle, les interprétations sont plus nombreuses. Une première solution, étayée par J. Nekovář et T. Scholl dans [NS16], part du fait que la représentation qui sort de la cohomologie étale possède une action de $\mathrm{Aut}(K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{sep}}|K)$ dont la restriction à $G_{\mathbb{Q}_p}$ donnerait l'induite tensorielle précédente [18]. Il se peut que la situation générale fournisse également une action du groupe $\mathrm{Aut}(K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{sep}}|K)$, auquel cas nos représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$ seraient en correspondance avec des représentations continues de $\mathrm{Aut}(K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{sep}}|K)$. En étant moins ambitieux sur l'existence d'une telle action hors du cadre global, nous pouvons conjecturer que les objets du côté galoisien seraient des représentations d'un produit de $[K : \mathbb{Q}_p]$ copies de G_K. Dans le cadre global, il faudrait donc restreindre l'action de $\mathrm{Aut}(K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{sep}}|K)$ à son sous-groupe $G_K^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ pour se ramener au cas général, sans se restreindre à $G_{\mathbb{Q}_p}$ pour ne pas perdre d'information. Enfin, nous pourrions dire, probablement trop naïvement, que cette induite tensorielle est ici pour signifier l'oubli d'information lors du passage de (φ,Γ)-modules associés à K aux (φ,Γ)-modules associés à $\mathbb{Q}_p$ dans la construction de $\mathbf{V}_{\text{général}}$. Par exemple, si $K|\mathbb{Q}_p$ est galoisienne que ρ est une représentation continue de G_K et que $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$, l'induite tensorielle de ρ et celle de ρ^σ définie par $\rho^\sigma(g) = \rho(\sigma g \sigma^{-1})$ sont isomorphes, sans que ρ et ρ^σ soient isomorphes comme représentations de G_K.

Tout ceci souligne que la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_n(K)$ paraît encore évanescente, jusqu'à l'énoncé qu'il faudrait démontrer.

Références

[Car45] G. CARDAN. *Artis magnæ, sive de regulis algebraicis*. 1545.

[Gal46] É. GALOIS. « Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* (1846).

[LT65] J. LUBIN et J. TATE. « Formal Complex Multiplication in Local Fields ». In : *Annals of Mathematics* 81 (1965), p. 380-387.

[CF67] J.W.S. CASSELS et A. FRÖLICH. *Algebraic Number Theory*. London Mathematical Society, 1967.

[Bou81] N. BOURBAKI. *Algèbre, Chapitre 4 à 7*. Éléments de Mathématiques. Springer, 1981.

[Fon91] J.-M. FONTAINE. « Représentations p-adiques des corps locaux, $1^{\text{ére}}$ partie ». In : *The Grotendieck Festschrift* II (1991), p. 249-309.

[Per96] D. PERRIN. *Cours d'algèbre*. CAPES / Agrégation. Ellipses, 1996.

[Moc97] S. MOCHIZUKI. « A Version of the Grothendieck Conjecture for p-adic Local Fields ». In : *Kyôto University* (1997).

18. Confère la section 3 de [NS16] pour un plus de détails sur le groupe d'automorphismes.

[Her98] L. HERR. « Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques ». In : *Bulletin de la S.M.F* 126 (1998), p. 563-600.

[Neu99] J. NEUKIRCH. *Algebraic Number Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1999.

[BM02] C. BREUIL et A. MÉZARD. « Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ en $l = p$ ». In : *Duke Mathematical Journal* 115 (2002), p. 205-310.

[Ser04] J.-P. SERRE. *Corps locaux*. Hermann, 2004.

[Yos06] T. YOSHIDA. « Local Class Field Theory via Lubin-Tate Theory ». In : *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques* 17 (2006).

[Sil09] J. H. SILVERMAN. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2009.

[Col10] P. COLMEZ. « Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules ». In : *Astérisque* 330 (2010), p. 345-389.

[Vig11] M.-F. VIGNERAS. « Le foncteur de Colmez pour $\mathrm{GL}(2, F)$ ». In : *Advanced Lectures in Mathematics* 19 (2011), p. 531-557.

[NS16] J. NEKOVÁŘ et A.J. SCHOLL. « Introduction to plectic cohomology ». In : *Contemporary Mathematics* 664 (2016), p. 321-337.

[Sch17] P. SCHNEIDER. *Galois Representations and* (φ, Γ)*-Modules*. Cambridge University Press, 2017.

[Záb18a] G. ZÁBRÁDI. « Multivariable (φ, Γ)-modules and smooth o-torsion representations ». In : *Selecta Mathematica* 24(2) (2018), p. 935-995.

[Záb18b] G. ZÁBRÁDI. « Multivariable (φ, Γ)-modules and products of Galois groups ». In : *Maths Research Letter* 25(2) (2018), p. 687-721.

[Bre+21] C. BREUIL et al. « Conjectures and results on modular representations of $\mathrm{GL}_n(K)$ for a p-adic field K ». In : *prépublication* (2021).

[CKZ21] A. CARTER, K. S. KEDLAYA et G. ZÁBRÁDI. « Drinfeld's lemma for perfectoid spaces and overconvergence of multivariate (φ, Γ)-modules ». In : *Documenta Mathematica* 26 (2021), p. 1329-1393.