



Théorie des (φ, Γ) -modules univariables, représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et généralisation à la théorie de (φ, Γ) -modules multivariables

Nataniel MARQUIS (M2)

Encadrant : Pierre COLMEZ (CNRS, Sorbonne Université)

Le 10 septembre 2021

Table des matières

Introduction	3
1 Théorie classique des (φ, Γ)-modules univariables	5
1.1 Prémisses : les \mathcal{S} -modules étales sur R	5
1.2 L'équivalence de catégories de Fontaine	9
1.2.1 L'équivalence de catégories pour un corps de caractéristique p	9
1.2.2 Corps de normes parfait	17
1.2.3 Corps de normes imparfait	22
1.2.4 L'équivalence de catégories pour un corps local de caractéristique nulle	27
1.3 Application au corps de classes local pour \mathbb{Q}_p	30
1.4 Calcul de cohomologie par le complexe de Herr	33
1.5 D'une représentation de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ à un (φ, Γ) -module	34
1.5.1 Présentation standard	34
1.5.2 Première construction d'un Γ -module	35
1.5.3 Structure de (φ, Γ) -module	38
1.5.4 Structure de (φ, Γ) -module étale	40
1.5.5 Finitude de $\mathbf{D}(\Pi)$	41
1.5.6 Comparaisons des deux structures et construction de $\beta_{\mathbb{Z}_p}$	42
1.5.7 Généralisation à d'autres catégories que $\text{Rep}_{\text{tors}} G$	44
2 Théorie des (φ, Γ)-modules multivariables	46
2.1 L'équivalence de catégories de Fontaine à plusieurs variables	46
2.2 Calcul de cohomologie par le complexe de Herr	50
2.3 Le foncteur $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}$ pour $GL_n(\mathbb{Q}_p)$	54
2.3.1 Notations	54
2.3.2 Construction du foncteur	55
2.3.3 Functorialité et étude de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta, 0})))$	61
2.3.4 Liens avec le foncteur de Colmez	62
2.3.5 Liens avec le foncteur de Breuil	63
2.3.6 Exactitude à droite	71
2.4 Induction parabolique	72
2.4.1 Dans le cas de $G = GL_2(\mathbb{Q}_p)$	73
2.4.2 Induction parabolique générale	75
2.4.3 Fin de preuve et conséquence	87
A Des propriétés plus catégoriques	88
B Les anneaux de l'analyse p-adique	91
B.1 Transformée d'Amice	91
B.2 Les Frobenius	92
B.3 Produits tensoriels	93
C Lemmes techniques	94
C.1 L'application d est une distance	94
C.2 Les idéaux de $\kappa((N_{\Delta, 0}))$	95
D Décomposition de Bruhat	97

D.1 Décomposition 97
D.2 Représentants dans la décomposition de Bruhat 98

Introduction

En 2007, Jean-Marc Fontaine publie [Fon07]. Pour énoncer son principal résultat, nous avons besoin de l'anneau (p, X) -adiquement complet $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \mathbb{Z}_p[[\widehat{X}][X^{-1}]]$. Cet anneau est muni d'un relèvement de Frobenius via l'endomorphisme \mathbb{Z}_p -linéaire et continu φ qui à X associe $(1 + X)^p - 1$. De même, il est possible de définir sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ une action de $\Gamma = \mathbb{Z}_p^{\times}$ commutant à φ via les endomorphismes \mathbb{Z}_p -linéaires et continus tels que $\gamma \cdot X = (1 + X)^{\gamma} - 1$. Nous avons également besoin de la catégorie des (φ, Γ) -modules ; il s'agit de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -modules munis d'un endomorphisme φ -semi-linéaire appelé le Frobenius et d'une action semi-linéaire de Γ commutant au Frobenius. Jean-Marc Fontaine établit dans [Fon07] une équivalence de catégorie entre la catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p}$ des \mathbb{Z}_p -modules de type fini avec action continue de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et une sous-catégorie pleine clairement définie de celle des (φ, Γ) -modules sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, que l'on appelle catégorie des (φ, Γ) -modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Cette équivalence est donnée par

$$\mathbb{D} : V \mapsto \mathbb{D}(V) = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$$

où $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ est une $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -algèbre avec un Frobenius et une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$, vérifiant que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}})^{G_{\mathbb{Q}_p}}$.

La première partie de ce mémoire se concentre sur cette première équivalence et sur certains développements en théorie de Hodge p -adique qui se sont servis de cette équivalence.

Dans un premier temps, nous décortiquerons la preuve de ladite équivalence de catégorie. Il faudra d'abord établir une équivalence entre les représentations de $H_{\mathbb{Q}_p} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p^{\infty})$ et les φ -modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ puis réussir à capturer l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}/H_{\mathbb{Q}_p} \cong \Gamma$ via l'ajout d'une action semi-linéaire. L'essentiel de cette capture repose sur le choix précis de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et sur la construction d'une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ étendant celle de Γ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Dans un deuxième temps, suivant un cours donné par Pierre Colmez, nous retrouverons à partir de l'équivalence de Fontaine la théorie du corps de classes locale pour \mathbb{Q}_p . Même si des preuves plus élémentaires existent dans le cas précis de \mathbb{Q}_p , cela nous permettra d'illustrer en quoi l'équivalence de Fontaine permet de réduire des problèmes de représentations à des questions purement semi-linéaires où l'analyse p -adique peut nous fournir des outils efficaces.

Dans un troisième temps, nous verrons comme Laurent Herr a réussi en 1998 dans [Her98] à retrouver la cohomologie galoisienne de \mathbb{Q}_p au sein de la catégorie des (φ, Γ) -modules étales. Plus précisément il définit pour un (φ, Γ) -module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, un complexe $\Phi\Gamma^{\bullet}(\cdot)$ nommé complexe de Herr. Il démontre alors que la cohomologie de $\Phi\Gamma^{\bullet}(\mathbb{D}(V))$ calcule la cohomologie galoisienne $H_{\text{cont}}^{\bullet}(G_{\mathbb{Q}_p}, V)$.

Dans un quatrième temps, la question des représentations de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ se posera. Dans le cadre de la démonstration de la correspondance de Langlands p -adique pour $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ établissant une correspondance entre représentations 2-dimensionnelles de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et certaines représentations de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, les (φ, Γ) -modules forment un pont essentiel entre représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. La construction d'un foncteur \mathbf{D} depuis certaines représentations de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ vers les (φ, Γ) -modules étales constitue un ingrédient essentiel de la preuve et nous étudierons sa construction par Pierre Colmez en nous appuyant sur son article dans [Col10]. Pour les représentations Π de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ concernées, le module $\mathbf{D}(\Pi)$ sera construit à partir de sous-objets du dual Π^{\vee} . Schématiquement, la structure de (φ, Γ) -module sur $\mathbf{D}(\Pi)$ sera construite comme suit : le dual de l'action lisse de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur Π jouera sur $\mathbf{D}(\Pi)$ le rôle de la structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ -modules, le dual de l'action de $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jouera le rôle du Frobenius et le dual de l'action de $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^{\times} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jouera le rôle de l'action de Γ .

La théorie du corps de classes locale établit une correspondance entre représentations unidimensionnelles de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et certaines représentations de $\text{GL}_1(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Q}_p^{\times}$; la correspondance de Langlands pour $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ capture les représentations bidimensionnelles de $G_{\mathbb{Q}_p}$. On peut ensuite chercher à capturer des représentations galoisiennes dans certaines représentations de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Des calculs (voir par exemple [Bre+21]) ont suggéré que certaines représentations de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et les représentations d'un produit de $(n - 1)$ copies de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Pour faire le pont, on a essayé de construire un équivalent des (φ, Γ) -modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ dans ce cadre général : Gergeley Zábrádi, en 2018 dans [Záb18b], prouve une équivalence de catégories entre les \mathbb{Z}_p -modules de type fini munis d'une action

continue de $G_{\mathbb{Q}_p, \Delta} = \prod_{\alpha \in \Delta} G_{\mathbb{Q}_p}$ et ce que l'on pourrait qualifier de (φ, Γ) -modules multivariables sur l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta} = \mathbb{Z}_p[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]][X_\Delta^{-1}]$ qui possède un Frobenius et une action de $\Gamma_\alpha \cong \mathbb{Z}_p^\times$ pour "chaque variable" (qui correspondent à $\varphi_\alpha(X_\alpha) = (1 + X_\alpha)^p - 1$ et $\varphi_\alpha(X_\beta) = X_\beta$ pour les Frobenius par exemple). L'introduction de la notation Δ contient déjà l'idée d'une application à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ où Δ représentera l'ensemble des racines simples du groupe de Lie p -adique $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$.

Au début du deuxième chapitre, on détaillera cette correspondance multivariable en définissant les objets qu'elle fait apparaître et en esquissant la preuve.

La suite de ce deuxième chapitre est consacrée à des équivalents récents du calcul de cohomologie par le complexe de Herr et du foncteur de Colmez issus du travail de Gergeley Zábrádi. D'un côté, la reconstruction de la cohomologie d'une représentation de torsion de $G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ à partir de $\mathbb{D}(V)$ donne des résultats en tous points similaires à ceux de Herr. D'un autre côté, la construction du foncteur de Zábrádi \mathbf{D}_Δ^\vee à partir de certaines représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ suit l'approche développée par Christophe Breuil dans [Bre15], en construisant des (φ, Γ) -modules multivariables en lieu et place de (φ, Γ) -modules univariables. La construction du foncteur de Zábrádi pose un problème absent du cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$: la non commutativité du groupe des matrices unipotentes et le résout en transformant d'abord Π en représentation d'un sous-quotient $N_{\Delta, 0}$ de N .

Dans un dernier temps, nous nous intéresserons à la question de l'induction de représentations soulevée par la construction de \mathbf{D}_Δ^\vee pour tout Δ . Lorsque P est un sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et Π_P une représentation p -adique de p^h -torsion convenable de P , les représentations Π_P et $\mathrm{Ind}_{P^-}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(\Pi_P)$ se prêtent à la construction de Zábrádi pour les groupes de Lie P et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (le foncteur \mathbf{D}_Δ^\vee est en réalité définis pour plus de groupes de Lie p -adiques que les $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$). Nous prouverons alors que $\mathbf{D}_\Delta^\vee(\mathrm{Ind}_{P^-}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(\Pi_P))$ peut se reconstruire à partir de $\mathbf{D}_{\Delta_P}^\vee(\Pi_P)$ comme

$$\mathbf{D}_\Delta^\vee(\mathrm{Ind}_{P^-}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(\Pi_P)) \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}/p^h \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta_P}}/p^h \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta_P}}} \mathbf{D}_{\Delta_P}^\vee(\Pi_P).$$

Nous aurons alors fait le tour des alternatives multivariables proposées par Gergeley Zábrádi aux constructions du premier chapitre.

J'adresse les plus grand remerciements à Pierre Colmez pour tout ce qu'il m'a apporté. Merci pour le suivi tout au long de l'année avant même l'étude des articles de Gergeley Zábrádi. Merci pour la proposition de ces articles happants et plus particulièrement pour les discussions et les conseils qui ont suivi au cours de la compréhension des articles et de la rédaction du mémoire.

Un merci également à Antoine Ducros pour quelques discussions plus catégoriques qui m'ont permis de m'assurer que certaines idées avaient peu de chance d'aboutir, ainsi que pour la relecture du début du présent mémoire.

Chapitre 1

Théorie classique des (φ, Γ) -modules univariables

Commençons par quelques notations et définitions. Pour tout corps F , on note $G_F = \text{Gal}(F^{\text{sep}}|F)$ son groupe de Galois absolu, que l'on munit d'une structure de groupe topologique profini grâce à ses sous-groupes de la forme $G_{F'}$ où $F'|F$ est une extension de corps finie galoisienne. Pour tout corps local K , on note κ_K son corps résiduel.

Le corps L sera une extension finie de \mathbb{Q}_p et désignera dans ce mémoire le corps des coefficients des représentations étudiées ; on note son anneau d'entiers \mathcal{O}_L , une de ses uniformisantes ϖ et κ_L son corps résiduel.

Définition 1.0.1. Soit L une extension finie de \mathbb{Q}_p et G un groupe topologique profini. La catégorie abélienne $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ (resp. $\text{Rep}_{\text{tors}} G$, resp. $\text{Rep}_{\kappa_L} G$) est sous-catégorie pleine des \mathcal{O}_L -représentations de G dont les objets sont les \mathcal{O}_L -modules de type fini munis d'une action \mathcal{O}_L -linéaire de G telle que l'action du groupe profini G sur n'importe quel vecteur est ϖ -adiquement continue (resp. les \mathcal{O}_L -modules de longueur finie avec action \mathcal{O}_L -linéaire lisse de G , resp. les κ_L -espaces vectoriels de dimension finie avec action κ_L -linéaire lisse de G). On rappelle qu'une représentation est lisse si le stabilisateur de tout élément est ouvert, ou de manière équivalente, si l'action sur n'importe quel vecteur est continue pour la topologie discrète.

Définissons en passant la catégorie abélienne $\text{Rep}_L G$ des L -espaces vectoriels de dimension finie munie d'une action L -linéaire continue de G , pour lesquels il existe un \mathcal{O}_L -réseau stable par l'action qui est objet de $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$.

Ce chapitre est consacré à l'étude de la théorie classique des (φ, Γ) -modules à une variable dont le premier lien avec les représentations galoisiennes apparaît dans l'article de Jean-Marc Fontaine [Fon07]. Nous donnerons d'abord une preuve de l'équivalence de catégories entre $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G_K$ et la catégorie des (φ, Γ) -modules étales sur \mathcal{O}_E (voir la définition 1.2.48). Nous en tirerons une démonstration de la théorie du corps de classes locale pour \mathbb{Q}_p en utilisant ces (φ, Γ) -modules étales, ainsi que des outils de l'analyse p -adique. Nous énoncerons ensuite une application de la théorie des (φ, Γ) -modules étales au calcul de la cohomologie des représentations galoisiennes. Enfin, nous suivrons ensuite l'article de Pierre Colmez [Col10] pour établir un lien entre représentations de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules étales.

1.1 Prémisses : les \mathcal{S} -modules étales sur R

Nous nous permettons d'introduire une plus grande variété de catégories que celles de [Fon07] qui épargneront des définitions à répétitions au cours du chapitre 2. Nous fixons dans cette sous-section un anneau R , un monoïde \mathcal{S} et un morphisme de monoïdes $(\varphi_s)_{s \in \mathcal{S}}$ de \mathcal{S} dans $\text{End}(R)$. Dans les notations qui suivent, nous sous-entendons la plupart du temps le morphisme de monoïdes en ne gardant trace que de \mathcal{S} .

Définition 1.1.1. La catégorie des \mathcal{S} -modules sur R , notée $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$, possède pour objets les R -modules D munis d'une famille $(\varphi_{s,D})_{s \in \mathcal{S}}$ d'endomorphismes φ_s -semi-linéaires, i.e. de morphismes de groupes tels que

$$\forall r \in R, d \in D, \varphi_{s,D}(rd) = \varphi_s(r)\varphi_{s,D}(d).$$

Les morphismes de cette catégorie sont les morphismes de R -modules $f : D_1 \rightarrow D_2$ tels que pour tout $s \in \mathcal{S}$, on a $f \circ \varphi_{s,D_1} = \varphi_{s,D_2} \circ f$.

Lemme 1.1.2. *La catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$ est abélienne.*

Démonstration. L'anneau non commutatif $R[\varphi_s]_{s \in \mathcal{S}}$ est défini comme la R -algèbre engendrée par les variables φ_s , en imposant pour tout $r \in R$ et $s \in \mathcal{S}$ que $\varphi_s a = \varphi_s(a) \varphi_s$ et en imposant pour tout $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ que $\varphi_{s_1} \varphi_{s_2} = \varphi_{s_1 s_2}$. Un objet D de $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$ peut s'interpréter comme un $R[\varphi_s]_{s \in \mathcal{S}}$ -module à gauche en imposant que la multiplication par φ_s corresponde à $\varphi_{s,D}$. Ainsi, un morphisme dans $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$ correspond à un morphisme de $R[\varphi_s]_{s \in \mathcal{S}}$ -modules. Ceci établit une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$ et $R[\varphi_s]_{s \in \mathcal{S}}\text{-Mod}$, cette dernière étant abélienne. \square

Remarque 1.1.3. Si D est un R -module et que s appartient à \mathcal{S} , le φ_s -linéarisé de D est défini comme

$$\varphi_s^* D = R \otimes_{\varphi_s, R} D$$

en voyant R comme une R -algèbre via φ_s .

Soit $\varphi_{s,D}$ un endomorphisme φ_s -semi-linéaire de D . L'application

$$\varphi_{s,D}^* : R \times D \rightarrow D, \quad (r, d) \mapsto r \varphi_{s,D}(d)$$

est biadditive et vérifie pour tous $(r, r') \in R^2$ et $d \in D$ l'identité

$$\begin{aligned} \varphi_{s,D}^*(r, r'd) &= r \varphi_{s,D}(r'd) \\ &= r \varphi_s(r') \varphi_{s,D}(d) \\ &= \varphi_{s,D}^*(\varphi_s(r')r, d) \end{aligned}$$

d'où la factorisation en un endomorphisme R -linéaire

$$\varphi_{s,D}^* : \varphi_s^* D \rightarrow D, \quad r \otimes d \mapsto r \varphi_{s,D}(d).$$

Réciproquement, soit $\varphi_{s,D}^* : \varphi_s^* D \rightarrow D$ un morphisme R -linéaire. En fixant $\varphi_{s,D}(d) = \varphi_{s,D}^*(1 \otimes d)$ on obtient un endomorphisme φ_s -semi-linéaire. L'additivité est limpide et la semi-linéarité provient du calcul

$$\begin{aligned} \varphi_{s,D}(rd) &= \varphi_{s,D}^*(1 \otimes rd) \\ &= \varphi_{s,D}^*(\varphi_s(r) \otimes d) \\ &= \varphi_{s,D}^*(\varphi_s(r)(1 \otimes d)) \\ &= \varphi_s(r) \varphi_{s,D}(d) \end{aligned}$$

Définition 1.1.4. Lorsque R est noethérien, on définit la catégorie des \mathcal{S} -modules étales sur R , notée $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$, comme la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$ dont les objets sont les \mathcal{S} -modules D de type fini sur R qui vérifient que $\varphi_{s,D}^*$ est un isomorphisme de R -modules pour tout $s \in \mathcal{S}$. La condition de surjectivité de $\varphi_{s,D}^*$ se reformule en disant que $\text{Im}(\varphi_{s,D})$ contient une famille génératrice de D .

L'anneau R vu comme R -module avec les endomorphismes φ_s est un objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

Même si nous ne l'utiliserons pas avant chapitre 2, définissons $\mathcal{D}^{\text{pro-ét}}(\mathcal{S}, R)$ comme la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$ dont les objets sont colimite filtrante d'objets de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

Proposition 1.1.5. *Supposons les endomorphismes φ_s plats. Alors, la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ est abélienne. Plus précisément, les noyaux et conoyaux dans $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$ de morphismes de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ sont déjà des objets de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.*

Démonstration. Soit $f : D_1 \rightarrow D_2$ un morphisme dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. Par platitude de φ_s , la suite

$$0 \rightarrow \varphi_s^* \text{Ker}(f) \rightarrow \varphi_s^* D_1 \xrightarrow{\varphi_s^* f} \varphi_s^* D_2 \rightarrow \varphi_s^* \text{Coker}(f) \rightarrow 0$$

est une suite exacte de R -modules, où le noyau et le conoyau sont pris dans $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$. Elle nous fournit un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \varphi_s^* \text{Ker}(f) & \longrightarrow & \varphi_s^* D_1 & \xrightarrow{\varphi_s^* f} & \varphi_s^* D_2 & \longrightarrow & \varphi_s^* \text{Coker}(f) & \longrightarrow & 0 \\ & & \varphi_{s, \text{Ker}(f)}^* \downarrow & & \varphi_{s, D_1}^* \downarrow \wr & & \varphi_{s, D_2}^* \downarrow \wr & & \varphi_{s, \text{Coker}(f)}^* \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(f) & \longrightarrow & D_1 & \xrightarrow{f} & D_2 & \longrightarrow & \text{Coker}(f) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Le lemme des cinq conclut que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Coker}(f)$ sont étales. Puisque $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$, ce sont bien les noyaux et conoyaux dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. \square

Proposition 1.1.6. *Soient D_1, D_2 deux objets de $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$. Le produit tensoriel $D_1 \otimes_R D_2$ peut être muni d'une structure d'objet de $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$ via les endomorphismes $\varphi_{s, D_1} \otimes \varphi_{s, D_2}$. Il représente le foncteur de $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$ vers Ens donné par*

$$D \mapsto \{f \in \text{Bil}_R(D_1 \times D_2, D), f \circ (\varphi_{s, D_1} \times \varphi_{s, D_2}) = \varphi_{s, D} \circ f\}.$$

Si D_1 et D_2 sont des modules étales, alors $D_1 \otimes_R D_2$ représente le même foncteur depuis $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

Démonstration. Caractère bien défini : montrons d'abord que le morphisme additif

$$\varphi_{s, D_1} \times \varphi_{s, D_2} : \bigoplus_{(d_1, d_2) \in D_1 \times D_2} R(d_1, d_2) \rightarrow D_1 \otimes_R D_2, \quad r(d_1, d_2) \mapsto \varphi_s(r) [\varphi_{s, D_1}(d_1) \otimes \varphi_{s, D_2}(d_2)]$$

se factorise avec pour source $D_1 \otimes_R D_2$. Par additivité de φ_{s, D_1} et de φ_{s, D_2} , il vérifie la relation de "biadditivité" sur $(\varphi_{s, D_1} \times \varphi_{s, D_2})(d_1 + d'_1, d_2 + d'_2)$. De plus,

$$\begin{aligned} (\varphi_{s, D_1} \times \varphi_{s, D_2})(rd_1 \otimes d_2) &= \varphi_{s, D_1}(rd_1) \otimes \varphi_{s, D_2}(d_2) \\ &= (\varphi_s(r)\varphi_{s, D_1}(d_1)) \otimes \varphi_{s, D_2}(d_2) \\ &= \varphi_{s, D_1}(d_1) \otimes [\varphi_s(r)\varphi_{s, D_2}(d_2)] \\ &= (\varphi_{s, D_1} \times \varphi_{s, D_2})(d_1 \otimes rd_2) \end{aligned}$$

Comme son noyau est un R -module, on en déduit que le R -module engendré par $((r_1d_1 + d'_1, r_2d_2 + d'_2) - r_1r_2(d_1, d_2) - r_2(d'_1, d_2) - r_1(d_1, d'_2) - (d'_1, d'_2))_{r_1, r_2 \in R, d_1, d'_1 \in D_1, d_2, d'_2 \in D_2}$ est contenu dans ledit noyau. Ceci prouve la factorisation en un morphisme additif de source $D_1 \otimes_R D_2$. La φ_s -semi-linéarité se vérifie sur les tenseurs purs et par définition

$$(\varphi_{s, D_1} \otimes \varphi_{s, D_2})(r(d_1 \otimes d_2)) = \varphi_s(r)(\varphi_{s, D_1}(d_1) \otimes \varphi_{s, D_2}(d_2)) = \varphi_s(r)(\varphi_{s, D_1} \otimes \varphi_{s, D_2})(d_1 \otimes d_2).$$

Enfin, pour tous $s, s' \in \mathcal{S}$, on obtient sur les tenseurs purs

$$\begin{aligned} [(\varphi_{s, D_1} \otimes \varphi_{s, D_2})(d_1 \otimes d_2) \circ (\varphi_{s', D_1} \otimes \varphi_{s', D_2})](d_1 \otimes d_2) &= (\varphi_{s, D_1} \otimes \varphi_{s, D_2})(\varphi_{s', D_1}(d_1) \otimes \varphi_{s', D_2}(d_2)) \\ &= (\varphi_{s, D_1} \circ \varphi_{s', D_1})(d_1) \otimes (\varphi_{s, D_2} \circ \varphi_{s', D_2})(d_2) \\ &= \varphi_{ss', D_1}(d_1) \otimes \varphi_{ss', D_2}(d_2) \\ &= (\varphi_{ss', D_1} \otimes \varphi_{ss', D_2})(d_1 \otimes d_2) \end{aligned}$$

La propriété universelle : il suffit de montrer que la bijection naturelle en D entre $\text{Bil}_R(D_1 \times D_2, D) \cong \text{Hom}_R(D_1 \otimes_R D_2, D)$ se restreint-corestreint en une bijection

$$\{f \in \text{Bil}_R(D_1 \times D_2, D), f \circ (\varphi_{s, D_1} \times \varphi_{s, D_2}) = \varphi_{s, D} \circ f\} \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)}(D_1 \otimes_R D_2, D)$$

et que cette restriction est naturelle vis-à-vis des morphismes de $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$. La bijection d'origine entre $\text{Bil}_R(D_1 \times D_2, D)$ et $\text{Hom}_R(D_1 \otimes_R D_2, D)$ est donnée par $f \mapsto (\tilde{f} : (d_1 \otimes d_2) \mapsto f(d_1, d_2))$. Ainsi, la condition $f \circ (\varphi_{s, D_1} \times \varphi_{s, D_2}) = \varphi_{s, D} \circ f$ équivaut à $\tilde{f} \circ (\varphi_{s, D_1} \otimes \varphi_{s, D_2}) = \varphi_{s, D} \circ \tilde{f}$, autrement dit elle équivaut à ce que \tilde{f} soit un morphisme dans $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$. On a prouvé la restriction-corestriction.

La naturalité par rapport à $h : D \rightarrow D'$ de la bijection d'origine correspond au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Bil}_R(D_1 \times D_2, D) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_R(D_1 \otimes_R D_2, D) \\ \downarrow h \circ & & \downarrow h \circ \\ \text{Bil}_R(D_1 \times D_2, D') & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_R(D_1 \otimes_R D_2, D') \end{array}$$

Si h est un morphisme dans $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$, le morphisme h est φ_s -équivariant pour tout $s \in \mathcal{S}$. Ceci montre que la post-composition par h se restreint-corestreint sur les colonnes du diagramme précédent en :

$$\begin{array}{ccc} \text{big}\{f \in \text{Bil}_R(D_1 \times D_2, D) \mid f \circ (\varphi_{s,D_1} \times \varphi_{s,D_2}) = \varphi_{s,D} \circ f\} & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{S},R)}(D_1 \otimes_R D_2, D) \\ \downarrow h \circ & & \downarrow h \circ \\ \{f \in \text{Bil}_R(D_1 \times D_2, D') \mid f \circ (\varphi_{s,D_1} \times \varphi_{s,D_2}) = \varphi_{s,D'} \circ f\} & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{S},R)}(D_1 \otimes_R D_2, D') \end{array}$$

Le cas étale : supposons D_1 et D_2 étales. L'associativité du produit tensoriel permet d'obtenir un isomorphisme

$$\varphi_s^* D_1 \otimes_R \varphi_s^* D_2 \xrightarrow{\sim} \varphi_s^*(D_1 \otimes_R D_2), \quad (r_1 \otimes d_1) \otimes (r_2 \otimes d_2) \mapsto (r_1 r_2) \otimes (d_1 \otimes d_2).$$

Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \varphi_s^*(D_1 \otimes_R D_2) & \xrightarrow{\sim} & \varphi_s^* D_1 \otimes_R \varphi_s^* D_2 \\ & \searrow & \downarrow \varphi_{s,D_1}^* \otimes \varphi_{s,D_2}^* \\ & & D_1 \otimes_R D_2 \\ & \swarrow \varphi_{s,D_1 \otimes_R D_2}^* & \end{array}$$

ce qui implique que $\varphi_{s,D_1 \otimes_R D_2}^*$ est un isomorphisme dont que $D_1 \otimes_R D_2$ est en réalité un objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

La représentabilité du foncteur suit puisque $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(\mathcal{S}, R)$. \square

Lemme 1.1.7. *Supposons que les φ_s sont plats et que R est noethérien. Pour tout couple d'objets (D_1, D_2) de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$, le morphisme de R -modules suivant est un isomorphisme :*

$$k_s : \varphi_s^* \text{Hom}_R(D_1, D_2) \rightarrow \text{Hom}_R(\varphi_s^* D_1, \varphi_s^* D_2), \quad 1 \otimes f \mapsto \text{Id}_R \otimes f.$$

Démonstration. L'étalité ne sert pas vraiment : on se contente d'utiliser que D_1 est de type fini sur R noethérien, a fortiori qu'il est de présentation finie.

Si $D_1 = R^d$ est un module libre de type fini, le module $\varphi_s^* D_1$ est également libre de type fini. On en déduit des isomorphismes naturels f_D (resp. g_D) pour tout R -module D entre $\text{Hom}_R(D_1, D)$ (resp. $\text{Hom}_R(\varphi_s^* D_1, D)$) et D^d . Il fournissent un carré commutatif (l'isomorphisme horizontal inférieur est obtenu par distributivité du produit tensoriel sur la somme) :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_s^* \text{Hom}_R(D_1, D_2) & \xrightarrow{k_s} & \text{Hom}_R(\varphi_s^* D_1, \varphi_s^* D_2) \\ \varphi_s^* f_{D_2} \downarrow \wr & & g_{\varphi_s^* D_2}^{-1} \uparrow \wr \\ \varphi_s^*(D_2^d) & \xrightarrow{\sim} & (\varphi_s^* D_2)^d \end{array}$$

ce qui achève la preuve dans le cas d'un module libre.

En général, on se donne une présentation de D_1 via une suite exacte $R^p \rightarrow R^d \rightarrow D_1 \rightarrow 0$. Par exactitude à gauche de $\text{Hom}_R(\cdot, D_2)$, de $\text{Hom}_R(\cdot, \varphi_s^* D_2)$ et par platitude de φ_s , on obtient un diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \varphi_s^* \text{Hom}_R(D_1, D_2) & \longrightarrow & \varphi_s^* \text{Hom}_R(R^d, D_2) & \longrightarrow & \varphi_s^* \text{Hom}_R(R^p, D_2) \\ & & \downarrow k_s & & k_s \downarrow \wr & & k_s \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(\varphi_s^* D_1, \varphi_s^* D_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(\varphi_s^* R^d, \varphi_s^* D_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(\varphi_s^* R^p, \varphi_s^* D_2) \end{array}$$

Le cas précédent a prouvé que les deux dernières colonnes sont des isomorphismes et le lemme des cinq conclut. \square

Proposition 1.1.8. *Soient D_1, D_2 des objets de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. Le R -module $\text{Hom}_R(D_1, D_2)$ munit des morphismes φ_s -semi-linéaires naturels associés à*

$$\varphi_s^*(\text{Hom}_R(D_1, D_2)) \rightarrow \text{Hom}_R(\varphi_s^* D_1, \varphi_s^* D_2) \xrightarrow{\varphi_{s,D_2}^* \circ \circ (\varphi_{s,D_1}^*)^{-1}} \text{Hom}_R(D_1, D_2)$$

est encore un objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

Démonstration. On vient de démontrer que le premier morphisme est un isomorphisme. Le deuxième a pour inverse $(\varphi_{s,D_2}^*)^{-1} \circ \cdot \circ \varphi_{s,D_1}^*$.

Reste à démontrer que $\varphi_{ss',\text{Hom}_R(D_1,D_2)} = \varphi_{s,\text{Hom}_R(D_1,D_2)} \circ \varphi_{s',\text{Hom}_R(D_1,D_2)}$. Commençons par regarder, pour $f \in \text{Hom}_R(D_1,D_2)$ à quoi ressemble $\varphi_{s,\text{Hom}_R(D_1,D_2)}(f)$. Il s'agit d'appliquer $\varphi_{s,\text{Hom}_R(D_1,D_2)}^*$ que nous venons de définir à $1 \otimes f$. Cela donne $\varphi_{s,D_2}^* \circ (\text{Id} \otimes f) \circ (\varphi_{s,D_1}^*)^{-1}$. Explicitement,

$$\begin{aligned} g\left(\sum r_i \otimes \varphi_{s,D_1}(d_i)\right) &= \left[\varphi_{s,D_2}^* \circ (\text{Id} \otimes f)\right]\left(\sum r_i \otimes d_i\right) \\ &= \varphi_{s,D_2}^*\left(\sum r_i \otimes f(d_i)\right) \\ &= \sum r_i \varphi_{s,D_2}(f(d_i)) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\varphi_{s,\text{Hom}_R(D_1,D_2)} \circ \varphi_{s',\text{Hom}_R(D_1,D_2)})(f)\left(\sum r_i \varphi_{ss',D_1}(d_i)\right) &= (\varphi_{s,\text{Hom}_R(D_1,D_2)} \circ \varphi_{s',\text{Hom}_R(D_1,D_2)})(f)\left(\sum r_i \varphi_{s,D_1}(\varphi_{s',D_1}(d_i))\right) \\ &= \sum r_i \varphi_{s,D_2}(\varphi_{s',\text{Hom}_R(D_1,D_2)}(f)(\varphi_{s',D_1}(d_i))) \\ &= \sum r_i \varphi_{s,D_2}(\varphi_{s',D_2}(f(d_i))) \\ &= \sum r_i \varphi_{ss',D_2}(f(d_i)) \\ &= \varphi_{ss',\text{Hom}_R(D_1,D_2)}(f)\left(\sum r_i \varphi_{ss',D_1}(d_i)\right) \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.9. *La structure d'objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ sur $\text{Hom}_R(D_1, D_2)$ telle que*

$$\bigcap_{s \in \mathcal{S}} \text{Hom}_R(D_1, D_2)^{\varphi_s = \text{Id}} = \text{Hom}_{\mathcal{D}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)}(D_1, D_2).$$

Démonstration. En appliquant l'expression de $\varphi_{s,\text{Hom}_R(D_1,D_2)}(f)$ à $\varphi_{s,D_1}(d)$, on en déduit que si $\varphi_{s,\text{Hom}_R(D_1,D_2)}(f) = f$ alors $f \circ \varphi_{s,D_1} = \varphi_{s,D_2} \circ f$. Réciproquement si cette identité est vérifiée pour tout $d = \sum r_i \varphi_{s,D_1}(d_i)$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{s,\text{Hom}_R(D_1,D_2)}(f)(d) &= \sum r_i \varphi_{s,D_2}(f(d_i)) \\ &= \sum r_i f(\varphi_{s,D_1}(d_i)) \\ &= f(d) \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'identifier $\text{Hom}_R(D_1, D_2)^{\varphi_s = \text{Id}}$ comme les morphismes de R -modules respectant la structure φ_s -semi-linéaire. En passant à l'intersection on obtient l'égalité souhaitée. □

1.2 L'équivalence de catégories de Fontaine

1.2.1 L'équivalence de catégories pour un corps de caractéristique p

Dans cette sous-section, le corps E est un corps de caractéristique p . Le corps \mathcal{E} est un corps de caractéristique nulle, complet pour une valuation discrète, de corps résiduel E et ayant p pour uniformisante. Le corps \mathcal{E}^{nr} est le corps des fractions de la hensélisation stricte de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ (voir dans Stacks Project [Prob]) : c'est un corps de caractéristique nulle, muni d'une valuation discrète telle que p est une uniformisante et de corps résiduel E^{sep} . Son complété p -adique est nommé $\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}$. L'extension de corps $\mathcal{E}^{\text{nr}}|\mathcal{E}$ est galoisienne non ramifiée, ce qui entraîne que son groupe de Galois s'identifie à G_E . L'action de G_E sur \mathcal{E}^{nr} est continue pour la topologie p -adique et se prolonge par continuité à $\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}$.

Lemme 1.2.1. *Supposons que \mathcal{O}_E est muni d'un endomorphisme φ relevant le Frobenius canonique sur E , i.e. tel que pour tout*

$$\forall x \in \mathcal{O}_E, \varphi(x) = x^p \bmod p\mathcal{O}_E$$

Il existe un unique prolongement à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}$ que l'on appelle encore φ . Ce prolongement est continu pour la topologie p -adique et l'on appelle encore φ le prolongement par continuité à $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$. Ces prolongements se localisent respectivement en endomorphismes de \mathcal{E}^{nr} et de $\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}$.

Les Frobenius obtenus commutent à l'action de G_E .

Démonstration. On applique un lemme de Stacks Project [Proa] (en gardant les notations de Stacks Project), avec $R = \mathcal{O}_E$, $A = S = \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}$, avec $R \rightarrow A$ l'inclusion, avec $R \rightarrow S$ l'inclusion précomposée avec φ , et avec τ le Frobenius canonique sur E^{sep} . Comme le morphisme obtenu est local, il se prolonge bien à $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$.

Si $\sigma \in G_E$ et que φ est le relevé, alors $\sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$ est un autre relevé (σ agit trivialement sur \mathcal{O}_E et commute au Frobenius sur les corps résiduels). Par unicité du relevé, on obtient la commutation du relevé à l'action galoisienne. \square

Définition 1.2.2. Nous allons utiliser les trois catégories $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_E$, $\text{Rep}_{\text{tors}} G_E$ et $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p} G_E$ entrant dans le cadre de la définition 1.0.1.

Pour un objet V dans l'une de ces trois catégories, on définit le groupe abélien $\mathbb{D}(V) = (\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_E}$ (dans le cas de $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p} G_E$, on peut récrire ce groupe $\mathbb{D}(V) = (E^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{G_E}$). Grâce aux inclusions

$$E \subseteq (E^{\text{sep}})^{G_E}, \mathcal{O}_E \subseteq (\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}})^{G_E}$$

on peut voir $\mathbb{D}(V)$ comme un \mathcal{O}_E -module (resp. un E -espace vectoriel dans le cas de $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p} G_E$). L'endomorphisme φ de $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ commutant à l'action de G_E , l'endomorphisme $\varphi \otimes \text{Id}_V$ de $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ laisse stable $\mathbb{D}(V)$ et le munit d'une structure d'objet de $\mathcal{D}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_E)$ (d'objet de $\mathcal{D}(\varphi^{\mathbb{N}}, E)$ pour $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p} G_E$). On peut voir \mathbb{D} comme un foncteur : si $f : V_1 \rightarrow V_2$ est un morphisme de représentations, le morphisme $\text{Id}_{\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}} \otimes f$ est un morphisme (G_E, φ) -équivariant entre $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_1$ et $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2$. Il fournit par restriction un morphisme $\mathbb{D}(f) : \mathbb{D}(V_1) \rightarrow \mathbb{D}(V_2)$.

Lemme 1.2.3. *Pour toute extension finie galoisienne $E'|E$, avec $\mathcal{O}_{E'}|\mathcal{O}_E$ non ramifiée associée, les deux inclusions suivantes sont des égalités*

$$E' \subseteq (E^{\text{sep}})^{G_{E'}}, \forall h, \mathcal{O}_{E'}/p^h \mathcal{O}_{E'} \subseteq \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}/p^h \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \right)^{G_{E'}}, \mathcal{O}_{E'} \subseteq (\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}})^{G_{E'}}$$

Démonstration. La première égalité est le théorème fondamental de la théorie de Galois.

On effectue ensuite un dévissage en montrant par récurrence que $(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}/p^h \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}})^{G_{E'}} = \mathcal{O}_{E'}/p^h \mathcal{O}_{E'}$. Le cas $h = 1$ est déjà traité. Si le résultat est vrai pour un entier $h \geq 1$, la suite exacte

$$0 \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}/p^h \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \xrightarrow{\times p} \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}/p^{h+1} \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \rightarrow E^{\text{sep}} \rightarrow 0$$

devient après prise des invariants

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{E'}/p^h \mathcal{O}_{E'} \xrightarrow{\times p} \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}/p^{h+1} \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \right)^{G_{E'}} \rightarrow E'.$$

Prenons maintenant x dans les invariants du centre. La flèche $\mathcal{O}_{E'}/p^{h+1} \mathcal{O}_{E'} \rightarrow E'$ de réduction modulo p étant surjective, il existe $y \in \mathcal{O}_{E'}/p^{h+1} \mathcal{O}_{E'}$ tel que $x - y$ est dans le noyau de la flèche $(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}/p^{h+1} \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}})^{G_{E'}} \rightarrow E'$. De fait, l'élément $x - y$ est dans l'image de $\mathcal{O}_{E'}/p^h \mathcal{O}_{E'}$ et l'on en déduit que $x = y + (x - y) \in \mathcal{O}_{E'}/p^{h+1} \mathcal{O}_{E'}$. Par séparation p -adique de $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$, les invariants $(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}})^{G_{E'}}$ sont la limite projective des $(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}/p^h \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}})^{G_{E'}}$.

La dernière égalité s'obtient grâce à la complétude de $\mathcal{O}_{E'}$, et grâce au fait que la complétude et la séparation de $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ couplées avec la continuité de l'action galoisienne donnent que $(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}})^{G_{E'}}$ est la limite projective des $(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}/p^h \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}})^{G_{E'}}$. \square

Lemme 1.2.4. *Soit A un anneau de valuation discrète d'uniformisante ϖ . Si M et N sont des A -modules de type fini de torsion avec les mêmes facteurs invariants, toute injection $f : M \hookrightarrow N$ est une bijection.*

Démonstration. Le morphisme f stabilise la ϖ^h -torsion pour tout entier h . Ainsi, on peut restreindre-corestreindre f en une application injective entre $A/\varpi^h A$ -espaces vectoriels $f : M[\varpi^h] \rightarrow N[\varpi^h]$. Ces espaces vectoriels sont de même dimension puisque les facteurs invariants sont identiques. C'est une bijection.

Supposons maintenant que $f : M[\varpi^h] \rightarrow N[\varpi^h]$ est bijective. Nous avons un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M[\varpi^h] & \longrightarrow & M[\varpi^{h+1}] & \longrightarrow & M[\varpi^{h+1}]/M[\varpi^h] \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\
0 & \longrightarrow & N[\varpi^h] & \longrightarrow & N[\varpi^{h+1}] & \longrightarrow & N[\varpi^{h+1}]/N[\varpi^h] \longrightarrow 0
\end{array}$$

le lemme du serpent fournit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\bar{f}) \rightarrow 0 \rightarrow \text{Coker}(f) \rightarrow \text{Coker}(\bar{f}).$$

Cela prouve dans un premier temps que \bar{f} est injective, puis comme M et N ont mêmes facteurs invariants les deux quotients ont même dimension sur $A/\varpi A$ d'où la surjectivité de \bar{f} . La suite du lemme du serpent en déduit cette fois la surjectivité de f .

Puisque $N = \bigcup_{h \geq 1} N[\varpi^h]$ par hypothèse, la surjectivité est prouvée. \square

Théorème 1.2.5. *Pour toute représentation V de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_E$, le morphisme de comparaison*

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V) \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V) \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$$

induit par l'inclusion et la multiplication dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ est un isomorphisme (G_E, φ)-équivariant de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ -modules (où $\mathbb{D}(V)$ est muni de l'action triviale de G_E).

De plus, le module $\mathbb{D}(V)$ est en réalité dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ et ses facteurs invariants comme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module sont les mêmes que ceux de V comme \mathbb{Z}_p -module (rappelons que d'après le théorème des facteurs invariants, tout module de type fini sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ s'écrit $\bigoplus \mathcal{O}_{\mathcal{E}}/p^{n_i} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ avec les $n_i \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ unique à permutation près).

Démonstration. Nous voudrions appliquer la descente fidèlement plate au morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$. Ce dernier est effectivement fidèlement plat, mais pour nous éviter une étude des données de descentes dans cette grande tour d'extensions qui ne possède pas le théorème de la base normale, nous nous ramenons à un niveau fini. Soit $E'|E$ une extension finie galoisienne et considérons $\mathcal{E}'|E$ l'extension non-ramifiée correspondante et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}|\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ entre anneaux d'entiers.

Étape 1 : montrons que l'on peut appliquer la descente fidèlement plate à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$ et décrivons la donnée de descente.

Montrons que l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$ est fidèlement plate. Puisque c'est un morphisme local entre anneaux de valuation discrète, il suffit de prouver qu'il est plat. Par complétion et séparation p -adiques de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$, tout relevé d'une E -base de E' exhibe que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module libre. A fortiori, l'inclusion est plate.

De manière plus précise, le théorème de la base normale démontre que $E' = E[\text{Gal}(E'|E)]$ comme $E[\text{Gal}(E'|E)]$ -module. Par complétude et séparation p -adiques de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$ on en déduit que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[\text{Gal}(E'|E)]$ comme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}[\text{Gal}(E'|E)]$ -module (si $(\sigma(x))_{\sigma \in \text{Gal}(E'|E)}$ est une base au niveau des corps résiduels, tout relevé \hat{x} de x donne une base $(\sigma(\hat{x}))_{\sigma \in \text{Gal}(E'|E)}$). Une donnée de descente correspond alors à une action galoisienne semi-linéaire et le module associé sera les invariants par $\text{Gal}(E'|E)$.

Étape 2 : montrons que le morphisme de comparaison est un isomorphisme si V est une représentation de torsion. Le \mathbb{Z}_p -module V est alors fini et sa topologie discrète; on peut trouver une extension finie galoisienne $E'|E$ telle que l'action de $G_{E'}$ sur V est triviale. Dans ce cadre, le module $\mathbb{D}(V)$ vaut

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(V) &= (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_E} \\
&= ((\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_{E'}})^{\text{Gal}(E'|E)}
\end{aligned}$$

En écrivant $V = \bigoplus \mathbb{Z}_p/p^{n_i} \mathbb{Z}_p$ comme $\mathbb{Z}_p[G_{E'}]$ -module, on obtient des isomorphismes (qui ne seraient pas vrais si l'on remplaçait E' par E)

$$\begin{aligned}
(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_{E'}} &\xrightarrow{\sim} \left(\bigoplus \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}/p^{n_i} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \right)^{G_{E'}} \\
&= \bigoplus (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}/p^{n_i} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}})^{G_{E'}} \\
&= \bigoplus \mathcal{O}_{\mathcal{E}'}/p^{n_i} \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \\
&\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V
\end{aligned}$$

où le passage à l'avant-dernière ligne provient du lemme 1.2.3. La composée de ces isomorphismes a pour inverse à gauche l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V \hookrightarrow (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_{E'}}$. Il est alors possible d'écrire que l'inclusion est un isomorphisme, puis en passant aux invariants par $\text{Gal}(E'|E)$, que l'inclusion induit une égalité

$$\mathbb{D}(V) = (\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{\text{Gal}(E'|E)}.$$

Ainsi, le module associé par descente fidèlement plate du module $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$ à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est exactement $\mathbb{D}(V)$. La théorie de la descente nous assure en particulier que le morphisme de comparaison à niveau fini $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ est un isomorphisme. C'est encore le cas après tensorisation avec $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}}$, ce qui fournit exactement le morphisme de comparaison dont nous voulions prouver le caractère isomorphique.

Étape 3 : finissons la preuve dans le cas de torsion. Le lemme de [Proc] nous dit de plus que $\mathbb{D}(V)$ est de type fini avec les mêmes facteurs invariants que V .

La descente fidèlement plate fournit une équivalence de catégories entre les $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -modules et les $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$ -modules avec action galoisienne. Par conséquent et puisque $\varphi_{\mathbb{D}(V)}^*$ est $\text{Gal}(E'|E)$ -équivariant, c'est un isomorphisme si et seulement si c'est le cas après tensorisation par $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$. Écrivons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \varphi^* \mathbb{D}(V) & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}} \otimes \varphi_{\mathbb{D}(V)}^*} & \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V) \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \varphi^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V)) & & \\ \wr \downarrow & & \downarrow \\ \varphi^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V \end{array}$$

où les dernières flèches verticales de chaque côté correspondent à l'isomorphisme de comparaison et à son changement de base par φ , où la première flèche verticale à gauche correspond à

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} (\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\varphi, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V)) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\varphi, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\varphi, \mathcal{O}_{\mathcal{E}'}} (\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V))$$

et où la dernière flèche horizontale correspond à l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\varphi, \mathcal{O}_{\mathcal{E}'}} (\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\varphi, \mathbb{Z}_p} V = \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V.$$

Prouvons qu'il est commutatif en suivant l'image de $x \otimes (y \otimes (\sum z_i \otimes v_i))$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \varphi^* \mathbb{D}(V)$.

$$\begin{array}{ccc} x \otimes (y \otimes (\sum z_i \otimes v_i)) & \longrightarrow & x \otimes y(\sum \varphi(z_i) \otimes v_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ xy \otimes (1 \otimes (\sum z_i \otimes v_i)) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ xy \otimes (\sum z_i \otimes v_i) & \longrightarrow & \sum [xy \varphi(z_i) \otimes v_i] \end{array}$$

ce qui conclut à l'égalité. Rappelons que les deux dernières étapes, même si l'on a oublié dans la rédaction que les modules étaient de torsion, renferment cette hypothèse cruciale pour pouvoir se placer au niveau fini $E'|E$.

Les facteurs invariants de $\mathbb{D}(V)$ et V s'identifient tous les deux aux facteurs invariants de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ via l'isomorphisme de comparaison.

L'isomorphisme de comparaison montre aussi que pour toute représentation de torsion V , le module $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ est isomorphe à un $\bigoplus \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}} / p^{n_i} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}}$ avec les n_i entiers comme $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}}[G_E]$ -module. Puisque $H^1(G_E, E^{\text{sep}}) = \{0\}$, on en déduit par dévissage que tous les $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}} / p^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}}$ sont G_E -acycliques en degré 1, puisque tous les $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ le sont.

Étape 4 : pour V général, le module $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ est encore de type fini sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}}$, a fortiori séparé et complet pour la topologie p -adique. Se donner un élément des invariants $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{H_{\mathbb{Q}_p}}$ revient donc à se donner la famille cohérente de ses réductions modulo p^h , qui forme une famille cohérentes d'éléments des modules $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V / p^h V)^{H_{\mathbb{Q}_p}}$. Ceci se reformule par l'égalité

$$\mathbb{D}(V) = \varprojlim_{h \geq 0} \mathbb{D}(V / p^h V).$$

Posons $r \geq 1$, pour tout entier naturel h , la suite exacte

$$0 \rightarrow p^r V / p^{h+r} V \rightarrow V / p^{h+r} V \rightarrow V / p^r V \rightarrow 0$$

devient par \mathbb{Z}_p -platitude de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}^{\text{nr}}}$ (il est sans torsion et \mathbb{Z}_p est principal) et exactitude à gauche des invariants, une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{D}(p^r V / p^{h+r} V) \rightarrow \mathbb{D}(V / p^{h+r} V) \rightarrow \mathbb{D}(V / p^r V) \quad (*1)$$

Pour tout représentation W (pas nécessairement de torsion) et tout entier r , la suite exacte

$$0 \rightarrow W[p^r] \rightarrow W \xrightarrow{\times p^r} p^r W \rightarrow 0$$

se tensorise en

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} W[p^r] \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \xrightarrow{\times p^r} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (p^r W) \rightarrow 0$$

et par G_E -acyclicité en degré 1 de la représentation de torsion $W[p^r]$, l'exactitude passe à \mathbb{D} , permettant d'identifier $\mathbb{D}(p^r W) = p^r \mathbb{D}(W)$.

Revenons un paragraphe en arrière : l'identification $\mathbb{D}(p^r V/p^{r+h} V) = p^r \mathbb{D}(V/p^{r+h} V)$ permet d'identifier grâce à la suite exacte (*1) le module $\mathbb{D}(V/p^{r+h} V)/p^r \mathbb{D}(V/p^{r+h} V)$ à un sous-objet de $\mathbb{D}(V/p^h V)$. Or, ces deux objets ont tous deux les mêmes facteurs invariants que $V/p^h V$ grâce à la troisième étape. Le lemme 1.2.4 permet de prouver qu'il y a égalité, i.e. prolongement de la suite exacte (*1) par un 0. Le système $(\mathbb{D}(p^r/p^{h+r} V))_{h \geq 1}$ est de Mittag-Leffler (formé de modules noethériens). Par annulation du premier foncteur dérivé de la limite projective (voir [Prod]) cela permet de passer les suites exactes à la limite en

$$0 \rightarrow \mathbb{D}(p^r V) \rightarrow \mathbb{D}(V) \rightarrow \mathbb{D}(V/p^r V) \rightarrow 0.$$

Pour résumer, nous avons montré que $\mathbb{D}(V)/p^r \mathbb{D}(V)$ s'identifie à $\mathbb{D}(V/p^r V)$.

Puisque $\mathbb{D}(V)$ est séparé et complet (en revenant à sa description par $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{H_{Q_p}}$ où l'action sur le module séparé complet $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ est continue) le caractère isomorphique du morphisme de comparaison, l'égalité de $\mathbb{D}(V)$ et les facteurs invariants se vérifient modulo tout les p^r , i.e. sur $\mathbb{D}(V/p^r V)$ pour V sans torsion, au vu de la récente identification. \square

Remarque 1.2.6. En utilisant le langage de l'admissibilité (voir [BC09, p. I.5]), nous avons prouvé que toutes les représentations modulo p considérées sont (E^{sep}, G_E) -admissibles.

La partie plus délicate demeure : la tâche de trouver un quasi-inverse à \mathbb{D} . Le lemme suivant 1.2.8 permet, en passant le morphisme de comparaison pour une représentation V aux invariants par φ , de prouver que V est naturellement isomorphe à $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathbb{D}(V))^{\varphi=\text{Id}}$ ce qui fournit un candidat évident pour le quasi-inverse recherché.

Définition 1.2.7. Pour un module D dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_E)$, on définit $\mathbb{V}(D) = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_E} D)^{\varphi \otimes \varphi_D = \text{Id}}$.

Puisque $\mathbb{Z}_p \subseteq (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}})^{\varphi=\text{Id}}$, le groupe abélien $\mathbb{V}(D)$ est naturellement muni d'une structure de \mathbb{Z}_p -module. De plus, la commutation de φ à l'action de G_E sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ permet de munir $\mathbb{V}(D)$ d'une action linéaire de G_E via l'action sur le premier terme. Il est possible de voir \mathbb{V} comme un foncteur de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_E)$ vers les représentations \mathbb{Z}_p -linéaires de G_E .

Lemme 1.2.8. *Les inclusions suivantes sont des égalités*

$$\mathbb{F}_p \subseteq (E^{\text{sep}})^{\varphi=\text{Id}}, \quad \forall h, \mathbb{Z}_p/p^h \mathbb{Z}_p \subseteq \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} / p^h \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \right)^{\varphi=\text{Id}}, \quad \mathbb{Z}_p \subseteq (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}})^{\varphi=\text{Id}}.$$

Démonstration. Le polynôme $X^p - X$ possède au plus p racines dans E^{sep} d'où la première l'égalité.

Penchons-nous sur la troisième (les deuxièmes seront prouvées au passage). Par séparation p -adique de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ et complétude de \mathbb{Z}_p , il suffit de montrer que pour tout entier h l'inclusion $\mathbb{Z}_p/p^h \mathbb{Z}_p \subseteq (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} / p^h \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}})^{\varphi=\text{Id}}$ est une égalité. Nous le montrons par récurrence. Le cas $h = 1$ vient d'être prouvé puisque le corps résiduel de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ est exactement E^{sep} . Si l'égalité est prouvée modulo p^h , on considère x dans $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} / p^{h+1} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}})^{\varphi=\text{Id}}$. L'élément $x \bmod p$ est invariant sous φ . La réduction s'identifie à un élément de \mathbb{F}_p et en choisissant un relevé $z \in \mathbb{Z}_p/p^{h+1} \mathbb{Z}_p$ l'élément invariant $x - z$ est nul modulo p . Il s'écrit py avec $y \in (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} / p^h \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}})^{\varphi=\text{Id}}$ et l'hypothèse de récurrence conclut. \square

Lemme 1.2.9. *Soit K un corps et B une K -algèbre étale de dimension d . Il existe exactement d points géométriques à $\text{Spec}(B)$.*

Démonstration. Un point géométrique correspond à un morphisme non nul de K -algèbres de B dans K^{sep} , soit à un morphisme surjectif de K^{sep} -algèbres de $K^{\text{sep}} \otimes_K B$ dans K^{sep} .

Puisque B est étale, il existe un isomorphisme de K^{sep} -algèbres entre $K^{\text{sep}} \otimes_K B$ et $(K^{\text{sep}})^d$. Prenons (e_i) la K^{sep} -base canonique de $(K^{\text{sep}})^d$ telle que pour tout entier i on a $e_i^2 = e_i$ et que pour tout $i \neq j$, on a $e_i e_j = 0$. Soit f un morphisme surjectif de K^{sep} -algèbres de $K^{\text{sep}} \otimes_K B$ dans K^{sep} . Pour tout entier i , on obtient $f(e_i)^2 = f(e_i)$

ce qui implique que $f(e_i) \in \{0, 1\}$. De plus, la deuxième condition sur les e_i impose qu'au plus un des $f(e_i)$ est non nul. Enfin, la surjectivité de f impose qu'au moins l'un des $f(e_i)$ est non nul. Il existe donc exactement d morphisme surjectif de K^{sep} -algèbres de $K^{\text{sep}} \otimes_K B$ dans K^{sep} correspondant aux fonctions coordonnées dans la base (e_i) . \square

Théorème 1.2.10. *Le foncteur \mathbb{V} arrive en réalité dans la catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_E$ et fournit un quasi-inverse de \mathbb{D} .*

Démonstration. Étape 1 : supposons que l'on ait prouvé que le morphisme de comparaison

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}(D) \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_E} D \right) \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_E} D$$

induit par l'inclusion et la multiplication est un isomorphisme (G_E, φ) -équivariant de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ -modules (où $\mathbb{V}(D)$ est muni du Frobenius trivial).

Si c'est le cas, cet isomorphisme est naturel et en passant aux invariants par G_E il fournit un isomorphisme naturel entre $\mathbb{D}(\mathbb{V}(D))$ et $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_E} D)^{G_E} = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}})^{G_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} D = D$ avec le lemme 1.2.3. En d'autres termes, on exhibe une transformation naturelle entre $\mathbb{V} \circ \mathbb{D}$ et l'identité de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_E$.

D'un autre côté, l'isomorphisme naturel du théorème 1.2.5 donne en passant aux invariants par le Frobenius un isomorphisme naturel entre $\mathbb{V}(\mathbb{D}(V))$ et $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{\varphi=\text{Id}} = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}})^{\varphi=\text{Id}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V = V$ avec le lemme 1.2.8. En d'autres termes, on a une transformation naturelle entre $\mathbb{D} \circ \mathbb{V}$ et l'identité de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_E)$.

Petite remarque, pour être démontrée proprement, l'égalité $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{\varphi=\text{Id}} = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}})^{\varphi=\text{Id}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ nécessite, comme dans la preuve du théorème 1.2.5 pour les invariants par $G_{E'}$, un examen des facteurs invariants de V et toutes les égalités du lemme 1.2.8 (pas seulement la dernière). Nous nous épargnons de récrire les détails, qui ont été proprement rédigés dans le théorème précédent.

Étape 2 : montrons le caractère isomorphique du morphisme de comparaison pour un module D de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, E)$. Donnons-nous (d_i) une base du E -espace vectoriel D et $(a_{i,j})$ la matrice de φ_D dans cette base, i.e. vérifiant $\varphi_D(d_i) = \sum_j a_{i,j} d_j$. Par égalité, cette matrice est inversible, d'inverse $(a'_{i,j})$. Les éléments de $\mathbb{V}(D)$ correspondent aux vecteurs $\sum x_i \otimes d_i$ avec $(x_i) \in E^{\text{sep}}$ qui sont invariants sous $\varphi \otimes \varphi_D$, i.e. tels que pour tout i on a $x_i = \sum_j a_{j,i} x_j^p$. Cela se reformule $x_j^p = \sum_i a'_{i,j} x_i$. Autrement dit, on cherche le nombre de points géométriques de la E -algèbre $B = E[X_i]/(X_j^p - \sum_i a'_{i,j} X_i)$. La Jacobienne de ces polynômes est la matrice $(a'_{i,j})$ inversible, ce qui implique que B est une E -algèbre étale, de dimension p^d . Le lemme 1.2.9 affirme que $\mathbb{V}(D)$ est de cardinal p^d : c'est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de même dimension que D . Il suffit alors de prouver que le morphisme de comparaison est injectif.

Prenons (v_i) une famille de $\mathbb{V}(D)$. Supposons par l'absurde qu'elle n'est pas libre sur E^{sep} dans $E^{\text{sep}} \otimes_E D$. On se fixe une relation de liaison $\sum x_i v_i = 0$ pour laquelle on peut supposer que le nombre de x_i non nuls est minimal parmi toutes les relations non triviales, et que l'un des termes est dans \mathbb{F}_p . En appliquant le Frobenius, on obtient une autre relation de liaison $\sum x_i^p v_i = 0$. En soustrayant nos deux relations, on obtient une nouvelle relation avec strictement moins de termes nuls (l'un des x_i appartenait à \mathbb{F}_p). Par minimalité, elle est triviale et pour tout entier i on a $x_i^p = x_i$; la relation de départ pouvait se voir comme une relation sur \mathbb{F}_p , i.e. une relation de liaison dans $\mathbb{V}(D)$.

Étape 3 : montrons le résultat pour $\text{Rep}_{\text{tors}} G_E$ par récurrence sur l'ordre de la torsion. Supposons le résultat démontré pour tous les modules de p^h -torsion et prenons D de p^{h+1} -torsion. Comme nous l'avons déjà dit, la \mathcal{O}_E -algèbre $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ est plate. De plus, la prise des invariants est exacte à gauche. Nous obtenons alors un diagramme commutatif de \mathbb{Z}_p -modules aux lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{V}(p - \text{Tors}(D)) & \longrightarrow & \mathbb{V}(D) & \longrightarrow & \mathbb{V}(D/p - \text{Tors}(D)) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_E} (p - \text{Tors}(D)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_E} D & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_E} D/p - \text{Tors}(D) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi - \text{Id} & & \downarrow \varphi - \text{Id} & & \downarrow \varphi - \text{Id} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_E} (p - \text{Tors}(D)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_E} D & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_E} D/p - \text{Tors}(D) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par le lemme du serpent, il suffit que la colonne de gauche puisse se prolonger par un 0 pour conclure quant à l'exactitude de la ligne du haut. Montrons la surjectivité du $\varphi - \text{Id}$ sur la colonne de gauche, celle des objets modulo p : on a déjà l'isomorphisme φ -équivariant de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ -modules $E^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(p - \text{Tors}(D)) \cong E^{\text{sep}} \otimes_E (p - \text{Tors}(D))$

ce qui restreint l'étude de la surjectivité $\varphi - \text{Id}$ à E^{sep} . Sur ce corps, un antécédent à $y \in E^{\text{sep}}$ correspond à une racine de $X^p - X - y$ dans E^{sep} , ce qui existe toujours puisque E^{sep} est séparablement clos.

De cette exactitude, on obtient le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}(p - \text{Tors}(D)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}(D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}(D/p - \text{Tors}(D)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} (p - \text{Tors}(D)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} (D/p - \text{Tors}(D)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

permet d'appliquer le lemme de cinq pour conclure que le morphisme de comparaison pour D est un isomorphisme.

Étape 4 : soit D un objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$. Il faut d'abord prouver que $\mathbb{V}(D)$ est de type fini sur \mathbb{Z}_p . Le module $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D$ est p -adiquement complet avec une action \mathbb{Z}_p -linéaire de φ ce qui implique que $\mathbb{V}(D) = \varprojlim (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D)/p^h (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D) \xrightarrow{\varphi = \text{Id}} = \varprojlim \mathbb{V}(D/p^h D)$. Par les mêmes arguments qu'à la dernière étape du théorème 1.2.5, on identifie $\mathbb{V}(D/p^h D)$ à $\mathbb{V}(D)/p^h \mathbb{V}(D)$. Le cardinal d'une famille génératrice minimale de $\mathbb{V}(D/p^h D)$ étant stationnaire (disons à partir de N), des relevés successifs d'une telle famille génératrice de $\mathbb{V}(D/p^N D)$ fournissent une famille génératrice de $\mathbb{V}(D)$.

Puisque les deux modules $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}(D)$ et $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D$ sont p -adiquement complets et séparés, le caractère isomorphique du morphisme de comparaison se teste module p^h . Il suffit alors d'utiliser le caractère isomorphique pour $D/p^h D$. \square

Définition 1.2.11. Pour deux objets V_1 et V_2 de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_E$, il est possible de munir fonctoriellement $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2)$ d'une structure d'objet de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_E$. Il est de type fini grâce à la noéthérianité de \mathbb{Z}_p . L'action de G_E est définie pour tout $\sigma \in G_E$ et tout morphisme de \mathbb{Z}_p -modules f comme $\sigma(f) = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$.

Nous rappelons que pour deux objets D_1 et D_2 de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$, la proposition 1.1.8 fournit une structure fonctorielle d'objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ sur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(D_1, D_2)$.

Proposition 1.2.12. *Les foncteurs \mathbb{D} et \mathbb{V} commutent naturellement à la formation de produit tensoriel. Autrement dit, pour tous objets V_1, V_2 de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_E$, il existe un isomorphisme de $\varphi^{\mathbb{N}}$ -modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ entre $\mathbb{D}(V_1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V_2)$ et $\mathbb{D}(V_1 \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2)$ qui est naturel entre V_1 et V_2 . De même, pour tous objets D_1, D_2 de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$, il existe un isomorphisme de G_E -représentations sur \mathbb{Z}_p entre $\mathbb{V}(D_1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}(D_2)$ et $\mathbb{V}(D_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D_2)$ qui est naturel entre D_1 et D_2 .*

Le foncteur \mathbb{D} commute naturellement à la formation de Hom . Autrement dit, pour tous objets V_1, V_2 de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_E$, il existe un isomorphisme de $\varphi^{\mathbb{N}}$ -modules sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ entre $\mathbb{D}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2))$ et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathbb{D}(V_1), \mathbb{D}(V_2))$ qui est naturel en V_1 et V_2 .

Démonstration. Foncteur \mathbb{D} et produit tensoriel : soient V_1, V_2 des objets de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_E$. Considérons les isomorphismes (G_E, φ) -équivalents de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ -modules

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} (\mathbb{D}(V_1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V_2)) &\rightarrow (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V_1)) \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}} (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V_2)) \\ &\rightarrow (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_1) \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}} (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2) \\ &\rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} (V_1 \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2) \end{aligned}$$

induit par les isomorphismes de comparaison. En prenant les invariants par G_E , on obtient bien un isomorphisme naturel $\mathbb{D}(V_1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V_2) \cong \mathbb{D}(V_1 \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2)$. Remarque l'invariante par les Frobenius nous permet de voir l'isomorphisme dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$.

Foncteur \mathbb{V} et produit tensoriel : soient D_1 et D_2 deux objets de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$, l'isomorphisme précédent donne naturellement

$$D_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D_2 \cong \mathbb{D}(\mathbb{V}(D_1)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(\mathbb{V}(D_2)) \cong \mathbb{D}(\mathbb{V}(D_1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}(D_2))$$

ce qui fournit un isomorphisme naturel entre $\mathbb{V}(D_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D_2)$ et $\mathbb{V}(D_1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}(D_2)$ en appliquant \mathbb{V} .

Foncteur \mathbb{D} et formation de Hom : soient V_1, V_2 deux objets de $\text{Rep}_{\text{tors}} G_E$ et soit $E'|E$ finie galoisienne telle que $G_{E'}$ agit trivialement sur E_1 et E_2 . Commençons par l'isomorphisme de comparaison $(\text{Gal}(E'|E), \varphi)$ -équivalent

$$\mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2)) \cong \mathcal{O}_{E'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2).$$

Puisque $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$ est noethérien et que le changement de base $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$ est plat, le lemme 1.1.7 prouve que le morphisme

$$k : \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_1, \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2), \quad 1 \otimes f \mapsto (\text{Id} \otimes f)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'}}\text{-modules}$. Cet isomorphisme est $\text{Gal}(E'|E)$ -équivariant : pour tout $\sigma \in \text{Gal}(E'|E)$ et $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$, on trouve que

$$\begin{aligned} \sigma(x \otimes f) &= \sigma(x) \otimes \sigma(f) \\ &= \sigma(x) \otimes \sigma_{V_2} \circ f \circ \sigma_{V_1}^{-1} \end{aligned}$$

est envoyé sur

$$\sigma(x)(\text{Id} \otimes (\sigma_{V_2} \circ f \circ \sigma_{V_1}^{-1})) = (\sigma \otimes \text{Id}_{V_2}) \circ (x(\text{Id} \otimes f)) \circ (\sigma \otimes \text{Id}_{V_1})^{-1}.$$

Cet isomorphisme est φ -équivariant : pour tout $x \otimes (y \otimes f) \in \varphi^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2))$, et on suit son image dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*\left(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2)\right) & \xrightarrow{\varphi^*k} & \varphi^*\left(\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_1, \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2)\right) \\ \downarrow \varphi^*_{(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2))} & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2) & \xrightarrow{k} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}}(\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_1), \varphi^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2)) \\ & & \downarrow \\ & & \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_1, \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2) \end{array}$$

qui devient

$$\begin{array}{ccc} x \otimes (y \otimes f) & \longrightarrow & x \otimes (y(\text{Id} \otimes f)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & (x \otimes y(\text{Id} \otimes f)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x\varphi(y) \otimes f & \longrightarrow & x\varphi(y)(\text{Id} \otimes f) \end{array}$$

En somme, on obtient un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$ -modules qui est $(\text{Gal}(E'|E), \varphi)$ -équivariant, naturel

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_1, \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2).$$

En passant aux invariants par $\text{Gal}(E'|E)$, il apparaît un isomorphisme naturel dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ entre $\mathbb{D}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2))$ et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_1, \mathcal{O}_{\mathcal{E}'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2)^{\text{Gal}(E'|E)}$. Par théorie de la descente fidèlement plate, ce dernier module s'identifie naturellement à $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathbb{D}(V_1), \mathbb{D}(V_2))$.

Pour V_1 et V_2 dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_E$, on a naturellement pour tout entier h un isomorphisme

$$\mathbb{D}\left(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}\left(V_1/p^h V_1, V_2/p^h V_2\right)\right) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}\left(\mathbb{D}\left(V_1/p^h V_1\right), \mathbb{D}\left(V_2/p^h V_2\right)\right).$$

En passant à la limite projective en h , on obtient puisque tous les modules considérés sont séparés et complets et que \mathbb{D} est exact donc commute naturellement aux limites projectives, un isomorphisme naturel

$$\mathbb{D}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathbb{D}(V_1), \mathbb{D}(V_2)).$$

□

1.2.2 Corps de normes parfait

Notre but reste d'identifier les représentations $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p}$ à une catégorie d'algèbre semi-linéaire. Pour utiliser le cas de la caractéristique p , nous voulons identifier un sous-groupe-fermé de $G_{\mathbb{Q}_p}$ au groupe de Galois absolu d'un corps de caractéristique p . L'essentiel des techniques ne nécessitent pas adaptation pour traiter le cas d'une extension non triviale de \mathbb{Q}_p , mais pour plus de lisibilité, nous nous restreignons au cas de \mathbb{Q}_p .

Définition 1.2.13. Un corps K est dit perfectoïde s'il est complet pour une valuation de rang 1 non discrète que l'on suppose fixée, s'il existe un élément ϖ de l'idéal maximal tel que $p \in \varpi^p \mathcal{O}_K$ et si l'endomorphisme de puissance de p -ième sur $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ est surjectif.

Définition 1.2.14. Le basculé d'une \mathbb{F}_p -algèbre B est défini comme la limite projective du diagramme indexé par l'ensemble ordonné \mathbb{N} , où tous les objets sont égaux à B et où tous les morphismes d'anneaux sont égaux à $x \mapsto x^p$. On le note B^\flat et on peut également le décrire comme le sous-anneau de $B^\mathbb{N}$ défini par

$$\{(x_n) \in B^\mathbb{N} \mid \forall n, x_{n+1}^p = x_n\},$$

autrement dit avec une structure d'anneau donnée par l'addition et la multiplication terme à terme.

Lemme 1.2.15. Soit \mathcal{O} une \mathbb{Z}_p -algèbre ayant une racine d -ième de p . Soient x, y des éléments de \mathcal{O} tels que $x - y$ appartient à $p^{\frac{r}{d}} \mathcal{O}$. Alors, l'élément $x^p - y^p$ appartient à $p^{\min(\frac{r}{d}+1, p\frac{r}{d})} \mathcal{O}$.

Démonstration. Calculons :

$$\begin{aligned} x^p - y^p &= (y + (x - y))^p - y^p \\ &= \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (x - y)^k y^{p-k} \\ &\in (x - y)^p + p(x - y)^r \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \\ &\in p^{\min(\frac{r}{d}+1, p\frac{r}{d})} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.16. Soit \mathcal{O} une \mathbb{Z}_p -algèbre complète pour la valuation p -adique, l'application

$$\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O} \rightarrow (\mathcal{O}/p\mathcal{O})^\flat$$

définie par $(x^{(n)}) \mapsto (x^{(n)} \bmod p\mathcal{O})$ est bien définie, multiplicative et bijective. Elle munit la limite projective de gauche d'une structure d'anneau où l'addition est donnée par $(x + y)^{(n)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x^{(n+k)} + y^{(n+k)})^{p^k}$ (qui existe dans \mathcal{O}) et où la multiplication se fait terme à terme.

En particulier, l'anneau $(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)^\flat$ est intègre dès que \mathcal{O} l'est.

Démonstration. Soit $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ un élément de la source. Puisque pour tout entier n on a $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$, c'est encore vrai modulo p , d'où le caractère bien défini. La multiplicativité résulte de celle de la réduction modulo p .

Pour la bijectivité, trouvons une réciproque. Soit $(\widehat{x_n})_{n \geq 0}$ une suite de relevés de $(x_n)_{n \geq 0}$ dans \mathcal{O} . Comme $\widehat{x_{n+1}}^p \equiv \widehat{x_n} \bmod p\mathcal{O}$, le lemme 1.2.15 entraîne que $\widehat{x_{n+1}}^{p^{n+1}} \equiv \widehat{x_n}^{p^n} \bmod p^{n+1}\mathcal{O}$. La suite $(\widehat{x_n}^{p^n})_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans l'anneau \mathcal{O} complet pour la topologie p -adique : elle converge vers un élément $x^{(0)}$ de \mathcal{O} . Toujours grâce au lemme 1.2.15, si $\widehat{x'_n}$ est une autre suite de relevés $\widehat{x'_n}^{p^n} = \widehat{x_n}^{p^n} \bmod p^{n+1}\mathcal{O}$; cela entraîne que l'élément $x^{(0)}$ de dépend pas des relevés choisis. Posons pour application réciproque candidate

$$(x_n)_{n \geq 0} \mapsto \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{x_{n+k}}^{p^k} \right)_{n \geq 0}$$

Si $(\widehat{x_{n+k+1}})_{n \geq 0}$ est une suite de relevés de $(x_{n+k+1})_{n \geq 0}$, la suite $(\widehat{x_{n+k+1}}^{p^k})_{n \geq 0}$ est une suite de relevés de $(x_{n+k})_{n \geq 0}$, ce qui prouve que

$$\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{x_{n+1+k}}^{p^k} \right)^p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{x_{n+k}}^{p^k}$$

autrement dit que notre application réciproque candidate est bien définie.

Prouvons qu'elle est bien réciproque. Soit $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ dans $\varprojlim \mathcal{O}$. La suite $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ forme une suite de relevés de $(x^{(n)} \bmod p\mathcal{O})_{n \geq 0}$ ce qui entraîne que la composition des deux morphismes envoie $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ sur $(\varinjlim_{k \rightarrow +\infty} (x^{(n+k)})^{p^k})_{n \geq 0} = (x^{(n)})_{n \geq 0}$. Inversement, prenons $(x_n)_{n \geq 0}$ et choisissons des relevés (\widehat{x}_n) . Les $\widehat{x}_{n+k}^{p^k} \bmod p\mathcal{O}$ valent tous $x_{n+k}^{p^k} = x_n$, ce qui implique que nos deux morphismes sont inverses.

Pour le transfert de l'addition, il suffit de remarquer que si x et y appartiennent à la source, les éléments $(x^{(n)} + y^{(n)})_{n \geq 0}$ forment une famille de relevés de $(x^{(n)} + y^{(n)} \bmod p\mathcal{O})_{n \geq 0}$ qui est l'image de $x + y$. \square

Remarque 1.2.17. Pour $x \in (\mathcal{O}/p\mathcal{O})^{\flat}$, on appelle souvent $x^{\sharp} \in \mathcal{O}$ l'élément $x^{(0)}$. Si \mathcal{O}_1 est une \mathcal{O} -algèbre complète pour la valuation p -adique, et que \mathcal{O}'_2 est une sous- $(\mathcal{O}/p\mathcal{O})^{\flat}$ -algèbre de $(\mathcal{O}_1/p\mathcal{O}_1)^{\flat}$ on appelle $(\mathcal{O}'_2)^{\sharp}$ la sous- \mathcal{O} -algèbre de \mathcal{O}_1 engendrée par les x^{\sharp} pour $x \in \mathcal{O}'_2$. Cette opération est appelée débasculément.

Définition 1.2.18. Le basculé d'un corps perfectoïde K est défini par $K^{\flat} = \text{Frac}[(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)^{\flat}]$ (ce qui est possible puisque $(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)^{\flat}$ est intègre, nous l'avons identifié multiplicativement à $\varprojlim \mathcal{O}_K$).

Théorème 1.2.19 (Théorème 4.5 de [Mor]). *Si K est un corps perfectoïde, le basculé $K^{\flat} = \text{Frac}[(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)^{\flat}]$ est encore un corps perfectoïde muni de la valuation $|x|_{K^{\flat}} = |x^{(0)}|_K$. Toute extension finie séparable de K est encore perfectoïde. Le basculément et le débasculément établissent des applications réciproques entre les extensions finies séparables de K et de K^{\flat} qui respectent le degré, le caractère galoisien et fournissent des isomorphismes compatibles entre groupes de Galois le cas échéant.*

Remarque 1.2.20. Si le corps K est parfait de caractéristique p , il est son propre basculé.

Remarque 1.2.21. Pour un corps de caractéristique 0 et pour n'importe quel idéal \mathfrak{a} de \mathcal{O}_K contenant p et définissant la topologie p -adique, les mêmes raisonnements qu'à la proposition précédente permettent de prouver que $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}\mathcal{O}_K)^{\flat}$ s'identifie à $\varprojlim \mathcal{O}_K$ qui s'identifie à $(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)^{\flat}$.

Nous allons faire vivre tous les anneaux de caractéristique p qui suivront dans un unique gros anneau.

Définition 1.2.22. On note $R = (\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}/p\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}})^{\flat}$.

Par définition de la complétion p -adique, nous avons $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}/p\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Puisque \mathbb{C}_p est un corps perfectoïde, on peut appliquer tout ce qui précède.

Nous listons ci-dessous plusieurs propriétés intéressantes de l'anneau R .

Proposition 1.2.23. *1) L'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ passe à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Les actions coordonnées par coordonnées sont bien définies sur $\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ et R . Elles rendent l'isomorphisme $\varprojlim \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \cong R$ de la proposition 1.2.16 $G_{\mathbb{Q}_p}$ -équivariant.*

2) La fonction $|\cdot|_R : R \rightarrow p^{\mathbb{Q}_{\leq 0}} \cup \{0\}$ définie par $|x|_R = |x^{(0)}|_p$ est une valuation invariante par l'action de Galois.

3) R est un anneau local non noethérien et parfait.

4) R est $|\cdot|_R$ -adiquement complet.

5) $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ est une $\overline{\mathbb{F}_p}$ -algèbre. Comme ce dernier corps est algébriquement clos, a fortiori parfait, on retrouve une inclusion de $\overline{\mathbb{F}_p}$ dans R . Elle induit un isomorphisme au niveau des corps résiduels.

6) $\text{Frac}(R)$ est algébriquement clos.

Démonstration. 1) Tout élément σ de $G_{\mathbb{Q}_p}$ préserve la valuation sur \mathbb{C}_p d'où le passage que l'action galoisienne à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Le caractère bien défini provient juste de ce que $\sigma(x^p) = \sigma(x)^p$ dans \mathbb{C}_p . Enfin, si x est un élément de R , la suite $(\sigma(x^{(n)} \bmod p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}))_{n \geq 0}$ vaut $(\sigma(x^{(n)} \bmod p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}))_{n \geq 0}$ ce qui conclut quant à l'équivariance.

2) Il n'y a rien à démontrer pour le caractère bien défini, ou pour la multiplicativité, à part réutiliser la multiplicativité de $x \mapsto x^{(0)}$.

Montrons la séparation. La seule racine p -ième de 0 dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ étant 0 lui-même, l'élément x est nul si et seulement si $x^{(0)}$ est nul, d'où la séparation de $|\cdot|_R$.

Pour l'inégalité triangulaire, calculons

$$\begin{aligned}
|x + y|_R &= |(x + y)^{(0)}|_p \\
&= \left| \lim_{k \rightarrow +\infty} (x^{(k)} + y^{(k)})^{p^k} \right|_p \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} |x^{(k)} + y^{(k)}|_p^{p^k} \\
&\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \max(|x^{(k)}|_p, |y^{(k)}|_p)^{p^k} \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \max(|x^{(0)}|_p^{p^{-k}}, |y^{(0)}|_p^{p^{-k}})^{p^k} \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \max(|x|_R, |y|_R) \\
&= \max(|x|_R, |y|_R)
\end{aligned}$$

3) Pour montrer qu'il est local, il suffit que tout élément qui n'appartient pas à $\{x \in R \mid |x|_R < 1\}$ soit inversible dans R . Si $|x|_R = 1$ alors $|x^{(0)}|_p = 1$ ce qui entraîne que $x^{(0)}$ est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Mieux, pour tout entier n , on a l'égalité des normes $|x^{(n)}|_p^n = |x^{(0)}|_p = 1$. Tous les $x^{(n)}$ sont inversibles dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ et la suite $((x^{(n)})^{-1})_{n \geq 0}$ fournit un inverse à x dans R .

Il n'est pas noethérien puisque la valuation $|\cdot|_R$ n'est pas discrète.

Un basculé est toujours parfait. Précisément, l'élément $(x_{n+1})_{n \geq 0}$ fournit une racine p -ième de $(x_n)_{n \geq 0}$ dans le basculé R .

4) Soit $(x_m)_{m \geq 1}$ une suite de Cauchy dans R pour $|\cdot|_R$. Pour tout entier naturel n et tout $\varepsilon < p^{-1}$, il existe M avec pour tout $l \geq m \geq M$ on a l'inégalité $|(x_l - x_m)^{(n)}|_p = |x_l - x_m|_R^{p^{-n}} \leq \varepsilon$. Cette valuation vaut $\lim_{k \rightarrow +\infty} |(x_l^{(n+k)} - x_m^{(n+k)})^{p^k}|_p$. Puisque les termes $(x_l^{(n+k)} - x_m^{(n+k)})^{p^k}$ sont égaux modulo $p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ et que $\varepsilon < |p|_p$, on en déduit que la limite est simplement la première valuation. Ceci prouve que la suite $(x_m^{(n)})_{m \geq 0}$ est de Cauchy. Ainsi, la suite $(x_m)_{m \geq 0}$ converge simplement dans $\prod \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. L'anneau R s'identifie à un fermé de ce produit, ce qui conclut.

5) L'inclusion $W(\overline{\mathbb{F}_p}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ se réduit en une inclusion $\overline{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ qui en fait une $\overline{\mathbb{F}_p}$ -algèbre. Par passage au basculé, on retrouve une inclusion de $\overline{\mathbb{F}_p}^b = \overline{\mathbb{F}_p}$ dans R .

Soit $x \in R$ élément de l'image de $\overline{\mathbb{F}_p} \setminus \{0\}$. Toutes ses coordonnées x_n sont dans l'image de $\overline{\mathbb{F}_p} \setminus \{0\}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. On peut alors choisir des relevés \widehat{x}_n comme étant des éléments de norme p -adique 1 dans $W(\overline{\mathbb{F}_p}) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Il en découle que $|x|_R = 1$ donc qu'aucun élément non nul de $\overline{\mathbb{F}_p}$ n'est dans l'idéal maximal de R . Reste à prouver que ce sont des représentants du corps résiduel. Prenons $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ dans R et posons $y \in \overline{\mathbb{F}_p}$ l'image de $x^{(0)}$ dans le corps résiduel de \mathbb{C}_p . Il existe $\varepsilon < 1$ tel que $|x^{(0)} - [y]|_p \leq \varepsilon$. Par égalité ultramétrique et en développant le produit, il en découle que $|(x^{(n)} - [y^{p^{-n}}])^{p^n}|_p \leq \max(\varepsilon^{p^n}, p^{-1})$ ce qui implique bien que $|(x^{(n)} - y|_R < 1$.

6) Nous prouvons même que R est intégralement clos dans la clôture algébrique de $\text{Frac}(R)$.

Soit P un polynôme unitaire de degré d à coefficients dans R que l'on écrit $(P_n)_{n \geq 0}$ en identifiant $R[X] = \lim_{\substack{X \mapsto x^p \\ X \mapsto X}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[X]$. Pour chaque n , on écrit $(r_{i,n})_{i \leq d}$ les racines d'un relevé \widehat{P}_n de P_n dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[X]$. Pour tout entier n , on peut écrire dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[X]$ les égalités

$$\widehat{P}_n(\overline{r_{i,n+1}^p}) = P_n(\overline{r_{i,n+1}^p}) = (P_{n+1}(\overline{r_{i,n+1}}))^p = 0$$

malheureusement, l'anneau n'étant pas intègre, on ne peut conclure tel quel à la cohérence des $\overline{r_{i,n}}$. Pour ce faire, remarquons que $\widehat{P}_n(\overline{r_{i,n+1}^p}) = \prod_j (r_{i,n+1}^p - r_{j,n}) \in p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ implique qu'il existe $j(i)$ vérifiant $r_{i,n+1}^p - r_{j(i),n} \in p^{1/d}\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Le lemme 1.2.15 affirme alors que $r_{i,n+1}^{p^d} - r_{j(i),n}^{p^{d-1}} \in p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Par conséquent, les éléments de $F_n = \left\{ \overline{r_{i,n+d-1}^{p^{d-1}}} \right\}$ sont des racines de P_n et la puissance p -ième envoie F_{n+1} sur F_n . Le lemme de König montre alors qu'il existe $(r_n) \in R$ tel que $r_n \in F_n$ pour tout entier n . C'est une racine de P . \square

Dans le corps $\text{Frac}(R)$, il est possible de faire vivre un premier corps ayant même théorie de Galois que \mathbb{Q}_p^∞ , appelé corps de normes parfait de \mathbb{Q}_p^∞ .

Lemme 1.2.24. Soit $F_1|F$ une extension galoisienne d'un corps local F . Le morphisme de groupes suivant est correctement défini :

$$\text{Aut}^{\text{cont}}(\widehat{F_1}|\widehat{F}) \rightarrow \text{Gal}(F_1|F), \quad \sigma \mapsto \sigma|_{F_1}.$$

Il s'avère être un isomorphisme de groupes topologiques pour la topologie de convergence simple à la source et au but.

De surcroît, la topologie de convergence simple sur $\text{Gal}(F_1|F)$ correspond à la topologie profinie du groupe de Galois. Remarquons que l'on n'a pas besoin de la finitude de $F_1|F$.

Démonstration. La définition ne pose pas de problème puisque tout élément de F_1 est algébrique sur F , donc envoyé par $\sigma \in \text{Aut}^{\text{cont}}(\widehat{F_1}|\widehat{F})$ sur l'un de ses conjugués encore dans F_1 .

Prenons maintenant $\sigma \in \text{Gal}(F_1|F)$. Il fixe F qui contient un élément topologiquement nilpotent de F_1 et c'est un morphisme d'anneaux : il est automatiquement continu. La complétion $\widehat{F_1}$ étant complète et séparée, il existe une unique extension continue en $\sigma : \widehat{F_1} \rightarrow \widehat{F_1}$. Puisque que c'est également la limite pour la topologie de convergence simple, l'extension garde son caractère de morphisme d'anneau. Ses invariants forment un fermé de $\widehat{F_1}$, ce qui implique que σ fixe en réalité \widehat{F} . Nous avons prouvé l'existence et l'unicité de l'extension de σ en un élément de $\text{Aut}^{\text{cont}}(\widehat{F_1}|\widehat{F})$.

Pour montrer que $\sigma \mapsto \sigma|_{F_1}$ est un homéomorphisme, la compacité de la source nous permet de nous contenter de prouver que ledit morphisme est continu. On remarque alors que l'image réciproque du voisinage de l'identité décrit par $\{\sigma \in \text{Gal}(F_1|F) \mid |\sigma(x) - x| < r\}$ est le voisinage de l'identité $\{\sigma \in \text{Aut}^{\text{cont}}(\widehat{F_1}|\widehat{F}) \mid |\sigma(x) - x| < r\}$.

Passons à la comparaison des topologies sur $\text{Gal}(F_1|F)$. Pour les mêmes raisons de compacité, il suffit de prouver que la topologie de convergence simple est plus fine que la topologie profinie. Les $\text{Gal}(F_1|F_2)$ (où F_2 parcourt les extensions finies de F dans F_1) formant une base de voisinages de l'identité pour la topologie profinie, il suffit de prouver que ces sous-groupes sont ouverts pour la convergence simple. Soit $F_2|F$ une telle extension finie et $x \in F_2$ engendrant $F_2|F$. L'appartenance à l'image réciproque $\text{Gal}(F_1|F_2)$ de $\sigma \in \text{Aut}^{\text{cont}}(\widehat{F_1}|\widehat{F})$ équivaut à $\sigma(x) = x$. Prenons $r = \min |x - x'|$ où x' parcourt les conjugués de x dans F_1 . Puisqu'un élément de $\text{Gal}(F_1|F)$ envoie nécessairement x sur l'un de ces conjugués, la condition $\sigma(x) = x$ équivaut à $|\sigma(x) - x| < r$. Ceci prouve l'ouverture pour la topologie de convergence simple. \square

Lemme 1.2.25. *Tout corps $\mathbb{Q}_p \subseteq K \subseteq \mathbb{C}_p$ complet s'écrit comme la complétion d'une extension algébrique de \mathbb{Q}_p . Très exactement $K = \overline{K \cap \mathbb{Q}_p}$.*

Démonstration. Posons $K_1 = K \cap \overline{\mathbb{Q}_p}$. Puisque K est complet, on a l'inclusion $\widehat{K_1} \subseteq K$. Montrons l'inclusion inverse. Pour $x \in K$, nous pouvons écrire $x = \lim x_n$ avec $x_n \in \mathbb{Q}_p$. Chaque x_n est algébrique sur \mathbb{Q}_p et a fortiori sur K . Le minimum des $|x_n - x'_n|$ pour x'_n conjugué de x_n vaut

$$\begin{aligned} \min_{\sigma \in G_K} |x_n - \sigma(x_n)|_p &= \min_{\sigma \in G_K} |x_n - x + x - \sigma(x) + \sigma(x - x_n)|_p \\ &\leq \min_{\sigma \in G_K} \min (|x_n - x|_p, |x - \sigma(x)|_p, |\sigma(x_n - x)|_p) \\ &= \min \left(|x_n - x|_p, \min_{\sigma \in G_K} |x - \sigma(x)| \right) \end{aligned}$$

et vaut le deuxième terme pour n assez grand.

Rappelons le lemme de Krasner : pour un corps valué non archimédien F et $a, b \in \overline{F}$. On suppose que a est séparable sur $F(b)$ de polynôme minimal P et que tout autre racine a' de P vérifie que $|b - a| < |a' - a|$. Alors $a \in F(b)$.

Le lemme de Krasner prouve alors que $x_n \in K(x) = K$, d'où $x_n \in K_1$. \square

Théorème 1.2.26 ([Ax70]). *Soit F un corps local de caractéristique nulle. L'action de G_F prolongée par continuité à \widehat{F} admet pour invariants le complété \widehat{F} .*

Proposition 1.2.27. *Le corps $\mathbb{Q}_p^\infty = \bigcup_{m \geq 0} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^m})$, le corps $\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$ et le corps $\mathbb{F}_p(\widehat{(X)})^{\text{perf}}$ ont même théorie de Galois. Ici, le corps $\mathbb{F}_p(\widehat{(X)})^{\text{perf}}$ est la plus petite extension parfaite de $\mathbb{F}_p(\widehat{(X)})$. Explicitement c'est $\mathbb{F}_p(\widehat{(X^{p^{-\infty}})}) = \bigcup_{m \geq 0} \mathbb{F}_p(\widehat{(X^{p^{-m}})})$.*

Démonstration. Première équivalence : montrons l'équivalence entre les théories de Galois de \mathbb{Q}_p^∞ et de $\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$.

Pour toutes extensions finies $M_2|M_1|\mathbb{Q}_p^\infty$, il est possible d'associer les extensions finies $M_2\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}|M_1\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}|\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$. Comme les $M_i\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$ sont complètes (ce sont des $\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$ -espaces vectoriels de dimension finie), on obtient l'égalité $M_i\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty} = \widehat{M_i}$. Si $M_1|M_2$ est galoisienne, le lemme 1.2.24 prouve que

$$\text{Aut}^{\text{cont}}(\widehat{M_2}|\widehat{M_1}) \cong \text{Gal}(M_2|M_1)$$

et puisque $\widehat{M}_2|\widehat{M}_1$ est finie algébrique, la continuité n'impose rien sur les automorphismes d'où $\text{Aut}(\widehat{M}_2|\widehat{M}_1) \cong \text{Gal}(M_2|M_1)$. Avec le théorème d'Ax, on obtient ensuite

$$\begin{aligned}\widehat{M}_2^{\text{Aut}(\widehat{M}_2|\widehat{M}_1)} &= \widehat{M}_2^{\text{Gal}(M_2|M_1)} \\ &= (\mathbb{C}_p^{G_{M_2}})^{\text{Gal}(M_2|M_1)} \\ &= \mathbb{C}_p^{G_{M_1}} \\ &= \widehat{M}_1\end{aligned}$$

d'où le lemme d'Artin tire que $\widehat{M}_2|\widehat{M}_1$ est galoisienne de groupe de Galois identifié à $\text{Gal}(M_2|M_1)$. Deux faits s'en déduisent : pour $M_1 = \mathbb{Q}_p^\infty$, notre application $M \mapsto \widehat{M}$ associe une extension galoisienne de \mathbb{Q}_p^∞ à toute extension galoisienne de \mathbb{Q}_p , de mêmes groupes de Galois. Pour $M_1|\mathbb{Q}_p^\infty$ quelconque, on peut trouver une extension finie galoisienne M_2 de \mathbb{Q}_p^∞ contenant M_1 et alors en appliquant ce qui précède à $M_2|\mathbb{Q}_p^\infty$ et $M_2|M_1$, on trouve que $[M_2 : \mathbb{Q}_p^\infty] = [\widehat{M}_2 : \widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}]$ et que $[M_2 : M_1] = [\widehat{M}_2 : \widehat{M}_1]$. Ceci implique que $M \mapsto \widehat{M}$ préserve le degré des extensions.

Réciproquement, soit M_∞ une extension finie de $\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$. Elle est complète (c'est un $\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$ -espace vectoriel de dimension finie); le corollaire 1.2.25 implique que $M_\infty = \widehat{M_\infty \cap \overline{\mathbb{Q}_p}}$. D'après le paragraphe précédent, nous obtenons de plus l'égalité des degrés $[(M_\infty \cap \overline{\mathbb{Q}_p}) : \mathbb{Q}_p^\infty] = [M_\infty : \widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}]$. Si maintenant $M_\infty|\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$ est finie galoisienne, le lemme 1.2.24 identifie à nouveau $\text{Gal}(M_\infty|\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty})$ à $\text{Aut}(M_\infty \cap \overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p^\infty)$ et via cette identification

$$\begin{aligned}(M_\infty \cap \overline{\mathbb{Q}_p})^{\text{Aut}(M_\infty \cap \overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p^\infty)} &= (M_\infty^{\text{Gal}(M_\infty|\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty})}) \cap \overline{\mathbb{Q}_p} \\ &= \widehat{\mathbb{Q}_p^\infty} \cap \overline{\mathbb{Q}_p} \\ &= \mathbb{Q}_p^\infty\end{aligned}$$

d'où le lemme d'Artin tire que $M_\infty \cap \overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p^\infty$ est galoisienne de groupe de Galois identifié à $\text{Gal}(M_\infty|\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty})$.

Reste à prouver que $M \mapsto \widehat{M}$ et $M_\infty \mapsto M_\infty \cap \overline{\mathbb{Q}_p}$ sont réciproques l'une de l'autre. Dans un sens, nous avons déjà noté que le corollaire 1.2.25 impliquait que $M_\infty = \widehat{M_\infty \cap \overline{\mathbb{Q}_p}}$. Dans l'autre sens, l'extension $(\widehat{M} \cap \overline{\mathbb{Q}_p})|M$ est algébrique et doit être de degré nul puisque l'extension au niveau des complétions est triviale.

Deuxième équivalence : montrons l'équivalence entre les théories de Galois de $\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$ et de $\mathbb{F}_p(\widehat{(X)})^{\text{perf}}$. Le théorème 1.2.19 nous énonce qu'il suffit de prouver que $(\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty})^\flat \cong \mathbb{F}_p(\widehat{(X)})^{\text{perf}}$.

Il y a égalité entre l'anneau des entiers de $\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$ et le complété p -adique $\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}]$ ce qui identifie $(\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty})^\flat$ à $\text{Frac}((\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}]/p\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}])^\flat)$. Nous prouvons alors que $(\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}]/p\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}])^\flat \cong \mathbb{F}_p[[X^{p^{-\infty}}]]$. Fixons-nous pour cette preuve une suite cohérente $(\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$ de racines primitives p^n -ièmes de l'unité (autrement dit une suite de racines primitives telles que pour tout entier naturel n , on a $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$). Nous nous intéressons en premier lieu au morphisme d'anneau

$$\Phi : \mathbb{F}_p[[X^{p^{-\infty}}]] \rightarrow (\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}]/p\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}])^\flat \subset R, \quad X \mapsto (\zeta_{p^n} - 1 \bmod p\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}])_{n \geq 0}.$$

On calcule

$$\begin{aligned}|\Phi(X)|_R &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |\zeta_{p^n} - 1|_p^{p^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (p^{-\frac{1}{p^{n-1}(p-1)}})^{p^n} \\ &= p^{-\frac{p}{p-1}} < 1\end{aligned}$$

Ce calcul nous permet d'étendre Φ injectivement depuis complété-séparé X -adique $\mathbb{F}_p[[X^{p^{-\infty}}]]$ vers R .

Montrons que le basculé $(\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}]/p\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}])^\flat$ est $|\cdot|_R$ -adiquement fermé dans R . Montrons pour cela que $x \in R$ appartient à ce basculé si et seulement si chaque $x^{(n)}$ appartient au fermé $\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}]$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. D'un côté, si x appartient au basculé, on peut choisir les relevés $(\widehat{x}_m)_{m \geq 0}$ dans $\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}]$. L'élément $x^{(n)}$ est défini comme la limite p -adique des $\widehat{x}_{n+m}^{p^m}$. L'anneau $\mathbb{Z}_p[\widehat{\mu_{p^\infty}}]$ étant p -adiquement fermé dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, on conclut que chaque

$x^{(n)}$ appartient à $\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]}$. Réciproquement si tous les $x^{(n)}$ appartiennent à $\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]}$, les coordonnées valent $x_n = x^{(n)} \bmod \mathcal{O}_{C_p}$ que l'on peut identifier à des éléments de $\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]/p\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]}}$. Il devient alors possible d'écrire

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]/p\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]}}\right)^b &= \left\{x \in R \mid \forall n \geq 0, x^{(n)} \in \widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]}\right\} \\ &= \left\{x \in R \mid \forall n \geq 0, (x^{p^{-n}})^{(0)} \in \widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]}\right\} \\ &= \bigcap_{n \geq 0} \left\{x \in R \mid (x^{p^{-n}})^{(0)} \in \widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]}\right\} \end{aligned}$$

et la condition sur $(x^{p^{-n}})^{(0)}$ est $|\cdot|_R$ -adiquement fermée puisque $\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]}$ est p -adiquement fermé et que $x \mapsto x^{p^{-n}}$ est R -adiquement continue. Ceci prouve que l'extension précédente arrive en réalité dans $\left(\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]/p\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]}}\right)^b$.

Le calcul de $|\Phi(X)|_R$ prouve également que la norme X -adique et $|\Phi(\cdot)|_R$ sont équivalentes sur $\mathbb{F}_p[[X^{p^{-\infty}}]]$. L'image de Φ est alors fermée dans R . Il nous reste à prouver que cette image est $|\cdot|_R$ -adiquement dense dans $\left(\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]/p\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^\infty}]}}\right)^b$. Soit x dans ce dernier basculé et m un entier naturel. Il existe un entier $l \geq m$ tel que $x_m \in \widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^l}]/p\widehat{\mathbb{Z}_p[\mu_{p^l}]}}$. Écrivons $x_m = \sum_{j=0}^{p^l-1} a_j(\zeta_{p^l}^j - 1)$ avec $a_j \in \mathbb{Z}_p$. D'où

$$\begin{aligned} x_m &= \sum_{j=0}^{p^l-1} a_j(\zeta_{p^l}^j - 1) \\ &= \sum_{j=0}^{p^l-1} a_j(\zeta_{p^m}^{j/p^{l-m}} - 1) \\ &= \sum_{j_0}^{p^l-1} \overline{a_j}(\Phi(1+X)^{j/p^{l-m}} - 1)_m \\ &= \left(\Phi\left(\sum_{j=0}^{p^l-1} a_j[(1+X)^{j/p^{l-m}} - 1]\right)\right)_m \end{aligned}$$

En notant $P = \sum_{j=0}^{p^l-1} a_j[(1+X)^{j/p^{l-m}} - 1]$, le calcul précédent démontre que $(x - \Phi(P))_m = 0$, c'est-à-dire que $(x - \Phi(P))^{(m)} \in p\mathcal{O}_{C_p}$. On en déduit que

$$|x - \Phi(P)|_R = |(x - \Phi(P))^{(m)}|_p^{p^m} \leq p^{-p^m}.$$

La densité est prouvée. □

Remarque 1.2.28. Posons $H_{\mathbb{Q}_p} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p^\infty)$. On pourrait déjà prouver que les catégories $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} H_{\mathbb{Q}_p}$ et $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, W(\mathbb{F}_p(\widehat{X}))^{\text{perf}})$ sont équivalentes. Le basculé de $\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$ hérite d'une action de Γ , et donc $W(\mathbb{F}_p(\widehat{X}))^{\text{perf}}$ également. Le complété de son hensélianisé strict obtient même une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ (voir la construction qui suit). Nous pourrions ainsi passer de représentations de $H_{\mathbb{Q}_p}$ à des représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Cependant, les anneaux à manipuler sont moins élémentaires que ceux liés aux corps de normes imparfaits dont nous parlons dans la sous-section suivante.

1.2.3 Corps de normes imparfait

Nous voulons ici trouver un sous-corps de $\mathbb{F}_p(\widehat{X})^{\text{perf}}$ qui a même théorie de Galois que \mathbb{Q}_p^∞ .

Construction du corps de normes imparfait

Fixons pour la suite la notation $\mathbb{Q}_p^{(n)} = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$.

Définition 1.2.29. Pour toute extension finie $M|\mathbb{Q}_p^\infty$, on se fixe une extension finie $M_0|\mathbb{Q}_p$ telle que $M = M_0\mathbb{Q}_p^\infty$. On appellera également $M_0^{(n)} = M_0\mathbb{Q}_p^{(n)}$. Pour n assez grand, disons plus grand que n_M , l'intersection $M_0 \cap \mathbb{Q}_p^\infty$ est contenue dans $\mathbb{Q}_p^{(n)}$. Cela impose que \mathbb{Q}_p^∞ et M_0 sont disjointes sur $\mathbb{Q}_p^{(n)}$ ce qui induit un isomorphisme de groupes topologiques $\text{Gal}(M|M_0^{(n)}) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}_p^\infty|\mathbb{Q}_p^{(n)})$ qui préserve les groupes d'inertie. En particulier, $M_0^{(n+1)}|M_0^{(n)}$ est totalement ramifiée de degré p .

Définition 1.2.30. Le corps de normes parfait pour M est défini comme le corps des fractions de $R_M = (\mathcal{O}_M/p\mathcal{O}_M)^\flat$.

Le corps de normes imparfait pour M , noté E_M , est défini comme le corps des fractions de

$$E_M^+ = \{(x_n) \in R_M \mid x_n \in \mathcal{O}_M/p\mathcal{O}_M \text{ a un relevé dans } \mathcal{O}_{M_0^{(n)}} \text{ pour } n \gg 0\}.$$

Dans le cas de $M = \mathbb{Q}_p^\infty$, on l'appelle E .

Proposition 1.2.31. Le corps E_M ne dépend pas du choix de M_0 . La valuation induite depuis R en fait un corps topologique complet.

Démonstration. Soit M'_0 une autre extension telle que $M = M'_0\mathbb{Q}_p^\infty$. Posons N tel que $M_0 \subseteq M'_0^{(N)}$ et $M'_0 \subseteq M_0^{(N)}$. Alors, pour tout $n \geq N$, on obtient

$$\begin{aligned} M_0^{(n)} &= M_0\mathbb{Q}_p^{(n)} \\ &\subseteq M'_0^{(N)}\mathbb{Q}_p^{(n)} \\ &\subseteq M'_0\mathbb{Q}_p^{(N)}\mathbb{Q}_p^{(n)} \\ &\subseteq M'_0^{(n)} \end{aligned}$$

et en inversant les rôles on obtient $M'_0^{(n)} = M_0^{(n)}$ pour $n \geq N$. Par conséquent, la définition de E_M^+ est la même peu importe si l'on choisit M_0 ou M'_0 .

Pour prouver qu'il est complet, il nous faut prouver que E_M^+ est fermé dans R_M . La condition telle quelle n'est pas fermée ; il nous faut restreindre l'ordre à partir duquel $x^{(n)} \in \mathcal{O}_{M_0^{(n)}}$. Dans un premier temps, on commence par récrire $E_M^+ = \{(x_n) \in R_M \mid x_n \in \mathcal{O}_M/\pi_{n_M}\mathcal{O}_M \text{ a un relevé dans } \mathcal{O}_{M_0^{(n)}} \text{ pour } n \gg 0\}$ où π_{n_M} est une uniformisante de $\mathcal{O}_{M_0^{(n_M)}}$. Pour démontrer cette réécriture, il faut considérer que la réduction terme à terme modulo $\pi_{n_M}\mathcal{O}_M$ fournit un isomorphisme $(\mathcal{O}_M/p\mathcal{O}_M)^\flat \cong (\mathcal{O}_M/\pi_{n_M}\mathcal{O}_M)^\flat$ puis de remarquer que pour $n \geq n_M$, l'image de $\mathcal{O}_{M_0^{(n)}}$ dans le quotient est la même des deux côtés. Posons $x \in E_M^+$ et pour $n \geq n_M$ posons $\widehat{x_{n+1}}$ un relevé de x_{n+1} dans $\mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}}$. D'après [BC09, Lemme 13.3.1], quitte à augmenter n_M une fois pour toutes, pour tout $n \geq n_M$ on a

$$\forall y \in \mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}}, N_{M_0^{(n+1)}|M_0^{(n)}}(y) \equiv y^p \pmod{\pi_{n_M}\mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}}$$

qui implique que la norme de $\widehat{x_{n+1}}$ fournit un relevé de x_n dans $\mathcal{O}_{M_0^{(n)}}$. Précisément, on a prouvé que pour tout $n \geq n_M$ si x_{n+1} a un relevé dans $\mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}}$ alors x_n a un relevé dans $\mathcal{O}_{M_0^{(n)}}$. On peut ainsi récrire

$$E_M^+ = \{(x_n) \in R_M \mid x_n \in \mathcal{O}_M/\pi_{n_M}\mathcal{O}_M \text{ a un relevé dans } \mathcal{O}_{M_0^{(n)}} \text{ pour } n \geq n_M\}$$

ce qui exhibe le caractère fermé : nous sommes passés d'une union dénombrable de fermés pour la topologie produit à un unique fermé. \square

Par la suite, nous appelons n_M l'entier obtenu au cours de la démonstration de la proposition précédente, i.e. tel que pour tout $n \geq n_M$ l'extension $M_0^{(n)}|M_0^{(n_M)}$ est totalement ramifiée de degré p^{n-n_M} et que

$$\forall y, N_{M_0^{(n+1)}|M_0^{(n)}}(y) \equiv y^p \pmod{\pi_{n_M}\mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}}}.$$

Lemme 1.2.32. Pour $n \geq n_M$ et toute uniformisante π_a de $M_0^{(n)}$, il existe une uniformisante π_b de $M_0^{(n+1)}$ telle que $\pi_b^p \in \pi_a + \pi_{n_M}\mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}}$.

Démonstration. Prenons π une uniformisante quelconque de $M_0^{(n+1)}$. Donnons-nous une écriture $\pi_b = \sum_{j \geq 1} [b_j] \pi^j$ où la famille $(b_j)_{j \geq 1}$ est à valeurs dans κ_M et la notation Teichmüller atterrit dans $W(\kappa_M)$. L'extension $M_0^{(n+1)} | M_0^{(n)}$ étant totalement ramifiée, l'élément $N_{M_0^{(n+1)} | M_0^{(n)}}(\pi)$ est une uniformisante de $M_0^{(n)}$. Puisque $N_{M_0^{(n+1)} | M_0^{(n)}}(\pi) \equiv \pi^p \pmod{\pi_{n_M} \mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}}}$, on en tire que π^p est encore une uniformisante. Il s'écrit $\pi^p = \sum_{k \geq 1} [a_k] \pi_a^k$ avec les a_k dans κ_M avec $a_1 \neq 0$. Toujours modulo $\pi_{n_M} \mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}}$ (en particulier modulo p) on obtient

$$\begin{aligned} \pi_b^p &\equiv \left(\sum_{j \geq 1} [b_j] \pi^j \right)^p \\ &\equiv \sum_{j \geq 1} ([b_j] \pi^j)^p \\ &\equiv \sum_{j \geq 1} [b_j^p] (\pi^p)^j \\ &\equiv \sum_{j \geq 1} [b_j^p] \left(\sum_{k \geq 1} [a_k] \pi_a^k \right)^j \\ &\equiv \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\sum_k l_k = j, \sum_k l_k = m} [b_j^p] \prod [a_k]^{l_k} + [b_m^p] \right) \pi_a^m \end{aligned}$$

Cette expression vaut π_a modulo $\pi_{n_M} \mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}}$ dès que l'on a pour tout m la congruence

$$[b_m^p] + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\sum_k l_k = j, \sum_k l_k = m} \prod [a_k]^{l_k} \equiv \delta_{1,m} \pmod{\pi_{n_M} \mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}}}$$

ce qui arrive dès que l'on a pour tout m l'égalité

$$b_j^p + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\sum_k l_k = j, \sum_k l_k = m} b_j^p \prod_k a_k^{l_k} = \delta_{1,m}$$

Par perfection de κ_M , il est toujours possible de trouver une telle solution. \square

Définition 1.2.33. Pour $n \geq n_M$, le lemme précédent nous permet de choisir une suite $(\pi_n)_{n \geq n_M}$ d'uniformisantes telles que $\pi_{n+1}^p = \pi_n \pmod{\pi_{n_M} \mathcal{O}_M}$. En définissant pour $n \leq n_M$ l'élément π_n comme $\pi_n = \pi_N^{p^{n_M - n}}$, on obtient un élément $\overline{\pi_M} = (\pi_n \pmod{\pi_{n_M} \mathcal{O}_M})_{n \geq 0}$ de E_M^+ .

Exemple 1.2.34. Prenons $M = \mathbb{Q}_p^\infty$ et $M_0 = \mathbb{Q}_p$ pour lequel $M_0^{(n)} = \mathbb{Q}_p^{(n)}$. Pour toute suite compatible de racines primitives p^n -ièmes de l'unité $(\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$ élément de E_M^+ que l'on nomme ε , l'élément $\varepsilon - 1 = (\zeta_{p^n} - 1 \pmod{p \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p^\infty}})_{n \geq 0}$ formée d'uniformisantes respectives des $\mathbb{Q}_p^{(n)}$ fournit effectivement une suite compatible d'uniformisantes obtenu comme dans la définition précédente.

Proposition 1.2.35. *Le morphisme*

$$\kappa_M \llbracket X \rrbracket \rightarrow R_M, X \mapsto \overline{\pi_M}$$

est bien défini, injectif, continu, d'image E_M^+ .

Démonstration. Compte tenu de la complétude et de la séparation de R , les trois premières assertions se restreignent à prouver que $|\overline{\pi_M}|_R < 1$. Or,

$$\begin{aligned} |\overline{\pi_M}|_R &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |\pi_n^{p^n}|_p \\ &= \lim_{n \geq n_M} |\pi_n|_p^{p^n} \\ &= \lim_{n \geq n_M} p^{-\frac{1}{e p^{n-n_M}} p^n} \\ &= p^{-\frac{p^{n_M}}{e}} < 1 \end{aligned}$$

où e est l'indice de ramification de $M_0^{(n_M)}|\mathbb{Q}_p$. Toutes les égalités proviennent de ce que $M_0^{(n)}|M_0^{(n_M)}$ est totalement ramifiée d'indice p^{n-n_M} .

Montrons que l'image est E_M^+ . Posons $n \geq n_M$. Puisque $M_0^{(n)}|M_0^{(n_M)}$ est totalement ramifiée, l'extension s'écrit $\mathcal{O}_{M_0^{(n_M)}}[\pi_n]$ avec π_n racine d'un polynôme P qui est d'Eisenstein par rapport à $M_0^{(n_M)}$, de degré p^{n-n_M} . Il en découle que

$$\mathcal{O}_{M_0^{(n)}}/\pi_{n_M}\mathcal{O}_{M_0^{(n)}} \cong \mathcal{O}_{M_0^{(n_M)}}[X]/(\pi_{n_M}, P(X)) \cong \kappa_{M_0^{(n_M)}}[X]/(X^{p^{n-n_M}}) \cong \kappa_M[X]/(X^{p^{n-n_M}})$$

où le dernier isomorphisme est tordu : explicitement, on décrète que X est envoyé sur la classe de π_n et que $x \in \kappa_M$ est envoyé sur $x^{p^{-(n-n_M)}}$ (c'est possible car le corps résiduel de M est parfait. Bien que cela semble inutile pour obtenir un isomorphisme, ce décret sur l'image de κ_M permet tout de suite après d'établir des liens entre les morphismes à différents niveaux). En appelant θ_n cet isomorphisme, nous obtenons alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \kappa_M[X]/(X^{p^{n+1-n_M}}) & \xrightarrow{\text{mod } X^{p^{n-n_M}}} & \kappa_M[X]/(X^{p^{n-n_M}}) \\ \downarrow \theta_{n+1} & & \downarrow \theta_n \\ \mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}}/\pi_{n_M}\mathcal{O}_{M_0^{(n+1)}} & \xrightarrow{y \mapsto y^p} & \mathcal{O}_{M_0^{(n)}}/\pi_{n_M}\mathcal{O}_{M_0^{(n)}} \end{array}$$

permet de passer à la limite et d'écrire

$$E_M^+ = \lim_{\substack{n \geq n_M \\ x \mapsto x^p}} \mathcal{O}_{M_0^{(n)}}/\pi_{n_M}\mathcal{O}_{M_0^{(n)}} = \lim_n \kappa_M[X]/(X^{p^{n-n_M}}) = \kappa_M[[X]]$$

où l'image de X par ce morphisme est $\overline{\pi_M} = (\pi_n)_{n \geq 0}$ et où l'image de $y \in \kappa_M$ est $(y^{p^{-(n-n_M)}})_{n \geq 0}$ qui correspond exactement à y dans R_M . \square

Exemple 1.2.36. En particulier, il est possible d'écrire $E = \mathbb{F}_p((X))$ avec $X = \varepsilon - 1$ et $|\varepsilon - 1|_R = p^{-\frac{p}{p-1}}$.

Équivalence des théories de Galois

Il reste à démontrer que les corps \mathbb{Q}_p^∞ et E ont même théorie de Galois. Sans plus de difficultés, nous montrons que M et E_M ont même théorie de Galois en suivant la stratégie adoptée par Peter Schneider dans les sections 1.4 à 1.6 de [Sch17].

Lemme 1.2.37. *L'injection suivante est une égalité de corps $\widehat{E_M^{\text{sep}}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p^b$.*

Démonstration. Étape 1 : montrons qu'un corps séparablement clos local F est dense dans sa clôture algébrique pour la topologie étendant la topologie adique sur F .

Soit $a \in \overline{F}$ entier sur \mathcal{O}_F . Prenons $P \in F[Y]$ un polynôme qui l'annule. Considérons les polynômes $P_n = P + x_n Y$ avec $x_n \rightarrow 0$ qui sont non constants pour n assez grand. En évaluant en a , on trouve que $P_n(a) = x_n a$ ce qui implique que l'une des racines a_n de P_n vérifie que $|a_n - a| \leq |x_n|^{1/\deg P}$. Cette dernière quantité tend vers 0 quand n diverge.

Étape 2 : montrons que le corps $\widehat{E_M^{\text{sep}}}$ est séparablement clos.

Prenons ensuite x séparable sur $\widehat{E_M^{\text{sep}}}$ et $r < \min |x - x'|$ où x' parcourt ses conjugués. Prenons P son polynôme minimal unitaire et $Q \in E_M^{\text{sep}}[Y]$ unitaire de même degré que P tel que tous les coefficients de $P - Q$ sont de valuation inférieure à $\min(r, r|x|^{-1})^{\deg P}$. L'évaluation en x donne que $|Q(x)| \leq r^{\deg P}$. L'une des racines x'' de Q vérifie alors que $|x - x''| \leq r$. En appliquant le lemme de Krasner, on trouve que $x \in \widehat{E_M^{\text{sep}}}(x'') = \widehat{E_M^{\text{sep}}}$.

Étape 3 : les deux premières étapes prouvent que $\widehat{E_M^{\text{sep}}} \subset \mathbb{C}_p^b$ est algébriquement clos. Il nous reste donc à prouver qu'il n'existe aucune extension intermédiaire $E \subset F \subset \mathbb{C}_p^b$ qui soit algébriquement close hormis \mathbb{C}_p lui-même. Soit F une telle extension. Considérons le débasculé $\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty} \subset F^\# \subset \mathbb{C}_p$. Si ce débasculé n'était pas algébriquement clos, le théorème 1.2.19 affirmerait que son basculé \widehat{F} ne le serait pas non plus. Par conséquent, il est algébriquement clos. Or toute extension complète et algébriquement close de $\widehat{\mathbb{Q}_p^\infty}$ contient $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Puisqu'elle est également complète, elle vaut \mathbb{C}_p . Le résultat suit en basculant l'identification $F^\# = \mathbb{C}_p$. \square

Remarque 1.2.38. La démonstration précédente contient une petite circonvolution logique puisqu'une des étapes cruciales du théorème 1.2.19 consiste justement à prouver que le débasculé d'un corps algébriquement clos l'est également.

Proposition 1.2.39. *Nous fixons toujours l'extension finie $M|\mathbb{Q}_p^\infty$. Dans $\text{Frac}(R)$, on a l'égalité $\widehat{E_M^{\text{perf}}} = (\widehat{M})^b$.*

Démonstration. La preuve ressemble en tous points à celle de la proposition 1.2.27. D'un côté, le basculé $R_M = (\mathcal{O}_{\widehat{M}}/\pi_{n_M}\mathcal{O}_{\widehat{M}})^b \subset R$ est un fermé $|\cdot|_R$ -adique, a fortiori un complet. Puisque $E_M^+ \subset R_M$, avec R_M qui est $|\cdot|_R$ -adiquement complet et qui est parfait, on en déduit que $(\widehat{E_M^{\text{perf}}})^+ \subseteq R_M$. Reste à prouver que l'image est dense pour démontrer que $(\widehat{E_M^{\text{perf}}})^+ = R_M$.

Pour ce faire, soit $x \in R_M$ et m un entier naturel. Prenons un entier $l \geq m$ tel que $x_m \in \mathcal{O}_{M_0^{(l)}}/\pi_{n_M}\mathcal{O}_{M_0^{(l)}}$. Écrivons $x_m = \overline{\sum_{j=0}^{p^{l-n_M}-1} a_j(\pi_l^j - 1)}$ avec $a_j \in \mathcal{O}_{M_0^{(n_M)}}$ et où la congruence correspond à la réduction modulo π_{n_M} . D'où

$$\begin{aligned} x_m &= \overline{\sum_{j=0}^{p^{l-n_M}-1} a_j(\pi_l^j - 1)} \\ &= \sum_{j=0}^{p^{l-n_M}-1} \overline{a_j(\pi_l^j - 1)} \\ &= \sum_{j=0}^{p^{l-n_M}-1} \overline{a_j(\overline{\pi_M}^{p^{-(l-m)}} - 1)}_m \end{aligned}$$

Les $\overline{a_j}$ sont dans le corps résiduel κ_M de $M_0^{(n_M)}$. On en tire que $y = x - \sum_{j=0}^{p^{l-n_M}-1} \overline{a_j(\overline{\pi_M}^{p^{-(l-m)}} - 1)}$ vérifie que $|y^{(m)}|_p \leq |\pi_{n_M}|_p$ d'où $|y|_R \leq |\pi_{n_M}|_p^m$. Ceci démontre la densité. \square

Théorème 1.2.40 (1.6.7 dans [Sch17]). *Nous fixons toujours l'extension finie $M|\mathbb{Q}_p^\infty$. La suite de morphismes de groupe suivante se compose en un isomorphisme de groupes topologiques entre les groupes de Galois absolus :*

$$G_M \rightarrow \text{Aut}^{\text{cont}}(\mathbb{C}_p, \widehat{M}) \xrightarrow{\cdot^b} \text{Aut}^{\text{cont}}(\mathbb{C}_p^b | (\widehat{M})^b) \rightarrow \text{Aut}^{\text{cont}}(\mathbb{C}_p^b | E_M) \rightarrow \text{Gal}(E_M^{\text{sep}} | E_M)$$

où le premier et le dernier isomorphisme viennent du lemme 1.2.24 appliqué à $\overline{\mathbb{Q}_p}|M$ (resp. $E_M^{\text{sep}}|E_M$ grâce au lemme 1.2.37). Les deux autres restent à expliciter.

Démonstration. L'isomorphisme entre $\text{Aut}^{\text{cont}}(\mathbb{C}_p, \widehat{M})$ et $\text{Aut}^{\text{cont}}(\mathbb{C}_p^b | (\widehat{M})^b)$ provient de ce que $\sigma \mapsto \sigma^b$ vérifiant $\sigma(x^\sharp) = (\sigma^b(x))^\sharp$ est un isomorphisme de groupes topologiques correctement défini pour des corps perfectoides. La manière la plus simple de démontrer que $(\widehat{M})^b$ est perfectoïde reste probablement son identification à $\widehat{E_M^{\text{perf}}}$ dans la proposition 1.2.39.

Pour le deuxième, rappelons que par définition $(\widehat{M})^b = \text{Frac}(R_M)$. Le deuxième isomorphisme est issu de l'inclusion $\text{Aut}^{\text{cont}}(\mathbb{C}_p^b | \text{Frac}(R_M)) \rightarrow \text{Aut}^{\text{cont}}(\mathbb{C}_p^b | E_M)$. Tout $\sigma \in \text{Aut}^{\text{cont}}(\mathbb{C}_p^b | E_M)$ fixe les extensions purement inséparables de E_M contenues dans \mathbb{C}_p^b : il fixe ainsi E_M^{perf} , puis $\widehat{E_M^{\text{perf}}}$ par continuité. La proposition 1.2.39 prouve très exactement que $\widehat{E_M^{\text{perf}}} \rightarrow (\widehat{M})^b$ qui à X envoie $\overline{\pi_M}$ est un isomorphisme.

Pour le caractère homéomorphe, celui du premier et du dernier a déjà été traité dans le lemme 1.2.24. Nous avons déjà dit que la théorie du basculement nous fournissait un homéomorphisme. Il ne reste que celui de l'isomorphisme du paragraphe précédent, mais il est tautologique puisque ce sont deux sous-espaces de $\text{Aut}(\mathbb{C}_p^b)$ muni de la topologie de convergence simple dont on a montré la coïncidence ensembliste. \square

Remarque 1.2.41. Il est possible de démontrer plus précisément que pour une tour d'extensions finies $M'|M|\mathbb{Q}_p^\infty$, l'extension $E_{M'}|E_M$ est finie de degré $[M' : M]$. De plus, toute extension finie $E'|E$ s'écrit $E' = E_{M'}$.

Action de Γ

Puisque R possède en réalité une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$, il est possible de récupérer sur $E \subset \text{Frac}(R)^{H_{\mathbb{Q}_p}}$ une action de $\Gamma = G_{\mathbb{Q}_p}/H_{\mathbb{Q}_p} \cong \mathbb{Z}_p^\times$. Il est possible de la décrire.

Définition 1.2.42. Pour tout entier naturel n , la fonction

$$\mathbb{N} \mapsto \mathbb{F}_p, \quad m \mapsto \binom{m}{n} \pmod{p}$$

est continue si l'on munit la source de la topologie p -adique. Elle s'étend en une fonction continue de \mathbb{Z}_p vers \mathbb{F}_p . Il est alors possible de définir pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ l'élément $(1+X)^\gamma = \sum_{n \geq 0} \binom{\gamma}{n} X^n$ dans $\mathbb{F}_p[[X]]$. Les applications coefficients binomiaux étant continues, l'application $\gamma \mapsto (1+X)^\gamma$ est continue pour la topologie X -adique sur $\mathbb{F}_p[[X]]$.

Proposition 1.2.43. L'action de Γ sur $\mathbb{F}_p \subset E$ est triviale. L'action sur l'uniformisante $X = \varepsilon - 1$ est donnée par $\gamma \cdot (X) = (1+X)^\gamma - 1$.

Démonstration. Le théorème 1.2.40 donne une manière simple de calculer l'action, puisqu'elle provient de R . La première assertion est triviale puisque l'action de Γ est formée de morphismes de corps. Pour la deuxième, via l'identification $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p^\times$, l'action de Γ se définit comme $\gamma \cdot \varepsilon = \varepsilon^\gamma$ où les puissances ont du sens pour chaque terme ζ_n de ε . Toutefois, le ε^γ que l'on vient d'écrire est défini comme des puissances terme à terme, alors que $(1+X)^\gamma - 1$ est défini topologiquement. Il nous faut encore prouver que

$$\mathbb{N} \rightarrow E, \quad \gamma \mapsto \varepsilon^\gamma$$

est continu pour la topologie p -adique à gauche et $|\cdot|_R$ -adique à droite (plus fine que la topologie X -adique).

Soit l_1, l_2 deux entiers tels que $l_1 - l_2 \in p^k \mathbb{N}$, on peut écrire

$$|\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{l_2}|_R = |\varepsilon^{l_2}|_R |\varepsilon^{l_1-l_2} - 1|_R = |\varepsilon^{l_1-l_2} - 1|_R.$$

Puisque $l_1 - l_2 \in p^k \mathbb{N}$, le terme $(\varepsilon^{l_1-l_2})^{(n)}$ est une racine p^{n-k} -ième de l'unité (pour $n \geq k$), d'où

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{l_1-l_2} - 1|_R &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |(\varepsilon^{l_1-l_2})^{(n)} - 1|_p^{p^n} \\ &= \lim_{n \geq k} |(\varepsilon^{l_1-l_2})^{(n)} - 1|_p^{p^n} \\ &\leq \lim_{n \geq k} p^{-\frac{1}{p^{n-k}-1} \frac{1}{p-1} p^n} \\ &\leq p^{-p^k \frac{p}{p-1}} \end{aligned}$$

et tout en découle. □

1.2.4 L'équivalence de catégories pour un corps local de caractéristique nulle

Définition 1.2.44. Prenons le relevé du morphisme d'anneaux $\mathbb{F}_p[[X]] \rightarrow R$ obtenu en fixant le relevé $[\varepsilon] - 1$ de l'uniformisante $\varepsilon - 1$ et en envoyant X sur ce relevé. Ceci nous fournit un morphisme injectif de \mathbb{Z}_p -algèbres $\mathbb{Z}_p[[X]] \hookrightarrow W(\text{Frac}(R))$. Puisque $[\varepsilon] - 1 \equiv \varepsilon - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, il est inversible dans $W(\text{Frac}(R))$. On en déduit un morphisme injectif de \mathbb{Z}_p -algèbres

$$\mathbb{Z}_p[[X]][X^{-1}] \rightarrow W(\text{Frac}(R)).$$

Par continuité p -adique de ce morphisme (il est \mathbb{Z}_p -linéaire), on en déduit un morphisme injectif de \mathbb{Z}_p -algèbres

$$\mathbb{Z}_p[[\widehat{X}]][[\widehat{X}^{-1}]] \hookrightarrow W(\text{Frac}(R))$$

On nomme \mathcal{O}_ε l'image de ce morphisme, qui est une \mathbb{Z}_p -algèbre complète pour la topologie p -adique (et également la topologie $(p, [\varepsilon] - 1)$ -adique).

Définition 1.2.45. Pour tout entier naturel n , la fonction

$$\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}, \quad m \mapsto \binom{m}{n}$$

est continue si l'on munit la source de la topologie p -adique. Elle s'étend en une fonction continue de \mathbb{Z}_p vers lui-même. Il est alors possible de définir pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ l'élément $(1+X)^\gamma = \sum_{n \geq 0} \binom{\gamma}{n} X^n$ dans $\mathbb{Z}_p[[X]]$. Les applications coefficients binomiaux étant continues, l'application $\gamma \mapsto (1+X)^\gamma$ est continue pour la topologie (p, X) -adique sur $\mathbb{Z}_p[[X]]$.

Lemme 1.2.46. La topologie produit sur

$$W(R) \subset R^{\mathbb{N}}, \quad \sum [a_n] p^n \mapsto (a_n)$$

est plus fine que la topologie $(p, [\varepsilon] - 1)$ -adique.

Démonstration. Si $\tilde{p} \in R$ est une suite cohérente de racines de p , la topologie $(p, [\varepsilon] - 1)$ -adique et $(p, [\tilde{p}])$ -adique coïncident. La topologie produit et la topologie $(p, [\tilde{p}])$ -adique munissent $W(R)$ de structures d'anneaux topologiques : il suffit donc de vérifier qu'une base de voisinages de 0 pour la topologie $(p, [\tilde{p}])$ -adique contient une base de voisinages de 0 pour la topologie produit. En particulier, il suffit de prouver les inclusions $\{\sum [a_n] p^n \mid \forall n \leq N, |a_n|_R \leq p^{-(N-n)}\} \subseteq (p, [\tilde{p}])^N$: si $|a_n|_R \leq p^{-(N-n)}$ alors $a_n \in \tilde{p}^{N-n} R$ et $[a_n] p^n \in (p, [\tilde{p}])^N$. \square

Proposition 1.2.47. Puisque $\text{Frac}(R)$ est une clôture séparable du corps résiduel de \mathcal{O}_ε et que $\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}|\mathcal{E}}$ est algébrique non ramifiée, il est possible de donner du sens à l'inclusion $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \subset W(\text{Frac}(R))$. Le Frobenius et l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $W(\text{Frac}(R))$ relevant ceux sur son corps résiduel stabilisent $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$.

L'action Galoisienne commute au Frobenius.

Le Frobenius et l'action de $H_{\mathbb{Q}_p}$ obtenus sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ par restriction depuis $W(\text{Frac}(R))$, sont exactement ceux obtenus en prolongeant le Frobenius de \mathcal{O}_ε et en identifiant $H_{\mathbb{Q}_p}$ à $\text{Gal}(E^{\text{sep}}|E) = \text{Aut}^{\text{cont}}(\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}|\mathcal{E})}$.

Les endomorphismes de \mathbb{Z}_p -algèbres de $\mathcal{O}_\varepsilon \subset W(\text{Frac}(R))^{H_{\mathbb{Q}_p}}$ obtenus par restriction fournissent un Frobenius et une action \mathbb{Z}_p -linéaire de Γ qui vérifient que

$$\varphi(X) = (1+X)^p - 1, \quad \forall \gamma \in \Gamma, \gamma \cdot X = (1+X)^\gamma - 1.$$

Démonstration. Nous commençons par établir calculer le Frobenius et l'action sur \mathcal{O}_ε :

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= \varphi([\varepsilon] - 1) \\ &= [\varepsilon^p] - 1 \\ &= [\varepsilon]^p - 1 \\ &= (1+X)^p - 1 \end{aligned}$$

et pour l'action de Γ :

$$\begin{aligned} \gamma \cdot X &= \gamma([\varepsilon] - 1) \\ &= [\gamma \cdot \varepsilon] - 1 \\ &= [\varepsilon^\gamma] - 1 \end{aligned}$$

on pourrait déjà conclure si γ était un entier. À nouveau, nous nous trouvons face à un problème topologique. Nous avons déjà montré que $\mathbb{Z}_p^\times \rightarrow R, \gamma \mapsto \varepsilon^\gamma$ est continue pour la topologie $|\cdot|_R$ -adique ce qui prouve que

$$\mathbb{Z}_p^\times \rightarrow W(R), \quad \gamma \mapsto [\varepsilon^\gamma]$$

est continue pour la topologie produit. Le lemme 1.2.46 en déduit la même application est continue pour la topologie $(p, [\varepsilon] - 1)$ -adique. Comme $\gamma \mapsto \sum_{n \geq 0} \binom{\gamma}{n} ([\varepsilon] - 1)^n$ est également continue pour cette topologie et coïncide pour γ entier, on en déduit que $[\varepsilon^\gamma] = \sum_{n \geq 0} \binom{\gamma}{n} ([\varepsilon] - 1)^n = \sum_{n \geq 0} \binom{\gamma}{n} X^n$. Transportée sur \mathcal{O}_ε qui est (p, X) -adiquement complet, cela montre que \mathcal{O}_ε est stable sous le Frobenius et l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$, et fournit les formules souhaitées.

L'anneau $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ qui est la colimite des extensions étales de \mathcal{O}_ε dans $W(\text{Frac}(R))$ (voir [Prob]). Pour tout σ dans $G_{\mathbb{Q}_p}$, on a $\sigma(\mathcal{O}_\varepsilon) = \mathcal{O}_\varepsilon$ et l'image de toute extension étale est encore une extension étale. De même, si

$\mathcal{O}_\varepsilon \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\varepsilon'}$ est étale dans $W(\text{Frac}(R))$, alors $\mathcal{O}_\varepsilon \xrightarrow{\text{Id} \otimes \varphi(f)} \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\varphi(\mathcal{O}_\varepsilon)} \varphi(\mathcal{O}_{\varepsilon'})$ est encore étale. Tout ceci montre que $\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}}$ est stable par le Frobenius et l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$. La propriété analogue pour $\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}}$ en découle puisque c'est un fermé du complet $W(\text{Frac}(R))$ pour la topologie p -adique sur lequel le Frobenius et l'action de n importe quel élément de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sont continues (ils sont \mathbb{Z}_p -linéaires).

Pour la coïncidence sur $\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}}$ du Frobenius et de l'action de $H_{\mathbb{Q}_p}$ restreintes depuis $W(\text{Frac}(R))$ et de ceux obtenus à partir de \mathcal{O}_ε comme au début de la sous-section 1.2.1 on procède en deux étapes. On prouve d'abord la coïncidence sur $\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}}$ grâce à l'unicité dans le lemme 10.154.6 de [Proa]. Ensuite, on passe à la fermeture p -adique par continuité (ceux obtenus par restriction depuis $W(\text{Frac}(R))$ sont \mathbb{Z}_p -linéaires, ceux obtenus à partir de \mathcal{O}_ε sont p -adiquement continus puisque ce sont des morphismes locaux).

La commutation de l'action au Frobenius est évidente sur R , a fortiori sur $W(\text{Frac}(R))$. \square

L'anneau \mathcal{O}_ε construit vérifie évidemment les propriétés de la sous-section 1.2.1 : il est de valuation discrète, d'uniformisante p , complet pour cette valuation, de corps résiduel E . En particulier, ladite section fournit une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_\varepsilon)$ et $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_E = \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} H_{\mathbb{Q}_p}$. Pour passer aux représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$, il reste à transférer d'une certaine manière l'action de Γ .

Définition 1.2.48. La catégorie des (φ, Γ) -modules étales sur \mathcal{O}_ε est la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_\varepsilon)$. Autrement dit, c'est la catégorie des \mathcal{O}_ε -modules de type fini avec une action semi-linéaire de Γ et un endomorphisme φ -semi-linéaire dont le linéarisé est un isomorphisme, tels que l'action de Γ et le Frobenius commutent. Les morphismes sont les morphismes de \mathcal{O}_ε -modules qui sont Frobenius et Γ -équivalents.

Définition 1.2.49. Pour V un objet de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p}$, le module $\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ est muni d'une action tensorielle de $G_{\mathbb{Q}_p}$ qui se transporte en une action semi-linéaire de Γ sur $\mathbb{D}(V) = (\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon} V)^{H_{\mathbb{Q}_p} = G_E}$. Le foncteur \mathbb{D} se voit comme un foncteur depuis $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p}$ vers $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_\varepsilon)$.

De même, l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}}$ commutant au Frobenius, elle fournit une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ (et plus uniquement $H_{\mathbb{Q}_p}$) sur $\mathbb{V}(D)$ par produit tensoriel qui permet de voir \mathbb{V} comme un foncteur de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_\varepsilon)$ vers $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p}$.

Théorème 1.2.50. Les foncteurs \mathbb{D} et \mathbb{V} sont quasi-inverses, naturellement compatibles à la formation de produit tensoriel et de Hom.

Démonstration. L'isomorphisme de comparaison pour $\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon} \mathbb{D}(V) \rightarrow \mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ pour \mathbb{D} (resp. $\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}(D) \rightarrow \mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon} D$ pour \mathbb{V}) de la sous-section section 1.2.1 est en réalité $(G_{\mathbb{Q}_p}, \varphi)$ -équivalence qui prouve, en passant aux invariants par φ (resp. par $H_{\mathbb{Q}_p}$) que nos nouveaux \mathbb{D} et \mathbb{V} sont inverses l'un de l'autre.

De la même manière, les isomorphismes naturels

$$\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon} (\mathbb{D}(V_1) \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon} \mathbb{D}(V_2)) \cong \mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (V_1 \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2)$$

et

$$\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{D}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(V_1, V_2)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}}}(\mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_1, \mathcal{O}_{\varepsilon^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_2)$$

de la proposition 1.2.12 sont $G_{\mathbb{Q}_p}$ -équivalents et qui prouve la commutation naturelle à la formation de produit tensoriel et de Hom. \square

La question qui suit concerne les représentations qui ne soit plus à coefficients dans \mathbb{Z}_p mais dans \mathcal{O}_L pour une extension finie $L|\mathbb{Q}_p$. On note ϖ une uniformisante dans L .

Définition 1.2.51. L'anneau $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_\varepsilon$ est complet pour la topologie ϖ -adique. On le munit d'un Frobenius et d'une action de Γ en les définissant triviaux sur \mathcal{O}_L .

Théorème 1.2.52. Les catégories $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G_{\mathbb{Q}_p}$ et celle des (φ, Γ) -modules étales sur $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_\varepsilon$ sont équivalentes.

Démonstration. Une représentation de $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G_{\mathbb{Q}_p}$ peut se voir comme une représentation V de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p}$ munie d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_L \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_p}(V)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$: la représentation sous-jacente est donnée par l'oubli, l'image de $y \in \mathcal{O}_L$ correspond à la multiplication par y dans V qui est $G_{\mathbb{Q}_p}$ -équivalente puisque notre action initiale était \mathcal{O}_L -linéaire.

Un objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_\varepsilon)$ peut se voir comme un objet D de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_\varepsilon)$ muni d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_L \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}_\varepsilon}(D)^{\Gamma, \varphi = \text{Id}}$: l'objet sous-jacent est donné par l'oubli, l'image de $y \in \mathcal{O}_L$ est la multiplication par y dans D . Cette image est (φ, Γ) -équivalente puisque notre Frobenius et notre action initiale était semi-linéaire et que le Frobenius et l'action de Γ sur y sont triviaux.

Si V est une représentation de $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G_{\mathbb{Q}_p}$, le module $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ est muni d'une multiplication par les éléments de \mathcal{O}_L via celle sur V . Cette multiplication est $(G_{\mathbb{Q}_p}, \varphi)$ -équivariante : par exemple

$$\sigma(x \otimes yv) = \sigma(x) \otimes \sigma_V(yv) = \sigma(x) \otimes y\sigma(v) = y(\sigma(x \otimes v)).$$

Cette multiplication se restreint en une structure d'objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ sur $\mathbb{D}(V)$ grâce aux invariances.

Si D est un objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$, le module $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D$ est muni d'une multiplication par les éléments de \mathcal{O}_L via celle sur D . Cette multiplication est $(G_{\mathbb{Q}_p}, \varphi)$ -équivariante : par exemple

$$\varphi(x \otimes yd) = \varphi(x) \otimes \varphi_D(yd) = \varphi(x) \otimes y\varphi_D(d) = y(\varphi(x \otimes d)).$$

Cette multiplication se restreint en une structure d'objet de $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathbb{V}(D)$ grâce aux invariances.

Pour conclure à l'équivalence de catégories comme au théorème 1.2.50 en remarquant que tous les morphismes de comparaisons préservent la multiplication par des éléments de \mathcal{O}_L . \square

1.3 Application au corps de classes local pour \mathbb{Q}_p

Notre but est de démontrer la théorie du corps de classes locale sur \mathbb{Q}_p grâce à la correspondance de Fontaine entre représentations et (φ, Γ) -modules que l'on vient de démontrer. On suppose construite l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Q}_p(\mu_n)$ dont le groupe de Galois sur \mathbb{Q}_p est le complété profini de \mathbb{Q}_p^\times . Notre but est de prouver que $G_{\mathbb{Q}_p}^{\text{ab}}$ coïncide avec ce complété profini que l'on note $\widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$.

Lemme 1.3.1. *Pour démontrer le résultat, il suffit de prouver que pour toute extension finie $L|\mathbb{Q}_p$, les caractères de $G_{\mathbb{Q}_p}$ à valeurs dans \mathcal{O}_L^\times proviennent de caractères de son quotient $\widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$ à valeurs dans \mathcal{O}_L^\times .*

Démonstration. Les caractères de $G_{\mathbb{Q}_p}$ coïncident avec ceux de $G_{\mathbb{Q}_p}^{\text{ab}}$ puisque le but est abélien. De plus, si $G_{\mathbb{Q}_p}^{\text{ab}} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$ n'était pas injective, la séparation de la topologie de groupe profini assure qu'il existe un sous-groupe ouvert distingué U de $G_{\mathbb{Q}_p}^{\text{ab}}$ qui ne contienne pas le noyau de la flèche surjective précédente. Posons g qui est dans le noyau mais pas dans U . Alors, si l'on prend n le cardinal du quotient de $G_{\mathbb{Q}_p}^{\text{ab}}$ par U , il existe un caractère de ce quotient, à valeurs dans μ_n , non trivial sur g . Cela nous fournit un caractère de $G_{\mathbb{Q}_p}^{\text{ab}}$ vers $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p(\mu_n)}^\times$ qui ne peut pas se factoriser par $\widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$ (puisque le noyau de ladite surjection n'est pas contenu dans le noyau du caractère).

Remarque : on aurait pu se restreindre aux extensions L contenues dans l'extension cyclotomique. \square

Il s'agit maintenant de prouver la correspondance des caractères. On se fixe pour la suite L une extension finie de \mathbb{Q}_p . La correspondance de Fontaine établit une équivalence de catégories entre les caractères de $G_{\mathbb{Q}_p}$ à valeurs dans \mathcal{O}_L^\times (resp. κ_L^\times) et les (φ, Γ) -modules étales de rang 1 sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ (resp. $\kappa_{\mathcal{E}}$ son corps résiduel). On rappelle que le Frobenius est donné sur les deux anneaux par $\varphi(X) = (1 + X)^p - 1$ (i.e. $\varphi(X) = X^p$ en caractéristique p), trivial sur \mathcal{O}_L (resp. κ_L) et que l'action de $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times$ est donnée par $\sigma_\gamma(X) = (1 + X)^\gamma - 1$ et est triviale sur \mathcal{O}_L (resp. κ_L).

Théorème 1.3.2. *Soit D un (φ, Γ) -module de dimension 1 sur $\kappa_{\mathcal{E}}$. Il existe un vecteur $e \neq 0$ tel que $\varphi_D(e) \in \kappa_L^\times e$.*

Démonstration. Commençons avec une base quelconque e et pour fixer les notations on pose $\varphi_D(e) = x_p e$ avec $x_p = X^{i_p} \sum_{n \geq 0} x_{p,n} X^n \in \kappa_{\mathcal{E}}$ et pour tout n , on a $x_{p,n} \in \kappa_L$. Par égalité du module, on sait que $x_{p,0} \neq 0$. On pose de même x_γ, i_γ et $x_{\gamma,n}$ pour l'action de \mathbb{Z}_p^\times . La commutation du Frobenius et de l'action nous dit exactement que pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}_p^\times$, on a $x_p \varphi(x_\gamma) = x_\gamma \sigma_\gamma(x_p)$ soit

$$x_\gamma^{-1} \varphi(x_\gamma) = x_p^{-1} \sigma_\gamma(x_p).$$

Le terme de gauche vérifie

$$x_\gamma^{-1}\varphi(x_\gamma) \in X^{i_\gamma(p-1)}(1 + X\kappa_\mathcal{E}^+)$$

où $\kappa_\mathcal{E}^+ = \kappa_L[[X]]$ et le terme de droite vérifie

$$x_p^{-1}\sigma_\gamma(x_p) \in \gamma^{i_p}(1 + X\kappa_\mathcal{E}^+)$$

En particulier, en identifiant le terme de plus bas degré on en déduit que $\forall \gamma \in \mathbb{Z}_p^\times$, $\gamma^{i_p} = 1$ dans κ_L . Il en découle que $i_p = (p-1)j_p$. Posons $e' = X^{-j_p}e$. Alors

$$\varphi_D(e') = X^{-pj_p}\varphi_D(e) = X^{-i_p}x_p e'.$$

Quitte à changer de base, on suppose $i_p = 0$ donc que $\kappa_\mathcal{E}^+e$ est stable par φ .

Par complétion X -adique de $\kappa_\mathcal{E}^+$ et le fait que $\varphi(X\kappa_\mathcal{E}^+) \subset X^p\kappa_\mathcal{E}^+$, on en déduit que l'endomorphisme $\tau = \text{Id} - x_{p,0}^{-1}\varphi_D$ est inversible sur $X\kappa_\mathcal{E}^+e$. Puisque $\tau(e) \in X\kappa_\mathcal{E}^+e$, on trouve $f \in X\kappa_\mathcal{E}^+e$ tel que $\tau(e) = \tau(f)$. Cela se retraduit par $\varphi_D(e - f) = x_{p,0}(e - f)$. Par construction de f , l'élément $e - f$ est toujours non nul et on a bien $x_{p,0} \in \kappa_L$. \square

Cela va être la première pierre du résultat sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$.

Théorème 1.3.3. *Soit D un (φ, Γ) -module de dimension 1 sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Il existe un unique caractère $\chi : \widehat{\mathbb{Q}_p^\times} \rightarrow \mathcal{O}_L^\times$ tel que D est isomorphe au (φ, Γ) -module $\mathcal{O}_\mathcal{E}(\chi)$ donné par l'équivalence de Fontaine.*

Nous allons commencer par rapidement décrire $\mathcal{O}_\mathcal{E}(\chi)$.

Lemme 1.3.4. *Soit $\chi : \widehat{\mathbb{Q}_p^\times} \rightarrow \mathcal{O}_L^\times$ un caractère. Alors, le (φ, Γ) -module $D(\chi)$ donné par l'équivalence de Fontaine a un Frobenius donné par $\varphi_{D(\chi)}(x) = \chi(p)\varphi(x)$ et une action de Γ donnée par $\sigma_{\gamma, D(\chi)}(x) = \chi(\gamma)\sigma_\gamma(x)$.*

Démonstration. On peut décrire $D(\chi) = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L(\chi))^{H_{\mathbb{Q}_p}}$. De fait, l'action de Γ passe telle quelle puisqu'elle n'est pas modifiée par la prise des invariants (le groupe Γ est justement le quotient du Galois absolu par $H_{\mathbb{Q}_p}$, groupe de Galois absolu de l'extension \mathbb{Q}_p^∞). Pour ce qui est du Frobenius, une base de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ -espace vectoriel $D(\chi)$ vu dans l'objet avant prise des invariants, est donnée par $x \otimes 1$ invariant par $H_{\mathbb{Q}_p}$. Or, le Frobenius sur A s'identifie à l'action du Frobenius arithmétique dans $H_{\mathbb{Q}_p}$, qui après identification dans $\widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$ devient p^{-1} (traditionnellement l'application d'Artin envoie une uniformisante sur le Frobenius géométrique). Ainsi, la condition d'invariance se traduit par $\varphi(x) \otimes \chi(p^{-1}) = x \otimes 1$. Le Frobenius sur $D(\chi)$ provenant de celui sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$, on en déduit que le Frobenius agit comme annoncé. \square

Démonstraton du théorème 1.3.3. Unicité : c'est l'équivalence de catégories de Fontaine.

Existence : on va commencer par démontrer qu'il existe une base e de D telle que $\varphi_D(e) \in \mathcal{O}_L e$. Pour cela, on montre par récurrence qu'il existe une base e_n de D telle que $\varphi_D(e_n) = a_n e_n \pmod{\varpi^{n+1}D}$ avec $a_n \in \mathcal{O}_L$ et la condition de compatibilité $e_n = e_{n+1} \pmod{\varpi^{n+2}D}$.

Le cas $n = 0$ est simplement le théorème précédent appliqué au (φ, Γ) -module sur $\kappa_\mathcal{E}$ donné par $D \pmod{\varpi D}$.

Supposons e_n construit. On pose $u \in \mathcal{O}_\mathcal{E}$ tel que

$$\varphi_D(e_n) = a_n e_n (1 + u\varpi^{n+1}) \pmod{\varpi^{n+2}D}$$

et on cherche $z \in \mathcal{O}_\mathcal{E}$ tel que $e_{n+1} = e_n(1 + z\varpi^{n+1})$ convienne.

$$\begin{aligned} \varphi_D(e_{n+1}) &= \varphi(1 + z\varpi^{n+1})\varphi_D(e_n) \\ &= a_n e_n (1 + u\varpi^{n+1})(1 + \varphi(z)\varpi^{n+1}) \pmod{\varpi^{n+2}D} \\ &= a_n (1 + (u - z + \varphi(z))\varpi^{n+1})e_{n+1} \pmod{\varpi^{n+2}D} \end{aligned}$$

Le problème est donc de trouver z tel que $u - z + \varphi(z) \in \mathcal{O}_L + \varpi\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Autrement dit, il s'agit de prouver que $z \mapsto z - \varphi(z)$ de $\kappa_\mathcal{E}$ vers $\kappa_\mathcal{E}/\kappa_L$ atteint u . Puisque c'est un morphisme et qu'elle est surjective (inversible) de $X\kappa_\mathcal{E}^+$ vers lui-même, il suffit de prouver qu'elle atteint u dans $\kappa_\mathcal{E}/(\kappa_L, X\kappa_\mathcal{E}^+) = \kappa_\mathcal{E}/\kappa_\mathcal{E}^+$. Elle passe au quotient et il s'agit donc de regarder la même application de $\kappa_\mathcal{E}/\kappa_\mathcal{E}^+$ vers lui-même.

On va commencer par analyser un peu mieux les propriétés de u . Comme $\varphi_D(e_n) = a_n e_n \pmod{\varpi^{n+1}D}$, et que cette équation est encore vraie pour $\sigma_{\gamma,D}(e_n)$. Alors si $\sigma_{\gamma,D}(e_n) = b_\gamma e_n$, on sait que $\varphi(b_\gamma) = b_\gamma \pmod{\varpi^{n+1}}$ et l'on peut poser

$$\sigma_{\gamma,D} = b_\gamma(1 + u_\gamma \varpi^{n+1})e_n$$

où l'on voit $u_\gamma \in \kappa_{\mathcal{E}}$. La commutation du Frobenius à l'action de Γ nous dit exactement que pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}_p^\times$, en regardant le terme en ϖ^{n+1} et en divisant par $b_\gamma \alpha_n$, on a

$$(\sigma_\gamma - \text{Id})u = (\varphi - \text{Id})u_\gamma \quad (*2)$$

De même, on a pour tout $(\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}_p^\times$ l'identité

$$(\sigma_\delta - \text{Id})u_\gamma = (\sigma_\gamma - \text{Id})u_\delta \quad (*3)$$

On dira qu'un élément v possède la propriété Γ s'il existe une famille d'éléments $(u_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}_p^\times}$ vérifiant les équations *2 et *3.

On utilise alors le dictionnaire de l'analyse p -adique (voir [Col]). Il nous fournit un isomorphisme

$$\kappa_{\mathcal{E}}/\kappa_{\mathcal{E}}^+ \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \kappa_L), \quad v \mapsto (g_v : x \mapsto \text{Res}_0 \left((1+X)^x v \frac{dX}{1+X} \right))$$

qui transforme le Frobenius en

$$f \mapsto \mathbb{1}_{p\mathbb{Z}_p} \times f\left(\frac{\cdot}{p}\right)$$

et l'action de γ en

$$f \mapsto \gamma^{-1} f\left(\frac{\cdot}{\gamma}\right).$$

On dira qu'un g possède la propriété Γ s'il existe une famille de fonctions $(g_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}_p^\times}$ vérifiant l'équivalent des équations *2 et *3 en analyse p -adique avec g comme analogue de u et g_γ comme analogue de v_γ . Remarquons que la propriété Γ est moins forte que les deux équations conjuguées puisque ces dernières étaient des identités dans $\kappa_{\mathcal{E}}$ quand la propriété Γ se situe moralement dans $\kappa_{\mathcal{E}}/\kappa_{\mathcal{E}}^+$.

L'élément u donne une fonction g_u et on veut trouver f telle que $g_u = f - \varphi(f)$. Une analyse rapide montre que la seule candidate sur $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ est la fonction f définie sur $p^n \mathbb{Z}_p^\times$ par $f(p^n x) = g_u(p^n x) + \dots + g_u(px) + g_u(x)$, que l'on voudrait prolonger par continuité en zéro.

Commençons par améliorer nos hypothèses sur g_u pour démontrer la possibilité de prolongation. L'équation *2 pour $a \neq 1$ montre déjà que $g_u(0) = 0$. Écrivons ensuite $g_u = \sum_{k \geq 0} \varphi^k(g_{u,i})$ où les $g_{u,i}$ sont en nombre fini et à support dans \mathbb{Z}_p^\times , on en déduit qu'il suffit de prouver l'appartenance à l'image de $\sum g_{u,i}$ à l'image de $\varphi - \text{Id}$ (car l'image de $\varphi^k - \text{Id}$ est contenue dans celle de $\varphi - \text{Id}$). Montrons que cette réduction conserve la propriété Γ . Tout élément qui s'écrit $v = w - \varphi(w)$ possède la propriété Γ : poser $v_\gamma = w - \sigma_\gamma(w)$. De plus, si v et v' possède la propriété Γ , la famille $(v_\gamma + v'_\gamma)$ montre que $v + v'$ possède la propriété Γ . Notre réduction permet donc de supposer simultanément que u vérifie la propriété Γ et que g_u est à support dans \mathbb{Z}_p^\times . L'équation *2 transposée en analyse p -adique nous affirme que chaque $(\varphi - \text{Id})g_{v_\gamma}$ est à support dans \mathbb{Z}_p^\times puisque c'est le cas de g_u . Cela se traduit par $g_{v_\gamma}(p^n x) = g_{v_\gamma}(x)$ et la continuité de g_{v_γ} en 0 impose que g_{v_γ} est constante. Disons que $g_{v_\gamma} \equiv \iota_\gamma$. L'équation *3 en analyse p -adique se simplifie alors en $(\gamma^{-1} - 1)\iota_\delta = (\delta^{-1} - 1)\iota_\gamma$, d'où l'existence d'un λ tel que $\iota_\gamma = \lambda(\gamma^{-1} - 1)$. Puisque le dictionnaire de l'analyse p -adique envoie la fonction constante égale à 1 sur $1/x$, on en déduit que $v_\gamma = (\sigma_\gamma - \text{Id})\frac{\lambda}{X} \pmod{\kappa_{\mathcal{E}}^+}$. En enlevant à u l'élément $(\varphi - \text{Id})\frac{\lambda}{X}$ on peut alors se ramener au cas où les v_γ sont nuls modulo $\kappa_{\mathcal{E}}^+$.

Dans le cas extrême où nous nous sommes ramenés, l'équation *2 en analyse p -adique indique que $\sigma_\gamma(g_u) = g_u$ pour tout a . En évaluant cette identité en 1 on en déduit que

$$g_u(x) = \mu x^{-1}$$

pour un certain μ . De plus, si $x = -i \pmod p$ avec $1 \leq i \leq p-1$,

$$\begin{aligned} \text{Res}_0 \left((1+T)^x \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(1+X)^j}{jX^p} \frac{dX}{1+X} \right) &= \text{Res}_0 \left(\left(\sum_{j=1}^{i-1} (1+X)^{j-i+p} \varphi \left(\frac{(1+X)^{(x+j-i+p)/p}}{jX} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=i+1}^{p-1} (1+X)^{j-i} \varphi \left(\frac{(1+X)^{(x+j-i)/p}}{jX} \right) + \varphi \left(\frac{(1+X)^{(x-i)/p}}{iX} \right) \right) \frac{dX}{1+X} \right) \\ &= \text{Res}_0 \left(\frac{(1+X)^{(x+i)/p}}{iX} \frac{dX}{1+X} \right) \\ &= i^{-1} \\ &= x^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $u = \mu \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(1+X)^j}{jX} \pmod{\kappa_{\mathcal{E}}^+}$. Comme $v_\gamma \in \kappa_{\mathcal{E}}^+$, alors $(\sigma_\gamma - \text{Id})u = (\varphi - \text{Id})v_\gamma \in X\kappa_{\mathcal{E}}^+$. Un calcul à partir de l'expression précédente de u donne

$$(\sigma_a - \text{Id})u = -\mu \pmod{X\kappa_{\mathcal{E}}^+},$$

d'où le fait que $\mu = 0$. Après toutes les réductions, on peut donc supposer que $u \in \kappa_{\mathcal{E}}^+$, cas que l'on a déjà traité.

La dernière équation du calcul de $\varphi_D(e_{n+1})$ prouve en particulier que $a_n = a_{n+1} \pmod{\varpi^{n+1}\mathcal{O}_L}$. De fait, par complétude p -adique de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et \mathcal{O}_L et par continuité du Frobenius, on trouve $e = \lim e_n$ base de D et $a = \lim a_n \in \mathcal{O}_L$ tels que l'on a $\varphi_D(e) = ae$.

On peut donc supposer que $\varphi_D(e) = ae$ avec $a \in \mathcal{O}_L^\times$. Enfin, si $e' = ye$ vérifie $\varphi_D(e') = ae'$ alors $\varphi(y) = y$ et donc $y \in \mathcal{O}_L$. En appliquant ce résultat à tous les $\sigma_{\gamma,D}(e)$ qui vérifient la condition par commutation de l'action de Γ et du Frobenius, on trouve une famille $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ d'éléments de \mathcal{O}_L telle que $\sigma_{\gamma,D}(e) = x_\gamma e$. Comme Γ agit semi-linéairement, la famille (x_γ) est un cocycle. Enfin, puisqu'elle est à valeurs dans \mathcal{O}_L sur lequel l'action de Γ est triviale, elle définit un caractère de Γ .

Le caractère $\chi : \widehat{\mathbb{Q}_p^\times} \rightarrow \kappa_L^\times$ définit par $\chi(\gamma) = x_\gamma$ et $\chi(p) = a^{-1}$ donne un module $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ isomorphe à D . \square

1.4 Calcul de cohomologie par le complexe de Herr

La théorie de (φ, Γ) -modules fournit une autre manière de calculer la cohomologie galoisienne. Pour plus de simplicité, on exclut le cas $p = 2$.

Définition 1.4.1. Soit D dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$. Le complexe $\Phi\Gamma^\bullet(D)$ est le complexe

$$0 \rightarrow D \xrightarrow{(\varphi - \text{Id}, \gamma - \text{Id})} D \oplus D \xrightarrow{(\gamma - \text{Id}) \oplus (\varphi - \text{Id})} D \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

où γ est un générateur topologique de Γ (c'est pour cette raison que l'on a exclu le cas $p = 2$).

Théorème 1.4.2 (Théorème 2.1 dans [Her98]). *Soit V une représentation de $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p} G_{\mathbb{Q}_p}$. Alors, les cohomologies $H^\bullet(G_{\mathbb{Q}_p}, V)$ et $h^\bullet(\Phi\Gamma^\bullet(\mathbb{D}(V)))$ sont isomorphes*

Ce théorème fournit en particulier l'annulation des $H^i(G_{\mathbb{Q}_p}, V)$ pour $i \geq 3$. Nous prouverons ce théorème dans un cadre plus général dans la section 2.4.

1.5 D'une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à un (φ, Γ) -module

Le but de cette section est de construire un (φ, Γ) -module étale à partir d'une certaine classe de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, en suivant la stratégie adoptée par Pierre Colmez dans [Col10]. Dans cette section, seront fixés L une extension finie de \mathbb{Q}_p , son anneau d'entiers \mathcal{O}_L et une uniformisante ϖ . On note $\mathcal{O}_\varepsilon^+ = \mathcal{O}_L[[X]]$. L'anneau de Fontaine obtenu en localisant en X puis en complétant ϖ -adiquement est noté \mathcal{O}_ε . Il est possible de le décrire plus explicitement que dans la première section :

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n \mid (a_n) \in \mathcal{O}_L^{\mathbb{Z}}, a_n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \right\}.$$

Posons quelques notations à l'intérieur de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Définition 1.5.1. On note $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Son centre, formé des matrices scalaires, est noté Z . Le sous-groupe mirabolique formé des matrices dans $\begin{pmatrix} \mathbb{Q}_p^\times & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est noté Q et de manière analogue le sous-groupe $Q(\mathbb{Z}_p) = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le sous-monoïde $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est noté Q^+ . On pose K_n le sous-groupe des matrices congrues à l'identité modulo $p^n \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ qui forme une base de voisinages de l'identité dans G pour n variant parmi les entiers naturels.

Le sous-groupe K_0 sera souvent appelé K pour plus de facilité.

Définition 1.5.2. Une \mathcal{O}_L -représentation de G est un \mathcal{O}_L -module Π muni d'une action linéaire de G .

On dit qu'elle a un caractère central si le centre Z agit comme un caractère de \mathbb{Q}_p^\times .

On dit qu'elle est lisse si le stabilisateur de tout élément est ouvert.

On dit qu'elle est admissible si pour tout entier n , l'espace des invariants Π^{K_n} est de type fini comme \mathcal{O}_L -module.

On note $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$ la sous-catégorie pleine des représentations dont les objets sont les représentations admissibles, lisses, qui ont un caractère central et qui ont une longueur finie dans la catégorie des \mathcal{O}_L -représentations de G .

1.5.1 Présentation standard

Proposition 1.5.3. Soit Π un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, alors il existe W un sous- $\mathcal{O}_L[KZ]$ -module de Π , de type fini comme \mathcal{O}_L -module et engendrant Π comme $\mathcal{O}_L[G]$ -module. On appelle un tel module une présentation de Π .

Démonstration. La suite des $\mathrm{Vect}_{\mathcal{O}_L[G]} \Pi^{K_n}$ forme une suite croissante de sous-objets de Π . La longueur de Π étant finie, la suite se stabilise. Or, puisque le stabilisateur de tout vecteur est ouvert, l'union croissante de ces sous-objets vaut Π entière. L'un des termes vaut donc Π . Ajoutons que Π^{K_n} est de type fini sur \mathcal{O}_L par hypothèse d'admissibilité et que K_n est d'indice fini dans K . On en conclut que

$$W = \sum_{\bar{g} \in K/K_n} g \cdot \Pi^{K_n}$$

vérifie toutes les conditions requises (on utilise le caractère central pour évincer Z de nos problèmes). \square

Remarque 1.5.4. Si Π est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, les sous-modules $\varpi^n \Pi$ sont des sous-représentations. Comme il ne peut exister de chaînes croissantes de taille arbitraire, il existe en particulier un n tel que $\varpi^{n+1} \Pi = \varpi^n \Pi$. Passons aux invariants par K_m en choisissant m comme dans la proposition qui précède tel que Π^{K_m} est de type fini sur \mathcal{O}_L et qu'il engendre Π comme $\mathcal{O}_L[G]$ -module. Ainsi, $\varpi^{n+1} \Pi^{K_m} = \varpi^n \Pi^{K_m}$. Nakayama nous permet de conclure que $\varpi^n \Pi^{K_m} = \{0\}$ et donc que Π est de ϖ^n -torsion.

Les translatés de W sont paramétrés par G/KZ . On va utiliser, au moins pour se donner une intuition, la vision de G/KZ comme les classes de réseau de \mathbb{Q}_p^2 à homothétie près. En effet, les lignes d'un élément de G forment une base (e_1, e_2) de L^2 et on peut lui associer le réseau $\Lambda = e_1 \mathbb{Z}_p \oplus e_2 \mathbb{Z}_p$. La multiplication par un élément de K revient à changer la base du réseau en une autre d'où une bijection entre G/K et l'ensemble des réseaux. En quotientant alors par Z , on obtient les réseaux à homothétie près.

Définition 1.5.5. Prenons Λ et Λ' deux réseaux. Il existe $N \geq 0$ tel que $p^N \Lambda \subseteq \Lambda'$. Alors, le théorème de la base adaptée affirme que l'on peut trouver une base (e_1, e_2) de Λ' et des entiers $n \geq m \geq 0$ uniques tels que $(p^n e_1, p^m e_2)$ soit une base de $p^N \Lambda$. On définit la distance $d(\Lambda, \Lambda')$ comme la différence $n - m$. Elle est invariante par homothétie d'un des deux réseaux et définit donc une fonction sur $(G/KZ)^2$.

C'est une distance : pour la symétrie, si (N, n, m, e_1, e_2) exhibe la distance de Λ à Λ' selon la construction précédente, alors $(n - N, n - m, 1, p^{m-N} e_2, p^{n-N} e_1)$ exhibe la distance de Λ' à Λ . L'inégalité triangulaire est démontrée en annexe au corollaire C.1.1.

Cela nous fournit donc un arbre en reliant les éléments de G/KZ à distance 1 que l'on appelle \mathcal{T} .

Définition 1.5.6. On note $W^{[n]} = \sum_{\bar{g} \in G/KZ, d(\bar{g}, \bar{1}) \leq n} g \cdot W$.

Remarque 1.5.7. Comme toutes les distances sont finies dans \mathcal{T} , si W est construit comme à la proposition 1.5.3, l'union des $W^{[n]}$ vaut Π . En particulier si W' est un $\mathcal{O}_L[KZ]$ -module de type fini, alors $W' \subset W^{[n]}$ pour un certain entier n .

Attention cependant, la suite des $W^{[n]}$ ne stationne pas en général.

Le problème d'un W arbitraire construit à la proposition 1.5.3 demeure que le noyau de la surjection

$$p_W : \bigoplus_{\bar{g} \in G/KZ} (g, W) \rightarrow \Pi, (g, v) \mapsto g \cdot v$$

n'est en général pas agréable. On aimerait que les relations soient données par les arêtes de l'arbre \mathcal{T} .

Définition 1.5.8. Une présentation standard de Π est un sous-module W vérifiant les conditions de la proposition 1.5.3 tel que le noyau de p_W soit engendré comme $\mathcal{O}_L[G]$ -module par

$$R^{(0)}(W, \Pi) = \left\{ v = (\text{Id}, x) - \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y \right) \mid p_W(v) = 0 \right\}$$

En termes plus concis mais moins précis, il est engendré comme $\mathcal{O}_L[G]$ -module par les relations sur les arêtes de l'arbre \mathcal{T} .

Proposition 1.5.9 ([Col10], théorème III.3.1). *Tout objet de $\text{Rep}_{\text{tors}} G$ admet une présentation standard.*

Proposition 1.5.10 ([Col10], proposition III.1.16 et remarque III.1.17,). *Soit $0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_2 \rightarrow 0$ une suite exacte dans $\text{Rep}_{\text{tors}} G$. On peut alors choisir des présentations standards des trois représentations telles que $0 \rightarrow W_1 \rightarrow W \rightarrow W_2 \rightarrow 0$ soit exacte, ainsi que la suite induite au niveau des noyaux de p_{W_1}, p_W et p_{W_2} .*

Proposition 1.5.11 ([Col10], lemme III.1.14). *Si W est une présentation standard, alors $W^{[1]}$ également.*

1.5.2 Première construction d'un Γ -module

Commençons par trouver de bons sous-espaces de Π à partir desquels obtenir des (φ, Γ) -modules.

Définition 1.5.12. Soit W une présentation standard de Π et U un ouvert de \mathbb{Q}_p , qui sera la plupart du temps un ouvert de \mathbb{Z}_p , voire \mathbb{Z}_p lui-même. On appelle $I_U^\Pi(W)$ l'espace engendré par les $g \cdot W$ où $g = \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Q$ vérifie que $a + p^n \mathbb{Z}_p \subset U$.

En particulier pour $U = \mathbb{Z}_p$, cela correspond à $n \geq 0$ et à $a \in \mathbb{Z}_p$. Dans ce cas précis, on appellera le dual de ce sous-espace $D_W^\dagger(\Pi)$. On note également $G_0 = \{ \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_p, n \geq 0 \}$ qui vérifie que

$$D_W^\dagger(\Pi) = \left(\sum_{g \in G_0} g \cdot W \right)^\vee.$$

Remarque 1.5.13. Rappelons dans le cadre des modules M de torsion que le dual de Pontryagin est défini comme $M^\vee = \text{Hom}_{\mathcal{O}_L}(M, {}^L/\mathcal{O}_L)$. Puisque \mathcal{O}_L est principal (de valuation discrète même) et que ${}^L/\mathcal{O}_L$ est infiniment divisible, ce dernier module est injectif dans la catégorie des \mathcal{O}_L -modules. Le dual de Pontryagin est donc exact.

Remarque 1.5.14. Toute classe dans G/KZ contient un élément de la forme $\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un entier relatif n et un $a \in \mathbb{Q}_p$. Démontrons-le : si on prend $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans G . Quitte à remplacer M par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, elle vérifie que $-c/d \in \mathbb{Z}_p$. Dans ce cas,

$$M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{cb}{d} & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

a un coefficient nul en bas à gauche. À partir de là, on multiplie par $p^{-v_p(d)}\text{Id}$ pour se ramener au cas d'une matrice avec $d \in \mathbb{Z}_p^\times$. Enfin, quitte à multiplier par $\begin{pmatrix} \frac{p^{v_p(a)}}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$ à droite, qui est une matrice à coefficients inversibles dans \mathbb{Z}_p , donc une matrice dans K , on trouve une matrice de la forme souhaitée.

Ainsi, on peut penser à $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ comme l'espace engendré par les translatés de W par le demi-arbre commençant en l'identité.

Remarque 1.5.15. On peut également remarquer que la condition $a + p^n\mathbb{Z}_p \subset U$ sur $g = \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, peut se voir comme une condition dépendant uniquement de la classe de g : en effet $\begin{pmatrix} p^n & a+p^n\mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est exactement l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} p^m & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la classe de g .

Prouvons-le. Prenons $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ dans K et $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$ tel que

$$\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\lambda & \beta\lambda \\ \gamma\lambda & \delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^m & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En regardant le coefficient en bas à gauche, on trouve $\gamma = 0$ ce qui nous dit en particulier que $\alpha, \delta \in \mathbb{Z}_p^\times$. En regardant le coefficient en bas à gauche, on trouve $\delta\lambda = 1$ donc $\lambda = \delta^{-1}$. L'égalité se reformule alors

$$\begin{pmatrix} p^n\alpha\delta^{-1} & p^n\beta\delta^{-1} + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^m & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\alpha\delta^{-1}$ qui est un inversible de \mathbb{Z}_p vaut 1 et puisque $\beta\delta^{-1}$ parcourt \mathbb{Z}_p , on trouve exactement les matrices indiquées.

La structure de $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -module sur $D_W^{\natural}(\Pi)$ est donnée comme suit : l'ensemble de matrices G_0 est stable par multiplication à gauche par le sous-groupe $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cela définit donc une action de ce sous-groupe sur $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ et donc sur $D_W^{\natural}(\Pi)$ par dualité.

Mieux : comme l'action sur $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ est lisse, on peut également la voir comme une structure de $\mathcal{O}_L[\![\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]\!]$ -module, que l'on transmet à son dual par $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda = \lambda(\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$. Par la proposition B.1.5, cette algèbre d'Iwasawa est isomorphe à $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ et on obtient donc une structure de $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -module sur $D_W^{\natural}(\Pi)$ qui fait agir $(1 + X)$ via l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur ce dual.

Proposition 1.5.16. L'inclusion de deux présentations standards $W_1 \subseteq W_2$ induit un isomorphisme

$$p_{W_1, W_2} : \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_{W_2}^{\natural}(\Pi) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_{W_1}^{\natural}(\Pi).$$

En particulier avec la remarque 1.5.7 et la proposition 1.5.11, la catégorie $\text{PrStand}(\Pi)^{\text{op}}$ des présentations standards forme une catégorie filtrante lorsque les morphismes sont des inclusions. Cela permet de définir comme la limite projective indexée par une catégorie cofiltrante

$$\mathbf{D}(\Pi) = \varprojlim_{W \in \text{PrStand}(\Pi)^{\text{op}}} \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_W^{\natural}(\Pi)$$

indépendamment du choix de la présentation standard.

Lemme 1.5.17. Soient \bar{h} une classe de G/KZ et $\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ un élément dans cette classe. Posons $k = \min\{l \geq 0 \mid a + p^n\mathbb{Z}_p \subseteq p^{n-l}\mathbb{Z}_p\}$. Alors, la distance de \bar{h} à $\overline{\text{Id}}$ est exactement $k + |n - k|$.

Démonstration. On choisit $a \in p^{n-k}\mathbb{Z}_p^\times$.

Si $n - k \geq 0$, alors quitte à multiplier par une matrice unipotente de K à droite, on peut se ramener à $\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la distance est n (dans ce cas automatiquement $n \geq 0$).

Sinon, on multiplie à droite par $p^{k-n}\text{Id}$ on tombe sur la matrice $\begin{pmatrix} p^k & b \\ 0 & p^{k-n} \end{pmatrix}$ avec $b = ap^{k-n} \in \mathbb{Z}_p^\times$. On multiplie ensuite à droite par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on tombe sur $\begin{pmatrix} b & p^k \\ p^{k-n} & 0 \end{pmatrix}$. On multiplie à droite par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -p^k \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$ de

K pour obtenir la matrice $h' = \begin{pmatrix} b & 0 \\ p^{k-n} & -p^{2k-n} \end{pmatrix}$ dans la classe \bar{h} . Enfin, multiplier à gauche par la matrice $\begin{pmatrix} b^{-1} & p^{k-n} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de K permet d'exhiber que la base adaptée pour la matrice h' donnent comme facteurs invariants 1 et p^{2k-n} : la distance de \bar{h} à $\bar{1d}$ est bien $2k - n$. \square

Corollaire 1.5.18. *Les matrices suivantes parcourent toutes les classes à distance au plus 1 de l'identité :*

$$\begin{pmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. D'après ce qui précède, soit $k = 0$ et $|n - k| = 0$ ce qui donne l'identité. Deux cas restent : $k = 1$ et $|n - k| = 0$ ce qui donne les premières matrices pour $i \neq 0$. Ensuite, il y a $k = 0$ et $|n - k| = 1$ ce qui donne selon le signe de $|n - k|$ les deux dernières matrices. \square

Démonstration de la proposition 1.5.16. On commence par prouver que $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_1) \subset I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_2)$ a un conoyau de type fini sur \mathcal{O}_L . Pour ce faire, on sait que $W_2 \subset W_1^{[n]}$ pour un certain n . Commençons par traiter le cas où $W_2 = W_1^{[1]}$. Dans ce cas $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_2) \subset I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_1) + \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot W_1$. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_2) &\subset I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_1^{[1]}) \\ &= \sum_{g \in G_0} \sum_{\bar{h}, d(\bar{h}, \bar{1d}) \leq 1} gh \cdot W_1 \end{aligned}$$

grâce au corollaire on peut choisir pour \bar{h} les représentants précédents et on voit que seul $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans G_0 (qui est un monoïde). Ainsi, les seuls termes de la somme qui ne sont pas contenus dans $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_1)$ sont ceux pour $h = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mieux parmi les classes dans de l'image de G_0 dans G/KZ , seule la classe de l'identité n'est pas envoyé par multiplication à droite par ce h dans les G_0 : toutes les matrices $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans la classe de l'identité et les autres matrices sont de la forme $\begin{pmatrix} p \times p^m & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $m \geq 0$ et $a \in \mathbb{Z}_p$. Le conoyau de $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_1) \subset I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_2)$ est donc un quotient de $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot W_1$ qui est de type fini sur \mathcal{O}_L .

Concluons par récurrence. Supposons qu'on l'a démontré si $W'_2 \subset W'_1^{[n]}$ et prenons $W_1 \subset W_2 \subset W_1^{[n+1]}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $W'_1 = W_1$ et $W'_2 = W_1^{[1]}$ (qui est encore une présentation standard d'après la proposition 1.5.11), on en conclut que $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_1) \subset I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_1^{[n+1]})$ est de conoyau fini, a fortiori $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_1) \subset I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_2)$ puisque $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_1) \subset I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_2) \subset I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_1^{[n+1]})$.

Soit μ dans le noyau de la surjection qui en découle $D_{W_2}^{\natural}(\Pi) \rightarrow D_{W_1}^{\natural}(\Pi)$. Soit (v_j) qui engendrent le conoyau précédent. Par lissité, il existe n tel que $\begin{pmatrix} 1 & -p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_j = v_j$ pour tout j . En particulier, on en déduit que $\left[\begin{pmatrix} 1 & -p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Id} \right] \cdot I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_2) \subseteq I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_1)$ d'où

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Id} \right] \cdot \mu = 0.$$

En particulier dans la structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ -module cela se traduit par $((1 + X)^{p^n} - 1)\mu = 0$ et donc après le produit tensoriel $\mu = 0$ car $(1 + X)^{p^n} - 1$ est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Le noyau de p_{W_1, W_2} est trivial. \square

Remarque 1.5.19. On pourrait jusqu'ici se contenter de considérer des présentations, auquel cas il est limpide que $W_1^{[1]}$ est encore une présentation et on peut s'épargner la référence à la proposition 1.5.11

On pourrait directement obtenir une action semi-linéaire de Γ sur $\mathbf{D}(\Pi)$ via $D_W^{\natural}(\Pi)$ ainsi qu'une ψ -action mais on garde cela pour plus tard. Nous allons à présent définir directement une structure de (φ, Γ) -module sur $\mathbf{D}(\Pi)$ en le construisant autrement.

1.5.3 Structure de (φ, Γ) -module

Pour récupérer un Frobenius comme l'action de $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il nous faut faire une construction "complémentaire" de $\mathbf{D}(\Pi)$.

Définition 1.5.20. Soit W une présentation standard de Π . Pour tout ouvert U de \mathbb{Q}_p , on appelle $I_U^\Pi(W)_0^\vee$ l'ensemble des éléments de Π^\vee qui s'annulent sur $g \cdot W$ où $g = \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Q$ vérifie que $a + p^n \mathbb{Z}_p \notin U$.

Dans le cas de $U = \mathbb{Z}_p$, on note ce module $D_W^+(\Pi)$. On note $G_1 = \{ \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a + p^n \mathbb{Z}_p \notin \mathbb{Z}_p \}$ de sorte que

$$D_W^+(\Pi) = \text{Ker} \left(\Pi^\vee \rightarrow \left(\sum_{g \in G_1} g \cdot W \right)^\vee \right)$$

auquel on peut penser comme les formes linéaires qui s'annulent sur le complémentaire du demi-arbre engendré depuis l'identité.

Comme pour la première construction, on récupère une structure de $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -module de torsion sur Π qui se transfère en une structure de $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -module sur le dual. De même, l'action de $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur Π fournit un endomorphisme de \mathcal{O}_L -modules de Π^\vee . L'ensemble G_1 étant stable par multiplication à gauche par $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et par $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, le module $D_W^+(\Pi)$ est un sous- $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -module de Π^\vee , stable par $\varphi_W = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^\vee$.

La formule de commutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se traduit sur le $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -module Π par la formule, pour tout $v \in \Pi$

$$(1 + X) \left[\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \right] = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[(1 + X)^p v \right].$$

Puisque les $(1 + X)$ engendrent topologiquement la \mathcal{O}_L -algèbre $\mathcal{O}_\varepsilon^+$, que le $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ module Π est de torsion et que φ est un endomorphisme continu de $\mathcal{O}_\varepsilon^+$, on en déduit pour tout $x \in \mathcal{O}_\varepsilon^+$ la formule

$$x \left[\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \right] = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\varphi(x)v \right]$$

qui se traduit sur le dual par

$$\begin{aligned} \varphi_W(x\lambda) &= \varphi_W(x^{-1}\cdot) \\ &= \lambda \left(x^{-1} \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \right) \\ &= \lambda \left(\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi(x^{-1}) \cdot \right) \\ &= \lambda \left(\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi(x)^{-1} \cdot \right) \\ &= \varphi(x) \lambda \left(\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \right) \\ &= \varphi(x) \varphi_W(\lambda) \end{aligned}$$

ou en termes plus concis φ_W est φ -semi-linéaire pour la structure de $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -module.

Remarque 1.5.21. Cette construction est cohérente avec la construction du dual dans les (φ, Γ) -modules étales univariés. En effet, si D est un (φ, Γ) -module étale, le Frobenius sur son dual peut-être défini en utilisant le dual d'un inverse à gauche particulier ψ_D de φ_D . Pour définir une action semi-linéaire de $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur le dual, cela nous guide vers l'action de $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur Π .

Proposition 1.5.22. Le morphisme $R_{\mathbb{Z}_p, W} : \Pi^\vee \rightarrow D_W^+(\Pi)$ provenant de l'injection $I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W) \hookrightarrow \Pi$ devient un morphisme de $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -modules injectif si on le restreint à $D_W^+(\Pi)$.

Cette restriction devient un isomorphisme après tensorisation par \mathcal{O}_ε .

Démonstration. Pour vérifier que c est un morphisme de $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -modules, il suffit de vérifier que $R_{\mathbb{Z}_p, W}$ est équivariante sous l'action de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est évident puisqu'il s'agit de l'action duale des deux côtés.

Pour l'injectivité après restriction, si un élément μ de $D_W^+(\Pi)$ appartient au noyau, il s'annule sur les $g \cdot W$ pour $g \in G_0$. Comme il appartient à $D_W^+(\Pi)$, il s'annule aussi sur les $g \cdot W$ pour $g \in G_1$. Comme toute classe de G/KZ contient un élément de G_0 ou de G_1 , il s'annule sur $G \cdot W = \Pi$.

Montrons l'isomorphisme après tensorisation. Le morphisme $\mathcal{O}_\varepsilon^+ \rightarrow \mathcal{O}_\varepsilon$ est la composée d'une localisation et d'une complétion : il est donc plat et l'injectivité que l'on vient de prouver se transmet après tensorisation. Pour montrer la surjectivité, nous commençons par montrer que le conoyau est fini avant tensorisation. Pour ce faire, on remarque que la propriété 1.5.29 nous dit qu'un élément de $D_W^h(\Pi)$ qui est nul sur W se prolonge en un élément de $D_W^+(\Pi)$. De fait, le conoyau est isomorphe à un quotient de W^\vee qui est de longueur finie sur \mathcal{O}_L car W est de longueur finie. Comme dans la démonstration de la proposition 1.5.16, on en déduit qu'il existe un entier n avec $((1+X)^{p^n} - 1) \cdot W = 0$. En particulier si $\mu \in D_W^h(\Pi)$, la forme linéaire $((1+X)^{p^n} - 1)\mu$ s'annule sur W et provient donc d'un élément de $D_W^+(\Pi)$. L'élément $(1+X)^{p^n} - 1$ étant inversible dans \mathcal{O}_ε , on obtient la surjectivité. \square

Corollaire 1.5.23. *Il existe un isomorphisme de \mathcal{O}_ε -modules*

$$\varprojlim_{W \in \text{PrStand}(\Pi)^{\text{op}}} \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_W^+(\Pi) \cong \mathbf{D}(\Pi)$$

où les flèches de la limite projective à gauche sont induites par les inclusions $D_{W_2}^+(\Pi) \subset D_{W_1}^+(\Pi)$ pour $W_1 \subset W_2$.

Démonstration. Remarquons que si $W_1 \subset W_2$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_{W_1}^+(\Pi) & \xrightarrow{R_{\mathbb{Z}_p, W_1}} & \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_{W_2}^h(\Pi) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_{W_2}^+(\Pi) & \xrightarrow{R_{\mathbb{Z}_p, W_2}} & \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_{W_2}^h(\Pi) \end{array}$$

C'est limpide avant tensorisation, et de plus, tous les morphismes considérés sont des morphismes de $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -modules d'où la commutation. En particulier les limites projectives définissant $\mathbf{D}(\Pi)$ et $\varprojlim_W \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_W^+(\Pi)$ sont obtenues à partir de foncteurs contravariants depuis la catégorie opposée de la catégorie des présentations standards, vers la catégorie des \mathcal{O}_ε -modules. \square

Corollaire 1.5.24. *Le morphisme $\mathbf{D}(\Pi) \rightarrow \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_W^+(\Pi)$ induit par l'isomorphisme du corollaire 1.5.23 est un isomorphisme de \mathcal{O}_ε -modules. Par transfert de structure munit $\mathbf{D}(\Pi)$ d'un Frobenius φ -semi-linéaire qui ne dépend pas du choix de W .*

Démonstration. Pour l'isomorphisme, combiner la proposition 1.5.22 et la proposition 1.5.16.

Pour la non-dépendance en W , commençons par se souvenir que les présentations standard W forment une catégorie filtrante ([Col10, Corollaire III.1.15]) et qu'il suffit de vérifier la coïncidence lorsque $W_1 \subset W_2$. Dans ce cas, d'après le diagramme commutatif du corollaire précédent, il nous suffit que l'inclusion

$$\mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_{W_2}^+(\Pi) \hookrightarrow \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_{W_1}^+(\Pi)$$

soit invariante par le Frobenius. L'inclusion $D_{W_2}^+(\Pi) \subseteq D_{W_1}^+(\Pi)$ dans Π^\vee est une inclusion de sous- $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -modules stables par $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^\vee$: elle est invariante par le Frobenius. C'est encore le cas après tensorisation. \square

Définition 1.5.25. Puisque la multiplication à gauche par un élément de $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ laisse stable les classes d'éléments de G_1 , l'action duale sur Π^\vee se restreint en une action de $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $D_W^+(\Pi)$. On la voit comme une action de $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times$ via l'isomorphisme canonique.

Proposition 1.5.26. *L'action de Γ transférée de $\mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon^+} D_W^+(\Pi)$ à $\mathbf{D}(\Pi)$ ne dépend pas du choix de W . Elle munit d'une structure de (φ, Γ) -module.*

Démonstration. En imitant en tous points la preuve de la proposition 1.5.24, on montre que l'action de Γ transférée sur $\mathbf{D}(\Pi)$ ne dépend pas de W . Il ne reste seulement à démontrer la semi-linéarité de l'action de Γ sur le $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ -module $D_W^+(\Pi)$ à montrer ainsi que sa commutation au Frobenius.

Pour la semi-linéarité, l'action d'une matrice t de $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur le dual est justement définie par $(t^{-1})^\vee$. Pour $x \in \mathbb{Z}_p$ et $\gamma \in \mathbb{Z}_p^\times$, on a la formule matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exactement de la même manière que pour le Frobenius, on en déduit que l'action sur Π^\vee est semi-linéaire par rapport à l'action de Γ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Il nous manque simplement la commutation au Frobenius, qui provient, exactement par la stratégie ci-dessus, de la commutativité

$$\begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Remarque 1.5.27. À cet instant de la construction, il est difficile de saisir l'intérêt de notre première construction via $D_W^+(\Pi)$. Même si d'autres motivations viendront ultérieurement, on peut déjà pointer que c'est une manière de prouver l'indépendance de la construction vis-à-vis de W qui est économe en termes d'arguments utilisant les présentations standards.

Il nous reste tout de même à étudier plus en détail les propriétés du Frobenius, et la finitude de $\mathbf{D}(\Pi)$.

1.5.4 Structure de (φ, Γ) -module étale

Étape suivante de notre construction, il faut montrer que le module construit est étale. Pour cette étape, c'est la vision par $D_W^+(\Pi)$ qui va nous servir.

Nous allons avoir besoin ici de deux propositions techniques utilisant une analyse des sous-arbres de \mathcal{T} que nous avons éludée. Nous nous contentons de les énoncer dans un cadre restreint :

Proposition 1.5.28. *Soit W une présentation standard. Soit U, V deux ouverts de \mathbb{Q}_p tels que les ensembles $\mathcal{T}_U = \{(\overline{\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}) \mid a + p^n \mathbb{Z}_p \subseteq U\}$ et $\mathcal{T}_V = \{(\overline{\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}) \mid a + p^n \mathbb{Z}_p \subseteq V\}$ sont connexes dans l'arbre \mathcal{T} . Si $U \cap V = \emptyset$, alors*

$$I_U^\Pi(W) \cap I_V^\Pi(W) = \begin{pmatrix} p^{n_U} & a_U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot W \cap \begin{pmatrix} p^{n_V} & a_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot W$$

où $d(\overline{\begin{pmatrix} p^{n_U} & a_U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} p^{n_V} & a_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}})$ est minimale parmi les couples $((\overline{\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} p^n & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}) \in \mathcal{T}_U \times \mathcal{T}_V$.

Démonstration. Cas particulier du lemme III.1.13,ii) de [Col10]. □

Proposition 1.5.29. *Soit W une présentation standard et U un ouvert de \mathbb{Q}_p tel que l'ensemble \mathcal{T}_U est connexe dans l'arbre \mathcal{T} . On appelle sommet extrême de \mathcal{T}_U tout élément \bar{g} de \mathcal{T}_U tel que $\mathcal{T}_U \setminus \{\bar{g}\}$ est encore connexe.*

Alors, une forme linéaire de $I_U^\Pi(W)^\vee$ se prolonge par 0 en un élément de Π^\vee dès qu'elle est nulle sur les $g \cdot W$ pour les sommets extrêmes \bar{g} .

Démonstration. Cas particulier du lemme III.2.3 de [Col10]. □

Proposition 1.5.30. *Le module $\mathbf{D}(\Pi)$ muni de son Frobenius est étale.*

Démonstration. Comme précédemment, on va prouver qu'il est "presque" étale avant tensorisation avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Plus précisément, on voudrait donner une condition nécessaire pour un élément μ de $D_W^+(\Pi)$ pour qu'il s'écrive $\sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi_W(\mu_i)$. Cette dernière identité se traduit par

$$\mu = \sum_{i=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mu_i.$$

Analysons : si $\mu_i \in D_W^+(\Pi)$, le support de $\binom{p \ i}{0 \ 1} \cdot \mu_i$ est contenu dans $\binom{p \ i}{0 \ 1} \cdot I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W) = I_{i+p\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)$. On aimerait donc que $\binom{p \ i}{0 \ 1} \cdot \mu_i$ soit un prolongement par 0 de $\lambda_i = \mu|_{I_{i+p\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)}$. Selon la proposition 1.5.29, cette prolongation est possible dès que cette restriction est nulle sur $\binom{p \ i}{0 \ 1} \cdot W$.

Montrons qu'une forme linéaire μ nulle sur W et sur chaque $\binom{p \ i}{0 \ 1} \cdot W$ s'écrit $\sum_{i=0}^{p-1} \binom{p \ i}{0 \ 1} \cdot \mu_i$. Tous les λ_i (selon les notations du paragraphe précédent) s'étendent en éléments de $I_{i+p\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)_0^\vee$ et s'écrivent donc comme restrictions à $I_{i+p\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)$ de $\binom{p \ i}{0 \ 1} \cdot \mu_i$ avec $\mu_i \in D_W^+(\Pi)$. Regardons la somme $\lambda = \sum_i \lambda_i$. Il reste à prouver que notre idée est correcte et que cette somme coïncide bien avec μ . Le support des λ_i est contenu dans $I_{i+p\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)$: hors de $\bigcup I_{i+p\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)$, on a bien $\lambda \equiv \mu \equiv 0$. Soit v dans l'union. Tous les $\mu_i(v)$ valent $\mu(v)$ si $v \in I_{i+p\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)$ et sont nuls sinon. Or, la proposition 1.5.28 affirme que si v appartient à $I_{i+p\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)$ et à $I_{j+p\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)$, elle est dans les $\binom{p \ i}{0 \ 1} \cdot W \cap \binom{p \ j}{0 \ 1} \cdot W$. En particulier, vu l'hypothèse sur μ , on a $\mu(v) = \mu_i(v) = \mu_j(v) = 0$ et $\lambda(v) = \mu(v) = 0$.

À présent, si $\mu \in D_W^+(\Pi)$, et puisque $W + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p \ i}{0 \ 1} \cdot W$ est fini, il existe un entier n tel que $[(1+X)^{p^n} - 1](W + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p \ i}{0 \ 1} \cdot W) = \{0\}$. Le paragraphe précédent montre alors que $[(1+X)^{p^n} - 1]\mu$ est dans l'image de $\varphi^* D_W^+(\Pi)$ par φ_W^* . Après tensorisation, et puisque $(1+X)^{p^n} - 1$ est inversible dans $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, on conclut que μ est dans l'image de $\varphi^* \mathbf{D}(\Pi)$.

Montrons également l'injectivité. L'action de $\binom{p-1 \ 0}{0 \ 1}$ sur Π est bijective, ce qui entraîne que φ_W^* est injectif de $\varphi^* D_W^+(\Pi)$ dans $D_W^+(\Pi)$. La linéarisation de Frobenius sur $\mathbf{D}(\Pi)$ s'identifie au changement de base de φ_W^* via $\mathcal{O}_\mathcal{E}^+ \hookrightarrow \mathcal{O}_\mathcal{E}$. Ce changement de base étant plat, la linéarisation de Frobenius sur $\mathbf{D}(\Pi)$ est encore injective. \square

1.5.5 Finitude de $\mathbf{D}(\Pi)$

Pour conclure vraiment à une structure de (φ, Γ) -module sur $\mathbf{D}(\Pi)$, il nous faut encore prouver qu'il est de type fini. Pour ce faire, nous commencer par dévisser le problème aux représentations irréductibles.

On construit d'abord l'action de \mathbf{D} sur les morphismes. Si $f : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ est un morphisme dans $\text{Rep}_{\text{tors}} G$ et que W_i est une présentation standard de Π_i , alors le morphisme $f : W_1 \rightarrow W_2$ dont le but est une présentation standard de Π_2 contenant $f(W_1) + W_2$ (qui existe d'après [Col10, Corollaire III.1.15]) donne naissance à un morphisme de (φ, Γ) -modules $\mathbf{D}(\Pi_2) \rightarrow \mathbf{D}(\Pi_1)$ qui ne dépend pas des choix effectués. En particulier, il permet de voir \mathbf{D} comme un foncteur de $\text{Rep}_{\text{tors}} G$ vers les $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ -modules munis d'un Frobenius et d'une action semi-linéaire de Γ .

Théorème 1.5.31. *Le foncteur contravariant $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ est exact.*

Démonstration. Si l'on prend $0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_2 \rightarrow 0$ exact dans $\text{Rep}_{\text{tors}} G$, la proposition 1.5.10 nous affirme que l'on peut choisir des présentations standards W_1, W et W_2 qui sont dans une suite exacte, ainsi que le noyau de p_{W_1}, p_W et p_{W_2} . Le lemme des cinq pour la suite de complexes de chaînes

$$0 \rightarrow \text{Ker}(p_{W_\bullet}) \rightarrow W_\bullet \rightarrow I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi_\bullet}(W_\bullet) \rightarrow 0$$

dont les deux premiers complexes sont exacts, donne que la suite

$$0 \rightarrow I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi_1}(W_1) \rightarrow I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W) \rightarrow I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi_2}(W_2) \rightarrow 0$$

est exacte. Par dualité, on obtient l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow D_{W_2}^{\mathfrak{h}}(\Pi_2) \rightarrow D_W^{\mathfrak{h}}(\Pi) \rightarrow D_{W_1}^{\mathfrak{h}}(\Pi_1) \rightarrow 0.$$

On en déduit le résultat voulu par platitude de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}^+$. \square

Théorème 1.5.32. *Le foncteur $\Pi \rightarrow \mathbf{D}(\Pi)$ peut être vu comme foncteur depuis $\text{Rep}_{\text{tors}} G$ vers $\Phi\Gamma\text{M}_{\text{tors}, \mathcal{O}_\mathcal{E}}^{\text{ét}}$.*

Pour prouver ce théorème, on commence par remarquer que le théorème 1.5.31 nous permet de nous restreindre aux représentations irréductibles. Pour conclure dans ce cas, se référer à [Col10, Théorème IV.2.1].

Remarque 1.5.33. Ici c'est plutôt la première construction de $\mathbf{D}(\Pi)$ qui nous permet de conclure à l'exactitude. On voit l'intrication et l'utilité des deux visions sur $\mathbf{D}(\Pi)$.

1.5.6 Comparaisons des deux structures et construction de $\beta_{\mathbb{Z}_p}$

Nous n'avons pas exploité au maximum la structure provenant des $D_W^{\natural}(\Pi)$. Il faut voir comment les structures additionnelles qu'elle engendre sur $\mathbf{D}(\Pi)$ interagissent avec la structure (φ, Γ) -module que l'on vient de construire. Ainsi, nous pourrions naviguer encore plus facilement entre les deux constructions complémentaires.

Tout d'abord, au même titre que $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ laisse stable les classes d'éléments de G_1 , il laisse stable les classes d'éléments de G_0 et l'on en déduit une action de Γ sur $D_W^{\natural}(\Pi)$.

Lemme 1.5.34. *L'action induite de Γ sur $\mathbf{D}(\Pi)$ est exactement celle précédemment définie, induite par celle sur $D_W^+(\Pi)$.*

Démonstration. Cela vient du fait que la restriction $R_{\mathbb{Z}_p, W} : D_W^+(\Pi) \rightarrow D_W^{\natural}(\Pi)$ est Γ -équivariante ce qui est préservé par tensorisation. \square

Définition 1.5.35. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est un $\varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ -module libre ayant pour base la famille $((1+X)^i)_{0 \leq i < p}$. Soit D un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Le linéarisé $\varphi^* D$ s'écrit alors comme une somme directe

$$\varphi^* D = \bigoplus_{0 \leq i < p} (1+X)^i \varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \otimes_{\varphi, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D$$

ce qui permet grâce au caractère isomorphisme que φ_D^* s'écrire de manière unique tout élément $d \in D$ comme $\sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi_D(d_i)$. On définit alors la ψ -action comme

$$\psi_D \left(\sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi_D(d_i) \right) = d_i$$

qui est bien définie, additive, vérifie $\psi_D(x\varphi_D(d)) = \psi_t(x)d$ et a pour inverse à droite le Frobenius φ_D .

Dans ce cadre, une deuxième comparaison peut s'effectuer. Nous allons voir que $\psi_{\mathbf{D}(\Pi)}$ provenant de la structure de (φ, Γ) -module étale sur $\mathbf{D}(\Pi)$ possède une interprétation dans la construction grâce aux $D_W^{\natural}(\Pi)$.

Définition 1.5.36. L'ensemble de matrices G_0 est stable par $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Suivant les mêmes idées que pour la construction du Frobenius, on en déduit un endomorphisme du \mathcal{O}_L -module $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$. Par dualité, on obtient un endomorphisme ψ_W^{\natural} du \mathcal{O}_L -module $D_W^{\natural}(\Pi)$.

Proposition 1.5.37. *Pour $\mu \in D_W^{\natural}(\Pi)$, l'image de $\psi_W^{\natural}(\mu)$ dans $\mathbf{D}(\Pi)$ coïncide avec $\psi(1 \otimes \mu)$.*

Démonstration. On commence par le prouver sur l'espace engendré par l'image du Frobenius dans $D_W^+(\Pi)$, autrement dit, l'image de

$$(D_W^+(\Pi))^p \rightarrow D_W^+(\Pi), (\mu_i) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mu_i$$

pour définir ψ_W^{\natural} sur cet espace, on identifie $D_W^+(\Pi)$ à un sous-espace de $D_W^{\natural}(\Pi)$ via $R_{\mathbb{Z}_p, W}$.

Fixons donc $\mu = \sum_{i=0}^{p-1} \begin{pmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mu_i$ avec $\mu_i \in D_W^+(\Pi)$. Pour $v \in I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$, on calcule

$$\begin{aligned} \psi_W^{\natural}(\mu)(v) &= \mu \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \right) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \left(\begin{pmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \right) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \left(\begin{pmatrix} 1 & -i/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \right) \end{aligned}$$

Si $i \neq 0$, la matrice appartient à G_1 ce qui prouve que μ_i s'annule sur le vecteur considéré. En particulier,

$$\psi_W^{\natural}(\mu)(v) = \mu_0(v).$$

L'écriture initiale $\mu = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{0} \mu_i$ se réinterprète dans le (φ, Γ) -module étale $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+} D_W^+(\Pi)$ comme

$$\mu = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi_W(\mu_i)$$

Ainsi, par définition du morphisme ψ on a exactement $\psi(\mu) = \mu_0$ ce qui conclut.

Pour qu'un élément de $\mu \in D_W^+(\Pi)$ soit dans M , il suffit qu'il s'annule sur W et tous les $\binom{p}{0} \cdot W$ comme nous l'avons démontré au cours de la preuve de la proposition 1.5.30. Comme dans les preuves précédentes, ces espaces sont finis et il existe par lissité un entier n tel que $[(\binom{1}{0} \ p^n) - \text{Id}] \cdot \mu$ s'annule sur chaque $\binom{p}{0} \cdot W$. Alors, en utilisant l'identité

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -p^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on trouve que

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 1 & p^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Id} \right] \cdot \psi_W^{\natural}(\mu) &= \psi_W^{\natural} \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Id} \right] \cdot \mu \right) \\ &= \psi \left(1 \otimes \left[\begin{pmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Id} \right] \cdot \mu \right) \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & p^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Id} \right] \cdot \psi(1 \otimes \mu) \end{aligned}$$

La dernière identité ne vient pas de la relation de commutation mais de l'identité pour $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et $\mu \in \mathbf{D}(\Pi)$ de $\psi(x\mu) = \psi(x)\psi(\mu)$. L'action de $\begin{pmatrix} 1 & p^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Id}$ étant la multiplication par $(1+X)^{p^n} - 1$. L'inversibilité de $(1+X)^{p^n} - 1$ dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ finit de montrer le résultat. \square

Remarque 1.5.38. Cette dernière proposition illustre de manière subtile l'interaction entre les deux constructions de $\mathbf{D}(\Pi)$. En effet, pour la décomposition par rapport au Frobenius étale, on a fondamentalement besoin de la construction par $D_W^+(\Pi)$, mais pour la relier au ψ_W^{\natural} , on a besoin de considérer l'intrication des deux espaces $D_W^+(\Pi)$ et $D_W^{\natural}(\Pi)$.

Notons également qu'il est important de tensoriser rapidement par $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, sans quoi ψ n'est pas défini.

Pour finir cette étude, nous allons définir un morphisme $\beta_{\mathbb{Z}_p} : \Pi^{\vee} \rightarrow \mathbf{D}(\Pi)$ et nous demander quelles structures il préserve. Encore une fois, même si la majorité des structures (et surtout le Frobenius) vient de $D_W^+(\Pi)$, pour définir ce morphisme en premier lieu nous avons besoin de la première construction.

Définition 1.5.39. Définissons $\beta_{\mathbb{Z}_p}$ comme le morphisme obtenu par passage à la limite des composés de $R_{\mathbb{Z}_p, W} : \Pi^{\vee} \rightarrow D_W^{\natural}(\Pi)$ et du morphisme de tensorisation naturel de $D_W^{\natural}(\Pi)$ dans $\mathbf{D}(\Pi)$.

Proposition 1.5.40. *Ce morphisme est Q^+ -équivariant. En particulier, il préserve la structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ -module que l'on peut associer aux deux termes, est Γ -équivariant et envoie l'action de $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur le Frobenius.*

Démonstration. C'est limpide lorsque l'image de μ par la restriction tombe dans l'image de $D_W^+(\Pi)$, en particulier lorsque μ est nulle sur W . On sait que pour tout ν , c'est vrai pour $[(\binom{1}{0} \ p^n) - \text{Id}] \cdot \nu = [(1+X)^{p^n} - 1]\nu$ pour n assez grand.

Pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Q^+$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & p^n a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g = g \begin{pmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} [(1+X)^{ap^n} - 1] \beta_{\mathbb{Z}_p}(g \cdot \nu) &= \beta_{\mathbb{Z}_p}([(1+X)^{ap^n} - 1]g \cdot \nu) \\ &= \beta_{\mathbb{Z}_p}(g \cdot [(1+X)^{p^n} - 1]\nu) \\ &= g \beta_{\mathbb{Z}_p}([(1+X)^{p^n} - 1]\nu) \\ &= g \cdot [(1+X)^{p^n} - 1] \nu \beta_{\mathbb{Z}_p}(\nu) \\ &= [(1+X)^{ap^n} - 1]g \cdot \beta_{\mathbb{Z}_p}(\nu) \end{aligned}$$

En simplifiant par $[(1+X)^{ap^n} - 1]$, on obtient l'invariance désirée. \square

Proposition 1.5.41. *L'action de $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur Π^\vee se transporte en ψ via $\beta_{\mathbb{Z}_p}$.*

Démonstration. C'est un corollaire de la comparaison entre ψ_W^h et ψ . □

1.5.7 Généralisation à d'autres catégories que $\text{Rep}_{\text{tors}} G$

On aimerait étendre cette construction à une catégorie de représentations au-dessus de \mathcal{O}_L , puis de L . Nous allons procéder à partir du cas de torsion en passant à la limite, i.e. en définissant $\mathbf{D}(\Pi) = \lim \mathbf{D}(\Pi/\varpi^k \Pi)$.

Définition 1.5.42. La catégorie $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ est la sous-catégorie pleine des \mathcal{O}_L -modules topologiques avec action continue de G dont les objets sont les modules Π muni de la topologie ϖ -adique, qui sont séparés et complets, sans torsion et tels que pour tout entier n , le module $\Pi/\varpi^n \Pi$ est un objet de $\text{Rep}_{\text{tors}} G$.

La catégorie $\text{Rep}_L G$ est la sous-catégorie pleine des objets les L -modules avec action de G dont les objets sont tels qu'il existe un sous- \mathcal{O}_L -module Π_0 discret, stable par G qui est objet de $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ et tel que $\Pi = \Pi_0 \otimes_{\mathcal{O}_L} L$.

Remarque 1.5.43. Quelques remarques sur la condition d'appartenance à $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$.

La complétude de \mathcal{O}_L garantit que Π a un caractère central si et seulement chaque quotient en a un.

Pour tout \mathcal{O}_L -module topologique Π muni de la topologie ϖ -adique, séparé et complet pour cette dernière, avec action continue de G , les modules $\Pi/\varpi^k \Pi$ sont automatiquement lisses.

L'admissibilité des quotients semble subtile à voir directement sur Π .

Remarquons que la complétude et la séparation de Π nous assurent dans ce cas que Π est engendré par des relevés d'éléments engendrant $\Pi/\varpi \Pi$.

De manière générale, la séparation et la complétude garantissent que $\Pi = \lim_{\leftarrow} \Pi/\varpi^k \Pi$.

Remarque 1.5.44. Pour l'appartenance à $\text{Rep}_L G$, on peut également remarquer qu'une structure de L -Banach est déduite sur Π à partir de son réseau stable Π_0 en posant $\varpi^k \Pi_0$ comme base de voisinages de 0.

Définition 1.5.45. On définit pour $\Pi \in \text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ l'élément $\mathbf{D}(\Pi) = \lim \mathbf{D}(\Pi/\varpi^k \Pi)$ limite dans la catégorie des (φ, Γ) -modules sur \mathcal{O}_E . Les flèches de transition sont donnés par functorialité de \mathbf{D} via les morphismes $\Pi/\varpi^k \Pi \xrightarrow{\times \varpi} \Pi/\varpi^{k+1} \Pi$.

Proposition 1.5.46. *Le foncteur \mathbf{D} depuis $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ arrive dans $\Phi\Gamma\text{M}_{\mathcal{O}_E}^{\text{ét}}$, il est contravariant et exact.*

Démonstration. Soient $k \geq 0$. Alors par exactitude de \mathbf{D} sur $\text{Rep}_{\text{tors}} G$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\Pi/\varpi^{k+1} \Pi) / \varpi^k \mathbf{D}(\Pi/\varpi^{k+1} \Pi) &= \text{Coker}(\mathbf{D}(\times \varpi^k)) \\ &= \mathbf{D}(\text{Ker}(\times \varpi^k)) \\ &= \mathbf{D}(\varpi \Pi / \varpi^{k+1} \Pi) \\ &\xrightarrow[\sim]{\mathbf{D}(\times \varpi)} \mathbf{D}(\Pi / \varpi^k \Pi) \end{aligned}$$

où le dernier morphisme est un isomorphisme puisque Π est sans torsion et que \mathbf{D} est exact. L'isomorphisme obtenu est simplement la réduction module ϖ^k de la flèche de transition dans la définition de $\mathbf{D}(\Pi)$. Puisque $\mathbf{D}(\Pi/\varpi^{k+1} \Pi)$ est de type fini comme \mathcal{O}_L -module, le lemme de Nakayama affirme que relever une famille génératrice de $\mathbf{D}(\Pi/\varpi^k \Pi)$ fournit une famille génératrice de $\mathbf{D}(\Pi/\varpi^{k+1} \Pi)$. Si l'on prend une famille génératrice de $\mathbf{D}(\Pi/\varpi \Pi)$ puisqu'on la relève de manière cohérente à chaque $\mathbf{D}(\Pi/\varpi^k \Pi)$, on obtient de fait une famille génératrice de $\mathbf{D}(\Pi)$ sur \mathcal{O}_L . Le foncteur \mathbf{D} fournit des objets de type fini.

Soient $k \geq 0$ et $r \geq 0$. Alors par exactitude de \mathbf{D} sur $\text{Rep}_{\text{tors}} G$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\Pi/\varpi^{r+k} \Pi) / \varpi^r \mathbf{D}(\Pi/\varpi^{r+k} \Pi) &= \text{Coker}(\mathbf{D}(\times \varpi^r)) \\ &= \mathbf{D}(\text{Ker}(\times \varpi^r)) \\ &= \mathbf{D}(\varpi^k \Pi / \varpi^{r+k} \Pi) \\ &\xrightarrow[\sim]{\mathbf{D}(\times \varpi^r)} \mathbf{D}(\Pi / \varpi^r \Pi) \end{aligned}$$

où le dernier morphisme est un isomorphisme puisque Π est sans torsion et que \mathbf{D} est exact. La famille obtenue d'isomorphismes entre $\mathbf{D}(\Pi/\varpi^{r+k}\Pi)/\varpi^r\mathbf{D}(\Pi/\varpi^{r+k}\Pi)$ et $\mathbf{D}(\Pi/\varpi^r\Pi)$ est compatible aux transitions lorsque k augmentent : elle fournit un isomorphisme entre $\varprojlim_k \mathbf{D}(\Pi/\varpi^{r+k}\Pi)/\varpi^r\mathbf{D}(\Pi/\varpi^{r+k}\Pi)$ et $\mathbf{D}(\Pi/\varpi^r\Pi)$. Le foncteur \mathbf{D} fournissant des objets artiniens sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ depuis les objets de torsion, le système projectif $\mathbf{D}(\Pi/\varpi^k\Pi)$ est de Mittag-Leffler. La suite exacte de systèmes projectifs

$$0 \rightarrow \left(\varpi^r \mathbf{D}(\Pi/\varpi^k\Pi) \right)_{k \geq 0} \rightarrow \left(\mathbf{D}(\Pi/\varpi^k\Pi) \right)_{k \geq 0} \rightarrow \left(\mathbf{D}(\Pi/\varpi^{r+k}\Pi)/\varpi^r \mathbf{D}(\Pi/\varpi^{r+k}\Pi) \right)_{k \geq 0} \rightarrow 0$$

donne une suite exacte (par annulation du premier foncteur dérivé de la limite projective, voir [Prod])

$$0 \rightarrow \varprojlim_k \varpi^r \mathbf{D}(\Pi/\varpi^k\Pi) \rightarrow \mathbf{D}(\Pi) \rightarrow \varprojlim_k \mathbf{D}(\Pi/\varpi^{r+k}\Pi)/\varpi^r \mathbf{D}(\Pi/\varpi^{r+k}\Pi) \rightarrow 0$$

Le morphisme de noyau nul entre systèmes de Mittag-Leffler $(\mathbf{D}(\Pi/\varpi^k\Pi))_{k \geq 0} \xrightarrow{\times \varpi^r} (\varpi^r \mathbf{D}(\Pi/\varpi^k\Pi))_{k \geq 0}$ étant fourni en passant à la limite la surjectivité de $\mathbf{D}(\Pi) \xrightarrow{\times \varpi^r} \varprojlim_k \varpi^r \mathbf{D}(\Pi/\varpi^k\Pi)$ ce qui permet grâce à la première suite exacte d'identifier $\mathbf{D}(\Pi)/\varpi^r \mathbf{D}(\Pi) \cong \mathbf{D}(\Pi/\varpi^r\Pi)$.

Le caractère étale du Frobenius se vérifie par la surjectivité de son linéarisé modulo ϖ^r . Le module $\mathbf{D}(\Pi)$ est étale puisque tous les $\mathbf{D}(\Pi/\varpi^k\Pi)$ sont étales et que le linéarisé du Frobenius, modulo ϖ^r s'identifie simplement au linéarisé du Frobenius sur $\mathbf{D}(\Pi/\varpi^k\Pi)$.

Regardons l'exactitude. Prenons une suite exacte dans $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$

$$0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_2 \rightarrow 0.$$

Puisque les modules sont sans torsion, on a également une suite exacte

$$0 \rightarrow \varpi^k \Pi_1 \rightarrow \varpi^k \Pi \rightarrow \varpi^k \Pi_2 \rightarrow 0$$

qui par la suite exacte longue d'homologie donne une suite exacte

$$0 \rightarrow \Pi_1/\varpi^k \Pi_1 \rightarrow \Pi/\varpi^k \Pi \rightarrow \Pi_2/\varpi^k \Pi_2 \rightarrow 0.$$

L'exactitude de \mathbf{D} sur $\text{Rep}_{\text{tors}} G$ donne une suite exacte de systèmes projectifs

$$0 \rightarrow \left(\mathbf{D}(\Pi_2/\varpi^k \Pi_2) \right)_{k \geq 0} \rightarrow \left(\mathbf{D}(\Pi/\varpi^k \Pi) \right)_{k \geq 0} \rightarrow \left(\mathbf{D}(\Pi_1/\varpi^k \Pi_1) \right)_{k \geq 0} \rightarrow 0$$

et Mittag-Leffler conclut à nouveau. \square

Définition 1.5.47. On définit pour $\Pi \in \text{Rep}_L G$ l'élément $\mathbf{D}(\Pi) = \varprojlim L \otimes_{\mathcal{O}_L} D(\Pi_0)$ où la limite est indexée par la catégorie filtrante des sous- \mathcal{O}_L -réseaux compacts stables par G et qui engendrent Π sur L , avec les inclusions pour morphismes.

Lemme 1.5.48. Une inclusion $\Pi_0 \subset \Pi'_0$ induit un isomorphisme $L \otimes_{\mathcal{O}_L} D(\Pi_0) \cong L \otimes_{\mathcal{O}_L} D(\Pi'_0)$. En particulier, le module $\mathbf{D}(\Pi)$ a un sous- (φ, Γ) -module sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ incarné par $\mathbf{D}(\Pi_0)$.

Démonstration. Puisque ce sont des réseaux, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\Pi_0 \subset \Pi'_0 \subset \varpi^{-r} \Pi_0$. L'isomorphisme $\varpi^{-r} \Pi_0 \xrightarrow{\times \varpi^r} \Pi_0$ fournit un isomorphisme $\mathbf{D}(\Pi_0) \xrightarrow{\times \varpi^r} \mathbf{D}(\varpi^{-r} \Pi_0)$ qui identifie $\mathbf{D}(\varpi^{-r} \Pi_0)$ à $\varpi^r \mathbf{D}(\Pi_0)$. Par conséquent, le morphisme $\mathbf{D}(\varpi^{-r} \Pi_0) \rightarrow \mathbf{D}(\Pi_0)$ engendré par l'inclusion devient un isomorphisme après tensorisation par L . C'est également le cas de $\mathbf{D}(\Pi'_0) \rightarrow \mathbf{D}(\Pi_0)$ par lequel on peut le factoriser. \square

Proposition 1.5.49. Ce foncteur \mathbf{D} arrive dans la sous-catégorie pleine $\mathcal{D}^{\text{ét},0}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{E})$ de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{E})$ des objets ayant un sous- $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ -réseau stable par les endomorphismes qui est dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_\mathcal{E})$, est contravariant et exact.

Comme l'on voudrait obtenir à terme une correspondance entre représentations de G et de $G_{\mathbb{Q}_p}$, on applique ensuite le foncteur des équivalences de catégories de Fontaine (dont la première a été détaillée dans la section 1.2) donné par $\mathbb{V} : \mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_\mathcal{E}) \rightarrow \text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G_{\mathbb{Q}_p})$ (resp. $\mathbb{V} : \mathcal{D}^{\text{ét},0}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Rep}_L G_{\mathbb{Q}_p}$).

On appelle \mathbf{V} le foncteur obtenu par précomposition de \mathbb{V} avec \mathbf{D} qui est encore exact.

Chapitre 2

Théorie des (φ, Γ) -modules multivariables

2.1 L'équivalence de catégories de Fontaine à plusieurs variables

Dans [Záb18b], G. Zábřádi établit l'équivalence de Fontaine entre la catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ des \mathcal{O}_L -modules de type fini munit d'une action continue de $G_{\mathbb{Q}_p, \Delta} = \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p} | \mathbb{Q}_p)$ et la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_{+, \Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta})$ des $T_{+, \Delta} = \prod_{\alpha \in \Delta} (\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ -modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$. On se contente du cas de $L = \mathbb{Q}_p$, le cas des coefficients arbitraires s'en déduisant en remplaçant $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ par l'anneau $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ avec les actions et Frobenius définis triviaux sur \mathcal{O}_L de la même manière que dans le premier chapitre. Définissons un peu les anneaux qui vont servir dans le cas multivariable :

Définition 2.1.1. On note

$$E_\Delta = \mathbb{F}_p[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]][X_\Delta^{-1}]$$

où $X_\Delta = \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$, et

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta} = \varprojlim_h \left(\mathbb{Z}_p/p^h \mathbb{Z}_p \right) [[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]][X_\Delta^{-1}]$$

On munit le premier de la topologie (X) -adique et le deuxième de la topologie (p, X) -adique.

Ces anneaux seront munis d'une action de \mathbb{F}_p -espace vectoriel topologique (resp. de \mathbb{Z}_p -algèbre topologique) du monoïde $T_{+, \Delta}$ donnée par $\gamma \cdot X_\alpha = (1 + X_\alpha)^{\gamma_\alpha} - 1$. L'action restreinte à $\Gamma_\Delta = \prod_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}_p^\times$ sur un élément donné est également continue si l'on munit Γ_Δ de la topologie profinie.

Remarquons pour la suite que cette action peut se voir comme une famille de Frobenius φ_α correspondant à l'action de $(p^{1-\beta=\alpha})_{\beta \in \Delta} \in T_{+, \Delta}$ et de $\Gamma_\Delta \cong G_{\mathbb{Q}_p, \Delta} / H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$.

Remarque 2.1.2. Il est possible de construire autrement ces anneaux, à partir du cas univariable, ce qui permet de motiver la définition 2.1.4. Prenons pour tout α une copie E_α du corps E et appelons E_α^+ son anneau d'entiers X_α -adique. L'anneau E_Δ peut être vu comme

$$E_\Delta = \left(\widehat{\bigotimes}_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} E_\alpha^+ \right) [X_\Delta^{-1}]$$

où le produit tensoriel complété $\widehat{\otimes}$ est la limite projective des quotients de type fini (ici sur \mathbb{F}_p).

Définition 2.1.3. Rappelons que la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_{+, \Delta}, E_\Delta)$ (resp. $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_{+, \Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta})$) est la catégorie des E_Δ -modules (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ -modules) de type fini munis d'une action semi-linéaire de $T_{+, \Delta}$ qui est étale, i.e la linéarisation de l'action de tout élément est un isomorphisme. Pour plus de précision, revoir la définition 1.1.4.

La noéthérianité de E_Δ se prouve grâce à la noéthérianité de $A[[X]]$ pour A noéthérien, puis la préservation de la noéthérianité par localisation. Celle de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ se prouve en considérant qu'il s'agit de la complétion p -adique de $\mathbb{Z}_p[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]][X_\Delta^{-1}]$.

Définition 2.1.4. Donnons-nous pour tout α une extension séparable finie $E'_\alpha | E_\alpha = \mathbb{F}_p((X_\alpha))$ avec l'unique norme qui étend celle sur $\mathbb{F}_p((X_\alpha))$. On écrit chaque $E'_\alpha = \mathbb{F}_{q_\alpha}((X'_\alpha))$ où $\mathbb{F}_{q_\alpha} | \mathbb{F}_p$ est finie et X'_α est une uniformisante. On note

$$E'_\Delta = \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{q_\alpha} \right) [[X'_\alpha \mid \alpha \in \Delta]][X'_\Delta^{-1}].$$

Son anneau d'entiers pour la valuation (X') -adique est noté E'_Δ . On remarque que cet anneau peut se construire d'une autre manière : en partant de $\otimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} E'_\Delta$, en complétant par rapport à l'idéal (X'_Δ) puis en inversant X'_Δ . Dernière vision possible : l'anneau E'_Δ s'identifie au produit tensoriel complété sur \mathbb{F}_p des anneaux E'_α des entiers de E'_α .

Les Frobenius φ_α sont définis sur E'_α comme la puissance p -ième et trivialement sur E'_β . Leur produit tensoriel sur $\otimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} E'_\Delta$ s'étend continûment et uniquement à E'_Δ . L'action de $H_\alpha = \text{Gal}(E_\alpha^{\text{sep}}|E_\alpha)$ sur E'_α , définie triviale sur E'_β pour $\beta \neq \alpha$, s'étend également de manière continue à E'_Δ . Ces actions commutent entre elles pour fournir une action de $H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ sur E'_Δ . Mieux, on a une action de $G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ en identifiant E_α^{sep} à un corps de normes et en étendant le produit tensoriel des actions à E'_Δ . Ces Frobenius et actions prolongent ceux précédemment définis sur E_Δ .

On note E_Δ^{sep} la limite inductive des E'_Δ pour toutes les familles d'extensions séparables possibles. Il est également muni de Frobenius et d'une action de $G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$.

Remarque 2.1.5. Pour $|\Delta| > 1$, si l'anneau E_Δ est intègre, ce n'est pas le cas de E_Δ^{sep} (qui contient par exemple $\mathbb{F}_{p^2} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^2}$).

Définition 2.1.6. Définissons, pour chaque α , l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\alpha}$ comme une copie de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, et définissons \mathcal{E}_α son corps des fractions. Grâce au cas univariable, on sait que pour toute extension séparable finie $E'_\alpha|E_\alpha$, il existe une unique extension non ramifiée $\mathcal{E}'_\alpha|\mathcal{E}_\alpha$ dont l'extension au niveau des corps résiduels est exactement $E'_\alpha|E_\alpha$. On note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\alpha}$ son anneau d'entiers pour la valuation p -adique. Pour une famille d'extensions, on note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}$ le produit tensoriel complété sur \mathbb{Z}_p des $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\alpha}$. On peut identifier $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}$ au complété p -adique

$$\left(\bigotimes_{\mathbb{Z}_p} W(\mathbb{F}_{q_\alpha}) \right) \widehat{\left[[X'_\alpha | \alpha \in \Delta] [X'^{-1}] \right]}$$

Par limite inductive, on obtient l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}$.

Par complétion p -adique, on obtient un anneau complet pour la valuation p -adique d'anneau résiduel E_Δ^{sep} que l'on note $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}}$.

Le Frobenius φ_α du cas univariable sur chaque $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\alpha}$, défini comme trivial sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\beta}$ pour $\beta \neq \alpha$, passe au produit tensoriel complété puis à $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}}$. On obtient ainsi des Frobenius sur $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}}$.

De même, l'action de Galois se transmet.

Définition 2.1.7. On définit de manière analogue à la première partie le foncteur \mathbb{D} par

$$\mathbb{D} : \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta} \rightarrow \mathcal{D}(T_{+, \Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}), \quad V \mapsto (\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}}.$$

On définit le foncteur \mathbb{V} par

$$\mathbb{V} : \mathcal{D}^{\text{ét}}(T_{+, \Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}) \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, \quad D \mapsto \bigcap_{\alpha \in \Delta} (\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}} D)^{\varphi_\alpha = \text{Id}}.$$

Pour étudier les propriétés du foncteur \mathbb{D} , nous avons besoin d'analogues de propositions concernant les anneaux de Fontaine dans le cas multivariable, ainsi que d'un lemme supplémentaire pour appliquer la même stratégie que dans la première partie.

Proposition 2.1.8. *Les inclusions suivantes sont des égalités :*

$$\mathbb{F}_p \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Delta} (E_\Delta^{\text{sep}})^{\varphi_\alpha = \text{Id}}, \quad \forall h, \mathbb{Z}_p/p^h \mathbb{Z}_p \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Delta} \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}} / p^h \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}} \right)^{\varphi_\alpha = \text{Id}}, \quad \mathbb{Z}_p \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Delta} (\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}})^{\varphi_\alpha = \text{Id}}.$$

Démonstration. Première égalité : soit $u \in \bigcap (E_\Delta^{\text{sep}})^{\varphi_\alpha = \text{Id}}$ non nul. Il existe une famille d'extensions séparables finies $E'_\alpha|E_\alpha$ telles que $u \in \bigcap (E'_\alpha)^{\varphi_\alpha = \text{Id}}$. Rappelons la description $E'_\Delta = \left(\bigotimes \mathbb{F}_{q_\alpha} \right) \llbracket [X'_\alpha | \alpha \in \Delta] [X'^{-1}] \rrbracket$. En appliquant à u la puissance p -ième qui est le produit des φ_α , on tombe sur $u^p = u$. En identifiant le terme "de plus bas degré pour un ordre lexicographique" qui vit dans l'algèbre réduite $\bigotimes \mathbb{F}_{q_\alpha}$, on en déduit que $u \in E'_\Delta$ de terme "constant" u_0 non nul. Puisque (X') est un idéal stable par tous les φ_α , le terme constant u_0 doit également être invariant par chaque φ_α . Pour un α choisi, prenons (e_i) une base du \mathbb{F}_p -espace vectoriel $\otimes_{\beta \neq \alpha} \mathbb{F}_{q_\beta}$ et écrivons de manière unique $u_0 = \sum c_i \otimes e_i$ avec $c_i \in \mathbb{F}_{q_\alpha}$. On a

$$\sum c_i^p \otimes e_i = \varphi_\alpha(u_0) = u_0 = \sum c_i \otimes e_i$$

et en identifiant pour tout i , on a $c_i^p = c_i$ soit $c_i \in \mathbb{F}_p$ et $u_0 \in \otimes_{\beta \neq \alpha} \mathbb{F}_{q_\beta}$. Ceci étant vrai pour tout α , u_0 appartient à \mathbb{F}_p . Enfin, l'élément $u - u_0$ est également invariant, dans E'_Δ mais de terme constant nul. Il est donc nul, soit $u = u_0 \in \mathbb{F}_p$.

Deuxième égalité : par dévissage à partir de la première égalité modulo p , comme dans le lemme 1.2.8. \square

Proposition 2.1.9. *Si les $E'_\alpha|E_\alpha$ sont des extensions finies séparables, les inclusions suivantes sont des égalités*

$$E'_\Delta \subseteq (E_\Delta^{\text{sep}})^{\prod_{\alpha \in \Delta} G_{E'_\alpha}}, \quad \forall h, \quad \mathcal{O}_{E'_\Delta}/p^h \mathcal{O}_{E'_\Delta} \subseteq \left(\widehat{\mathcal{O}_{E'_\Delta}}/p^h \widehat{\mathcal{O}_{E'_\Delta}} \right)^{\prod_{\alpha \in \Delta} G_{E'_\alpha}}, \quad \mathcal{O}_{E'_\Delta} \subseteq (\widehat{\mathcal{O}_{E'_\Delta}})^{\prod_{\alpha \in \Delta} G_{E'_\alpha}}.$$

Démonstration. Première égalité : Puisque les invariants commutent à l'inversion de X'_Δ et à la limite inductive, il suffit de prouver pour tout famille d'extensions finies galoisiennes $E''_\alpha|E'_\alpha$ l'égalité $(E''_\Delta)^{\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(E''_\alpha|E'_\alpha)}$. Nous montrons le résultat par récurrence sur $|\Delta|$, le cas $|\Delta| = 1$ étant simplement le théorème de Galois. Choisissons un α arbitraire. Comme des produits tensoriels complétés se cachent partout, nous avons besoin de quotienter un peu pour faire apparaître l'hypothèse de récurrence. Pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} (E''_\Delta / (X'_\Delta)^k)^{\prod_{\beta \neq \alpha} \text{Gal}(E''_\beta|E'_\beta)} &= \left((E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} E''_\alpha) / (X'_\Delta)^k \right)^{\prod_{\beta \neq \alpha} \text{Gal}(E''_\beta|E'_\beta)} \\ &= \left(E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}} \otimes_{\mathbb{F}_p} E''_\alpha / (X'_\Delta)^k \right)^{\prod_{\beta \neq \alpha} \text{Gal}(E''_\beta|E'_\beta)} \\ &= (E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}})^{\prod_{\beta \neq \alpha} \text{Gal}(E''_\beta|E'_\beta)} \otimes_{\mathbb{F}_p} E''_\alpha / (X'_\Delta)^k \\ &= E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}} \otimes_{\mathbb{F}_p} E''_\alpha / (X'_\Delta)^k \end{aligned}$$

où l'avant-dernière ligne provient de ce que $E''_\alpha / (X'_\Delta)^k$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel avec action triviale du produit galoisien et où la dernière ligne est obtenue par hypothèse de récurrence. En passant à la limite, on obtient $(E''_\Delta)^{\prod_{\beta \neq \alpha} \text{Gal}(E''_\beta|E'_\beta)} \subseteq E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} E''_\alpha$. Explicitement, en posant $E'_\alpha = \mathbb{F}_{q_\alpha}((X'_\alpha))$ et $E''_\alpha = \mathbb{F}_{r_\alpha}((X''_\alpha))$ comme précédemment, on peut écrire

$$(E''_\Delta)^{\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(E''_\alpha|E'_\alpha)} \subseteq \left(\mathbb{F}_{r_\alpha} \otimes_{\mathbb{F}_p} \bigotimes_{\beta \neq \alpha} \mathbb{F}_{q_\beta} \right) \llbracket X''_\alpha, X'_\beta \mid \beta \neq \alpha \rrbracket.$$

En réduisant modulo $(X'_\beta)^k_{\beta \neq \alpha}$, on obtient que

$$\begin{aligned} \left((E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} E''_\alpha) / (X'_\beta)^k_{\beta \neq \alpha} \right)^{\text{Gal}(E''_\alpha|E'_\alpha)} &= \left(E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}} / (X'_\beta)^k_{\beta \neq \alpha} \otimes_{\mathbb{F}_p} E''_\alpha \right)^{\text{Gal}(E''_\alpha|E'_\alpha)} \\ &= \left(E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}} / (X'_\beta)^k_{\beta \neq \alpha} \right) \otimes_{\mathbb{F}_p} (E''_\alpha)^{\text{Gal}(E''_\alpha|E'_\alpha)} \\ &= \left(E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}} / (X'_\beta)^k_{\beta \neq \alpha} \right) \otimes_{\mathbb{F}_p} E'_\alpha \\ &= E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}} / (X'_\beta)^k_{\beta \neq \alpha} \end{aligned}$$

où l'antépénultième ligne est obtenue en considérant que $E''_\alpha / (X'_\beta)^k_{\beta \neq \alpha}$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel avec action triviale de $\text{Gal}(E''_\alpha|E'_\alpha)$, l'avant-dernière provient du cas de base univariable. Notons également (ce que nous n'avons pas précisé dans le premier calcul) que la première égalité utilise que $\mathbb{F}_{r_\alpha} \otimes \bigotimes_{\beta \neq \alpha} \mathbb{F}_{q_\beta}$ est fini. En passant à la limite en k et par complétion $(X'_\beta)_{\beta \neq \alpha}$ -adique de $E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} E''_\alpha$, on obtient que $(E''_\Delta)^{\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(E''_\alpha|E'_\alpha)} \subseteq E''_\Delta$. En combinant avec la première inclusion, cela donne

$$(E''_\Delta)^{\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(E''_\alpha|E'_\alpha)} = (E''_{\Delta \setminus \{\alpha\}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} E''_\alpha)^{\text{Gal}(E''_\alpha|E'_\alpha)} = E''_\Delta$$

Deuxième égalité : par dévissage à partir de la première égalité modulo p , comme dans le lemme 1.2.3. \square

Lemme 2.1.10. *Pour toute famille d'extensions finies séparables $E'_\alpha|E_\alpha$, les morphismes*

$$\begin{aligned} E'_{\alpha_1} \otimes_{E_{\alpha_1}} \left(E'_{\alpha_2} \cdots \left(E'_{\alpha_{|\Delta|}} \otimes_{E_{\alpha_{|\Delta|}}} E'_\Delta \right) \right) &\rightarrow E'_\Delta \\ \mathcal{O}_{E'_{\alpha_1}} \otimes_{\mathcal{O}_{E_{\alpha_1}}} \left(\mathcal{O}_{E'_{\alpha_2}} \cdots \left(\mathcal{O}_{E'_{\alpha_{|\Delta|}}} \otimes_{\mathcal{O}_{E_{\alpha_{|\Delta|}}}} \mathcal{O}_{E'_\Delta} \right) \right) &\rightarrow \mathcal{O}_{E'_\Delta} \end{aligned}$$

obtenus à partir des inclusions sont des isomorphisme. Les inclusions étant Frobenius et $G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ -équivariantes, ces morphismes le sont également.

Démonstration. Premier isomorphisme : en appliquant récursivement la transitivité du produit tensoriel (i.e. pour tout anneau A , toutes A -algèbres B et C et pour toute B -algèbre D il y a un isomorphisme naturel $D \otimes_B (B \otimes_A C) \cong D \otimes_A C$), le morphisme

$$E'_{\alpha_1} \otimes_{E_{\alpha_1}^+} \left(E'_{\alpha_2} \dots \left(E'_{\alpha_{|\Delta|}} \otimes_{E_{\alpha_{|\Delta|}}^+} \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} E_{\alpha}^+ \right) \right) \rightarrow \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} E_{\alpha}^+$$

est un isomorphisme. Les idéaux (X'_{Δ}) et (X_{Δ}) de $\otimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} E_{\alpha}^+$ fournissant la même topologie, et puisque les E_{α}^+ sont X_{α} -adiquement complet, en complétant (X_{Δ}) -adiquement des deux côtés de l'isomorphisme précédent, on obtient un isomorphisme induit par les inclusions

$$E'_{\alpha_1} \otimes_{E_{\alpha_1}^+} \left(E'_{\alpha_2} \dots \left(E'_{\alpha_{|\Delta|}} \otimes_{E_{\alpha_{|\Delta|}}^+} E_{\Delta}^+ \right) \right) \xrightarrow{\sim} E'_{\Delta}^+.$$

Toujours parce que X'_{α} est une uniformisante de E_{α}^+ , inverser X_{α} (resp. X_{Δ}) ou X'_{α} (resp. X'_{Δ}) revient au même ce qui fournit en inversant X_{Δ} un isomorphisme induit par les inclusions

$$E'_{\alpha_1} \otimes_{E_{\alpha_1}} \left(E'_{\alpha_2} \dots \left(E'_{\alpha_{|\Delta|}} \otimes_{E_{\alpha_{|\Delta|}}} E_{\Delta} \right) \right) \xrightarrow{\sim} E'_{\Delta}.$$

Deuxième isomorphisme : par complétion p -adique de la source et continuité du morphisme induit par les injections, il suffit de montrer la surjectivité modulo p^h pour tout entier naturel h . Le cas $h = 1$ provient de la première étape. Pour la récurrence, utiliser la suite exacte associée à la réduction modulo p et le lemme des cinq. \square

Théorème 2.1.11. *Le foncteur \mathbb{D} envoie en réalité les objets dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_{+, \Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}})$, est pleinement fidèle et \mathbb{V} en fournit un quasi-inverse depuis son image essentielle.*

Démonstration. La preuve suit le cas univariable dans 1.2.5. Il suffit comme dans la première étape de ladite preuve, de la proposition 2.1.9 et de montrer que pour toute famille d'extensions finies galoisiennes $E'_{\alpha}|E_{\alpha}$, on a un isomorphisme $H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ -équivariant entre $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_{\Delta}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}[\prod_{\alpha} \text{Gal}(E'_{\alpha}|E_{\alpha})]$. Tout d'abord, par théorème de la base normale, chaque E'_{α} s'écrit $E_{\alpha}[\text{Gal}(E'_{\alpha}|E_{\alpha})]$ d'où par Nakayama un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\alpha}}[\text{Gal}(E'_{\alpha}|E_{\alpha})]$ -modules entre $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_{\alpha}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\alpha}}[\text{Gal}(E'_{\alpha}|E_{\alpha})]$. On utilise alors l'isomorphisme du lemme 2.1.10 et récursivement l'isomorphisme S -linéaire de G -équivariant $R[G] \otimes_R S \cong S[G]$ obtenu pour tout morphisme d'anneaux $R \rightarrow S$ et tout groupe fini G .

Pour prouver que \mathbb{V} fournit un quasi-inverse sur l'image essentielle, passer le morphisme de comparaison Frobenius et $G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ -équivariant aux invariants par les φ_{α} . On obtient un isomorphisme naturel entre $\mathbb{V}(\mathbb{D}(V))$ et $\cap(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{\varphi_{\alpha} = \text{Id}} = (\cap(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\text{nr}}})^{\varphi_{\alpha} = \text{Id}}) \otimes V$ qui vaut V grâce à la proposition 2.1.8 (à nouveau petite arnaque pour prouver l'égalité qu'il faudrait rédiger comme dans le théorème 1.2.5). En appliquant \mathbb{D} . Comme \mathbb{D} corestreint à son image essentielle est une équivalence de catégories, le foncteur \mathbb{V} en est nécessairement un inverse. \square

Théorème 2.1.12 (Théorème 3.15 dans [Záb18b]). *Le foncteur \mathbb{D} est essentiellement surjectif. Par conséquent, les foncteurs \mathbb{D} et \mathbb{V} fournissent une équivalence de catégories entre $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ et $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_{+, \Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}})$.*

Remarque 2.1.13. Si l'étude de \mathbb{D} se déroule de manière similaire dans le cas univariable et multivariable, ce n'est pas vrai pour l'étude de \mathbb{V} . En effet, les arguments d'égalité ne fonctionnent plus entre E_{Δ}^{sep} et E_{Δ} (le premier n'est même pas intègre). Cela nous empêche même d'utiliser des arguments d'égalité récursivement pour réduire le nombre de variables puisque $E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}, +} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} E_{\alpha}^+$, par exemple, n'est pas non plus intègre dès que $|\Delta| > 2$.

Essayons d'expliquer dans les grandes lignes la stratégie de G. Zábřádí dans [Záb18b] en caractéristique p . Il fixe $\alpha \in \Delta$ arbitraire et D dans la catégorie d'arrivée. Le gros de la preuve consiste à prouver que le module $D_{\alpha} = \cap_{\beta \neq \alpha} (E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}}((X_{\alpha})) \otimes_{E_{\Delta}} D)^{\varphi_{\beta} = \text{Id}}$ est un objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_{+, \alpha}, E_{\alpha})$ (autrement dit un (φ, Γ) -module classique sur la variable α) avec une action de $G_{\mathbb{Q}_p, \Delta \setminus \{\alpha\}}$ qui commute à cette dernière structure. Il a également besoin que

$$E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}}((X_{\alpha})) \otimes_{E_{\alpha}} D_{\alpha} \rightarrow E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}}((X_{\alpha})) \otimes_{E_{\Delta}} D \quad (*4)$$

soit un isomorphisme, et enfin que D_{α} soit contenu dans $E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}, +}[[X_{\alpha}][X_{\Delta}^{-1}] \otimes_{E_{\Delta}} D$ (nous verrons juste après pourquoi c'est important). C'est ce dernier point qui force Zábřádí à être très précautionneux dans ses constructions et à passer à une structure des modules sur des anneaux d'entiers, des éléments bornés, etc, pour pouvoir garantir

le caractère "uniformément borné en $(X_\beta)_{\beta \neq \alpha}$ " des coefficients, que souligne le dernier point. À partir de là, il pose V la représentation de $G_{\mathbb{Q}_p, \alpha}$ obtenue par l'équivalence de Fontaine univariable à partir de D_α et la munit de l'action de $G_{\mathbb{Q}_p, \Delta \setminus \{\alpha\}}$ induite depuis D_α pour en faire un élément de $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$. Le \mathbb{F}_p -espace vectoriel V est de même dimension que la E_α -dimension de D_α , qui vaut le rang de D grâce à l'isomorphisme de comparaison (*4). Il démontre une suite d'inclusions

$$\begin{aligned} E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V &\hookrightarrow (E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}+} [[X_\alpha]] [X_\Delta^{-1}] \otimes_{E_\alpha} E_\alpha^{\text{sep}}) \otimes_{\mathbb{F}_p} V \\ &\cong E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}+} [[X_\alpha]] [X_\Delta^{-1}] \otimes_{E_\alpha} (E_\alpha^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V) \\ &\cong E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}+} [[X_\alpha]] [X_\Delta^{-1}] \otimes_{E_\alpha} (E_\alpha^{\text{sep}} \otimes_{E_\alpha} D_\alpha) \\ &\cong E_\alpha^{\text{sep}} \otimes_{E_\alpha} (E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}+} [[X_\alpha]] [X_\Delta^{-1}] \otimes_{E_\alpha} D_\alpha) \\ &\hookrightarrow E_\alpha^{\text{sep}} \otimes_{E_\alpha} (E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}+} [[X_\alpha]] [X_\Delta^{-1}] \otimes_{E_\Delta} D) \\ &\cong (E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}+} [[X_\alpha]] [X_\Delta^{-1}] \otimes_{E_\alpha} E_\alpha^{\text{sep}}) \otimes_{E_\Delta} D \end{aligned}$$

pour lesquelles nous avons la plupart des clefs (hors arguments de platitude) et où l'on a utilisé de manière cruciale le dernier point entre la quatrième et la cinquième ligne pour ne pas devoir remplacer $E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}+} [[X_\alpha]] [X_\Delta^{-1}]$ par $E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}}((X_\alpha))$. Il passe aux invariants par $H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ pour obtenir une injection

$$\mathbb{D}(V) \hookrightarrow (E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}+} [[X_\alpha]] [X_\Delta^{-1}] \otimes_{E_\alpha} E_\alpha^{\text{sep}})^{H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}} \otimes_{E_\Delta} D$$

et c'est ici que l'importance du troisième point se manifeste : si

$$(E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}+} [[X_\alpha]] [X_\Delta^{-1}] \otimes_{E_\alpha} E_\alpha^{\text{sep}})^{H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}} = E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^+ [[X_\alpha]] [X_\Delta^{-1}] = E_\Delta$$

cela n'aurait pas été le cas de $(E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}}((X_\alpha)) \otimes_{E_\alpha} E_\alpha^{\text{sep}})^{H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}} = E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}((X_\alpha))$. Enfin, dernière subtilité, les modules $\mathbb{D}(V)$ et D ayant même rang, le quotient $D/\mathbb{D}(V)$ est un objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_{+, \Delta}, E_\Delta)$ de rang nul. L'action de Γ_Δ permet de conclure qu'il est nul en utilisant le lemme 2.3.16 (l'argument est similaire à celui de la preuve du théorème 2.3.15 ; nous ne nous y étendons donc pas à ce stade).

Remarquons que la preuve par les espaces perfectoïdes dans [CKZ] semble fournir, pour un corps perfectoïde E de caractéristique p , une équivalence directement entre $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{E, \Delta}$ et $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\prod_{\alpha \in \Delta} \varphi_\alpha^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta})$. Nul besoin, semblerait-il, d'utiliser de manière subtile l'action de Γ_Δ dans le cas spécifique du corps de normes imparfait.

2.2 Calcul de cohomologie par le complexe de Herr

Suivant [PZ21], nous allons montrer que la cohomologie d'une représentation V de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ se calcule à partir du complexe de Herr associé à $\mathbb{D}(V)$ dont nous donnerons la définition au fur et à mesure de la preuve.

Par la suite, h^\bullet désignera la cohomologie d'un complexe de cochaînes alors que H_{cont}^\bullet désignera la cohomologie des groupes continue donnée par les foncteurs dérivés de la prise d'invariants dans la catégorie des G -modules discrets.

Définition 2.2.1. On fixe une fois pour toutes un ordre strict total $<$ sur Δ . Pour D un groupe abélien munit d'une action de $\prod_{\alpha \in \Delta} \varphi_\alpha^{\mathbb{Z}}$, on définit le complexe de cochaînes suivant

$$\Phi^\bullet(D) : 0 \rightarrow D \rightarrow \sum_{\alpha \in \Delta} D \rightarrow \dots \rightarrow \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_k} D \rightarrow \dots$$

où les morphismes entre la copie de D associée à $(\alpha_1 < \dots < \alpha_k)$ et celle associée à $(\beta_1 < \dots < \beta_{k+1})$ est donnée par 0 si $\{\alpha_i\} \not\subseteq \{\beta_j\}$ et par $(-1)^l (\text{Id} - \varphi_{\beta_l})$ si $\{\beta_j\} = \{\alpha_i\} \cup \{\beta_l\}$.

Définition 2.2.2. Grâce à [Záb18b, Proposition 4.9] que nous avons redémontré au passage dans le théorème 2.1.11, on peut définir pour un objet V de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$

$$\mathbb{D}^{\text{sep}}(V) = \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_\Delta^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V \cong \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_\Delta^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}} \mathbb{D}(V).$$

Il en découle une égalité $(\mathbb{D}^{\text{sep}}(V))^{H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}} = \mathbb{D}(V)$.

Pour parler de la cohomologie continue, nous avons besoin d'une catégorie avec assez d'injectifs ; nous considérons donc la catégorie $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ des limites inductives filtrantes d'objets de $\text{Rep}_{\text{tors}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$.

Proposition 2.2.3. *La catégorie $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ possède assez d'injectifs.*

Démonstration. Le foncteur d'oubli, exact, depuis la catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ des \mathbb{Z}_p -modules discrets avec action linéaire continue de $G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ vers $\text{Mod}_{\mathbb{Z}_p}[G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}]$ a un adjoint à droite, qui à V associe l'ensemble des vecteurs lisses. Le lemme [Proe] montre donc que $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ possède assez d'injectifs.

Le foncteur d'oubli, exact, de $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ vers $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ a un adjoint à droite qui à V associe les vecteurs de torsions. Le lemme [Proe] montre donc que $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ possède assez d'injectifs. \square

Remarque 2.2.4. Attention, a priori les modules de $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ ne sont pas divisibles comme \mathbb{Z}_p -modules, la catégorie n'est donc pas $\text{Mod}_{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}[G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}]$.

Le produit tensoriel et les invariants commutant aux colimites, les foncteurs \mathbb{D} et \mathbb{V} aussi et ils se généralisent en une équivalence de catégories entre $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ et $\mathcal{D}^{\text{pro-ét}}(T_{+, \Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta})$.

Essayons dans un premier temps d'interpréter la cohomologie $h^\bullet(\Phi^\bullet(\mathbb{D}(V)))$.

Lemme 2.2.5. *La suite $0 \rightarrow V \rightarrow \Phi^\bullet(\mathbb{D}^{\text{sep}}(V))$ est exacte.*

Démonstration. Étape 1 : montrons que pour tout $|\Delta|$, l'application $\text{Id} - \varphi_\alpha : E_\Delta^{\text{sep}} \rightarrow E_\Delta^{\text{sep}}$ est surjective de noyau $E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}}$. On suit la stratégie de preuve de [Záb18b, Lemme 4.4].

L'inclusion de $E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}}$ dans le noyau est limpide puisque φ_α est défini comme étant l'identité dessus. Dans l'autre sens, on remarque que pour toute $E'_\beta = \mathbb{F}_{q_\beta}((X'_\beta))|_{E_\beta}$ extensions finies séparables, on a une inclusion équivariante

$$E'_\Delta \hookrightarrow \left(E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{q_\alpha} \right) ((X'_\alpha)).$$

En prenant les invariants à droite et en identifiant le terme de plus petit degré en X'_α , on se rend compte que ce terme doit être nul et son coefficient invariant. Il en découle une inclusion de $E_{\Delta}^{\text{sep}} \varphi_\alpha = \text{Id}$ dans $(E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{q_\alpha})^{\varphi_\alpha = \text{Id}}$. En écrivant \mathbb{F}_{q_α} comme un module libre sur \mathbb{F}_p avec une base (e_i) telle que le Frobenius laisse $e_0 = 1$ fixe et permute circulairement les autres, on trouve $E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}}$ comme invariants.

Pour la surjectivité, prenons à nouveau $c \in E'_\Delta$. On peut trouver un entier k tel que $c \in X_\Delta^{\prime-k} E_\Delta^{\prime+} = \otimes_{\beta, \mathbb{F}_p} \widehat{X_\beta^{\prime-k} E_\beta^{\prime+}}$. On écrit alors $c = \sum_{n \geq 0} b_{\alpha, n} \otimes c_{\alpha, n}$ avec $c_{\alpha, n} \in X_\alpha^{\prime-k} E_\alpha^{\prime+}$ et $b_{\alpha, n} \in X_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\prime-k} E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\prime+}$ avec $b_{\alpha, n}$ tendant vers 0. Le morphisme φ_α sur $E_\alpha^{\prime+}$ envoie l'idéal maximal sur sa puissance p -ième : par complétude $\text{Id} - \varphi_\alpha$ est surjectif sur l'idéal maximal $X_\alpha^{\prime+} E_\alpha^{\prime+}$. On prend un système de représentant \mathcal{U} de $X_\alpha^{\prime-k} E_\alpha^{\prime+}$ et on considère $E_\alpha^{\prime+}|_{E'_\alpha}$ finie séparable, corps de scindage simultané des polynômes $T^p - T + u$ pour $u \in \mathcal{U}$. Pour tout entier n , il existera $d_{\alpha, n} \in X_\alpha^{\prime-k} E_\alpha^{\prime+}$ tel que $c_{\alpha, n} - (\text{Id} - \varphi_\alpha)(d_{\alpha, n}) \in X_\alpha^{\prime+} E_\alpha^{\prime+}$. En particulier, on peut supposer que $c_{\alpha, n} = (\text{Id} - \varphi_\alpha)(d_{\alpha, n}) = 0$ et les $d_{\alpha, n}$ ont des valuations bornées dans l'extension finie séparable $E_\alpha^{\prime+}|_{E_\alpha}$. L'élément c apparaît comme image de $\sum_{n \geq 0} b_{\alpha, n} \otimes d_{\alpha, n}$ qui appartient bien à E_{Δ}^{sep} .

Étape 2 : montrons le résultat pour $V = \mathbb{F}_p$ par récurrence sur $|\Delta|$. Pour $|\Delta| = 1$,

En degré 0, le groupe $h^0(\Phi^\bullet(E_\Delta^{\text{sep}}))$ est constitué des invariants sous tous les φ_β , et la proposition 2.1.8 conclut.

Effectuons une récurrence sur $|\Delta|$ pour les degrés supérieurs. Le cas $|\Delta| = 1$ provient de ce que

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow E^{\text{sep}} \xrightarrow{x \mapsto x - x^p} E^{\text{sep}} \rightarrow 0$$

est exacte. Supposons le résultat vrai en cardinal inférieur à $|\Delta|$ et $i \geq 1$. Prenons $(x_{\alpha_i})_{\alpha_1 < \dots < \alpha_r}$ un cocycle en degré r . Pour tout indice tel que $\alpha \in \{\alpha_i\}$, il existe un unique indice $\beta_1 < \dots < \beta_{r-1}$ tel que $\{\alpha_i\} = \{\alpha\} \cup \{\beta_j\}$. Pour chacun, prenons grâce à la première étape un y_{β_j} tel que $(\text{Id} - \varphi_\alpha)(y_{\beta_j}) = \pm x_{\alpha_i}$ où le signe est choisi pour que la flèche de la copie indexée par $\beta_1 < \dots < \beta_{r-1}$ vers $\alpha_1 < \dots < \alpha_r$ envoie y_{β_j} sur x_{α_i} . Aucun des indices $\beta_1 < \dots < \beta_{r-1}$ considérés ne contiennent α , donc les seules flèches non nulles de ces indices vers les indices contenant α sont celles précédemment considérées. De fait, le cocycle $(x_{\alpha_i}) - d^{r-1}(y_{\beta_j})$ est nul sur les composantes dont l'indice contient α (l'élément y_{β_j} est nul pour les indices contenant α). Si maintenant $\alpha'_1 < \dots < \alpha'_r$ est un ensemble d'indice ne contenant pas α , la composante sur $\alpha'_1 < \dots < \alpha < \dots < \alpha'_r$ de $d^r((x_{\alpha_i}))$ est une somme où tous les termes sauf un viennent d'indices contenant α . La condition de cobord livre l'égalité

$$0 = d^r((x_{\alpha_i}))_{\alpha'_i, \alpha} = \pm(\text{Id} - \varphi_\alpha)(x_{\alpha'_i})$$

et on en déduit que toutes les composantes de x sont invariantes par φ_α . De fait, x peut se voir comme un cocycle de degré r dans $\Phi^\bullet(E_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{\text{sep}})$. L'hypothèse de récurrence conclut.

Étape 3 : on tensorise le complexe exact $0 \rightarrow \mathbb{F}_p \rightarrow \Phi^\bullet(\mathbb{D}^{\text{sep}}(\mathbb{F}_p))$ par V qui est plat sur \mathbb{F}_p . On obtient alors le complexe exact pour V de p -torsion quelconque.

Étape 4 : pour toute famille d'extensions finies séparables $E'_\alpha|E_\alpha$, l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}$ est sans torsion sur l'anneau principal \mathbb{Z}_p , et par conséquent plat sur \mathbb{Z}_p . Il en résulte que $V \mapsto \mathbb{D}^{\text{sep}}(V)$ est exact, puis que $V \mapsto \Phi^\bullet(\mathbb{D}^{\text{sep}}(V))$ est exact.

Par dévissage à partir de l'étape 3, le lemme est vrai pour chaque représentation de p^h -torsion : par récurrence, il faut écrire la suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte de complexes obtenue depuis $0 \rightarrow pV \rightarrow V \rightarrow V/pV \rightarrow 0$. On passe enfin à la colimite, qui est exacte pour obtenir le lemme en toute généralité. \square

Lemme 2.2.6. *Les modules $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'_\Delta}}/p^h \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'_\Delta}}$ sont acycliques pour la $H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ -cohomologie continue.*

Démonstration. Par dévissage, on se ramène au cas $h = 1$, soit à E_Δ^{sep} .

Les $\prod \text{Gal}(E_\alpha^{\text{sep}}|E'_\alpha)$ pour $E'_\alpha|E_\alpha$ finies séparables forment une base de voisinages de l'identité dans $H_{\mathbb{Q}_p, V}$. De fait, la proposition A.0.4 permet d'écrire

$$H_{\text{cont}}^i(H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, E_\Delta^{\text{sep}}) = \lim_{\rightarrow} H^i\left(\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(E_\alpha^{\text{sep}}|E'_\alpha), (E_\Delta^{\text{sep}})^{\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(E_\alpha^{\text{sep}}|E'_\alpha)}\right) = \lim_{\rightarrow} H^i\left(\prod \text{Gal}(E_\alpha^{\text{sep}}|E'_\alpha), E'_\Delta\right).$$

On s'est donc ramené à prouver que E'_Δ est acyclique pour la $\text{Gal}(E_\alpha^{\text{sep}}|E'_\alpha)$ -cohomologie.

Par théorème de la base normale, chaque E'_α s'écrit $E_\alpha[\text{Gal}(E'_\alpha|E_\alpha)]$. On utilise alors l'isomorphisme du lemme 2.1.10 et récursivement l'isomorphisme S -linéaire de G -équivalent $R[G] \otimes_R S \cong S[G]$ obtenu pour tout morphisme d'anneaux $R \rightarrow S$ et tout groupe fini G pour obtenir que E'_Δ est isomorphe à $E_\Delta[\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(E'_\alpha|E_\alpha)]$ comme $E_\Delta[\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(E'_\alpha|E_\alpha)]$ -module. C'est un module induit, donc acyclique. \square

Proposition 2.2.7. *Pour tout objet V de $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$, on a en tout degré un isomorphisme naturel de Γ_Δ -représentations*

$$h^\bullet \Phi^\bullet(\mathbb{D}(V)) \cong H_{\text{cont}}^\bullet(H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, V).$$

Démonstration. Pour tout objet V de $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$, on peut écrire $\mathbb{D}^{\text{sep}}(V)$ comme colimite indexée par h des

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'_\Delta}}/p^h \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'_\Delta}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}/p^h \mathcal{O}_{\mathcal{E}'_\Delta}} \mathbb{D}(V)$$

qui sont tous acycliques comme somme directe de copies de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'_\Delta}}/p^k \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}'_\Delta}}$ dans la catégorie des $H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ -représentations. La représentation $\mathbb{D}^{\text{sep}}(V)$ est une colimite d'objets acycliques : elle est elle-même acyclique. Le lemme 2.2.5 montre alors que le complexe $\Phi^\bullet(\mathbb{D}^{\text{sep}}(V))$ est une résolution acyclique de V pour l'action de $H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$. La $H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ -cohomologie de V peut alors se calculer comme suit

$$\begin{aligned} H_{\text{cont}}^\bullet(H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, V) &= h^\bullet\left([\Phi^\bullet(\mathbb{D}^{\text{sep}}(V))]^{H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}}\right) \\ &= h^\bullet(\Phi^\bullet(\mathbb{D}^{\text{sep}}(V))^{H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}}) \\ &= h^\bullet(\Phi^\bullet(\mathbb{D}(V))) \end{aligned}$$

\square

Il faut à présent introduire l'action de Γ_Δ . Pour ce faire, nous supposons pour plus de facilité que $p > 2$. Le groupe topologique Γ_Δ est alors topologiquement engendré par les $\gamma_\alpha = (1, \dots, c(1+p), \dots, 1)$ où c est un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Définition 2.2.8. Pour un \mathbb{Z}_p -module B munit d'une action de Γ_Δ , le complexe de cochaînes $\Gamma_\Delta^\bullet(B)$ sera

$$\Gamma_\Delta^\bullet(B) : 0 \rightarrow B \rightarrow \sum_{\alpha \in \Delta} B \rightarrow \dots \rightarrow \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_k} B \rightarrow \dots$$

où les morphismes entre la copie de B associée à $(\alpha_1 < \dots < \alpha_k)$ et celle associée à $(\beta_1 < \dots < \beta_{k+1})$ est donnée par 0 si $\{\alpha_i\} \not\subseteq \{\beta_j\}$ et par $(-1)^l(\text{Id} - \gamma_{\beta_l})$ si $\{\beta_j\} = \{\alpha_i\} \cup \{\beta_l\}$.

Proposition 2.2.9. Soit B un \mathbb{Z}_p -module discret de torsion avec une action de Γ_Δ . Les cohomologies $h^\bullet \Gamma_\Delta^\bullet(B)$ et $H_{\text{cont}}^\bullet(\Gamma_\Delta, B)$ sont naturellement isomorphes.

Démonstration. Étape 1 : pour $n = 0$, $h^0(\Gamma_\Delta^\bullet(B)) = B^{(\gamma_\alpha)}$ qui vaut $B^{\Gamma_\Delta} = H_{\text{cont}}^0(\Gamma_\Delta, B)$ puisque l'action est continue et que les γ_α sont des générateurs topologiques.

Étape 2 : Le cas $|\Delta| = 1$ pour B fini, disons de p^h -torsion.

Le cas $n = 0$ est déjà traité.

Pour $n = 1$, on réutilise la proposition A.0.4 et en notant $\Gamma_{\Delta, n}$ le sous-groupe d'indice $(p-1)p^n$ de Γ_Δ qui forment une base de voisinages, on peut écrire

$$H_{\text{cont}}^1(\Gamma_\Delta, B) = \lim_{\rightarrow} H^1(\Gamma_\Delta/\Gamma_{\Delta, n}, B^{\Gamma_{\Delta, n}}).$$

Or, le quotient $\Gamma_\Delta/\Gamma_{\Delta, n}$ est cyclique donc $H^1(\Gamma_\Delta/\Gamma_{\Delta, n}, B^{\Gamma_{\Delta, n}})$ se calcule comme $\text{Ker}(N)/\text{Im}(\text{Id} - \gamma)$ où $N = \sum_{g \in \Gamma_\Delta/\Gamma_{\Delta, n}} g$. Comme B est fini, il existe k tel que γ^{p^k} agit trivialement sur B . En particulier, sur B on a $N = p^k \sum_{g \in \Gamma_\Delta/\Gamma_{\Delta, n-k}} g$. Pour $n \geq k \geq h$, l'endomorphisme N est nul sur B et

$$H^1(\Gamma_\Delta/\Gamma_{\Delta, n}, B^{\Gamma_{\Delta, n}}) = B^{\Gamma_{\Delta, n}}/\text{Im}(\text{Id} - \gamma) = h^1(\Gamma_\Delta(B^{\Gamma_{\Delta, n}})).$$

En passant à la limite inductive on trouve l'égalité pour B .

Pour $n \geq 2$ et pour $|\Delta| = 1$, le complexe a seulement deux termes non nuls. Puisque B est un groupe abélien p -primaire, il suffit donc de prouver que la p -dimension cohomologique de Γ_Δ est inférieure à 1. Elle est inférieure à la somme des p -dimension cohomologiques de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ et de $1 + p\mathbb{Z}_p$. La première est nulle puisque $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est d'ordre premier à p . La deuxième est la dimension cohomologique de \mathbb{Z}_p , égale à 1. En particulier, on trouve que $H_{\text{cont}}^n(\Gamma_\Delta, B) = \{0\}$. C'est aussi le cas pour $h^n(\Gamma_\Delta^\bullet(B))$ dont le complexe s'annule au-delà du degré 2 inclus.

Étape 3 : le cas $|\Delta| = 1$ général s'en déduit par commutation des deux foncteurs cohomologiques aux colimites.

Étape 4 : montrons pour $|\Delta|$ arbitraire que les injectifs B dans les \mathbb{Z}_p -modules discrets de torsion munis d'une action continue de Γ_Δ sont acycliques pour $h^\bullet(\Gamma_\Delta^\bullet(\cdot))$. Il s'agit d'une récurrence sur $|\Delta|$ dont on a établi l'initialisation.

Pour faire la récurrence, on choisit $\alpha \in \Delta$ et on pose $\Gamma_{\Delta \setminus \{\alpha\}} = \Gamma_\Delta/\Gamma_\alpha$ canoniquement isomorphe à $\prod_{\beta \neq \alpha} \mathbb{Z}_p^\times$. La cohomologie $h^\bullet \Gamma_\Delta^\bullet(B)$ s'identifie alors à la cohomologie du complexe total venant du double complexe $\Gamma_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^\bullet(\Gamma_\alpha^\bullet(B))$. On utilise la suite spectrale associée : la première page donne $\Gamma_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^p(h^q \Gamma_\alpha^\bullet(B))$, qui vaut $\Gamma_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^p(H_{\text{cont}}^q(\Gamma_\alpha, B))$ grâce à l'étape 3. Les $H_{\text{cont}}^q(\Gamma_\alpha, B)$ sont munis naturellement d'une action de $\Gamma_{\Delta \setminus \{\alpha\}}$ qui donne la suite spectrale de Hochschild-Serre associée au sous-groupe distingué $\Gamma_\alpha \triangleleft \Gamma_\Delta$ dont la deuxième page vaut $H_{\text{cont}}^p(\Gamma_{\Delta \setminus \{\alpha\}}, H_{\text{cont}}^q(\Gamma_\alpha, B))$ convergeant vers $H_{\text{cont}}^\bullet(\Gamma_\Delta, B)$ (voir le théorème A.0.7). En utilisant le cas de $\Delta \setminus \{\alpha\}$ sur les $H_{\text{cont}}^q(\Gamma_\alpha, B)$, la deuxième page de notre suite spectrale $\Gamma_\alpha^\bullet(\Gamma_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^\bullet(B))$ vaut $H_{\text{cont}}^p(\Gamma_{\Delta \setminus \{\alpha\}}, H_{\text{cont}}^q(\Gamma_\alpha, B))$, i.e. la deuxième page de la suite spectrale de Hochschild-Serre. La convergence de cette dernière suite conclut. \square

C'est un complexe faisant intervenir les deux structures (Frobenius et action galoisienne) qui va nous calculer la cohomologie.

Définition 2.2.10. Le complexe de Herr $\Phi \Gamma_\Delta^\bullet(V)$ pour une représentation $V \in \text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ est le complexe total du double complexe indexé par \mathbb{N}^2 donné par $\Gamma_\Delta^\bullet(\Phi^\bullet(\mathbb{D}(V)))$.

Théorème 2.2.11. Pour un objet V de $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$, avec $p \neq 2$, on a isomorphisme $H_{\text{cont}}^\bullet(G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, V) = h^\bullet(\Phi \Gamma_\Delta^\bullet(V))$.

Démonstration. Pour le degré 0, pour tout objet V , par définition du double complexe

$$\begin{aligned} h^0(\Phi \Gamma_\Delta^\bullet(\mathbb{D}(V))) &= h^0(\Phi^\bullet(\mathbb{D}(V))) \cap h^0(\Gamma_\Delta^\bullet(\mathbb{D}(V))) \\ &= V^{H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}} \cap \mathbb{D}(V)^{\Gamma_\Delta} \end{aligned}$$

grâce aux propositions 2.2.9 et 2.2.7. De plus, l'action de Γ_Δ sur $V^{H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}}$ est celle induite par l'injection $V^{H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}} \hookrightarrow \mathbb{D}(V)$, d'où l'identification de l'intersection avec $V^{G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}}$. Nous nous sommes convaincu, sans que cela ne serve vraiment, de l'identification en degré nul.

Les suites spectrales associées au double complexe $\Phi^\bullet \Gamma_\Delta^\bullet(\mathbb{D}(V))$ donnent en particulier que la suite spectrale de page 0 égale à $\Gamma_\Delta^p(\Phi^q(\mathbb{D}(V)))$ converge vers la cohomologie du complexe double. Les Frobenius et l'action de Γ_Δ commutent, donc la cohomologie du complexe $\Gamma_\Delta^p(\Phi^\bullet(\mathbb{D}(V)))$ est égale à $\Gamma_\Delta^p(h^\bullet(\Phi^\bullet(\mathbb{D}(V))))$. La première page de notre suite spectrale est donc

$$\Gamma_\Delta^p(h^q(\Phi^\bullet(\mathbb{D}(V)))) = \Gamma_\Delta^p(H_{\text{cont}}^q(H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, V))$$

d'après la proposition 2.2.7. Les $H_{\text{cont}}^q(H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, B)$ sont munis naturellement d'une action de Γ_Δ qui donne la suite spectrale de Hochschild-Serre associée au sous-groupe distingué $H_{\mathbb{Q}_p, \Delta} \triangleleft G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$ dont la deuxième page vaut $H_{\text{cont}}^p(\Gamma_\Delta, H_{\text{cont}}^q(H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, B))$ convergeant vers $H_{\text{cont}}^\bullet(G_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, B)$. En utilisant la proposition 2.2.9 sur les $H_{\text{cont}}^q(H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, B)$, la deuxième page de notre suite spectrale $\Phi^\bullet(\Gamma_\Delta^\bullet(B))$ vaut $H_{\text{cont}}^p(\Gamma_\Delta, H_{\text{cont}}^q(H_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, B))$, i.e. la deuxième page de la suite spectrale de Hochschild-Serre. La convergence de cette dernière suite conclut. \square

2.3 Le foncteur D_Δ^\vee pour $GL_n(\mathbb{Q}_p)$

Cette section et la suivante se fondent sur l'article de Gergeley Zábbrádi [Záb18a].

2.3.1 Notations

Pour la suite, on généralise la notation de la section 1.5 en $G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$. Le corps L est toujours une extension finie de \mathbb{Q}_p d'uniformisante ϖ . Prenons également h un entier supérieur à 1. On pose $A = \mathcal{O}_L / \varpi^h \mathcal{O}_L$.

Par représentation de torsion, on entend dans la suite un A -module muni d'une action linéaire lisse de G . Puisque A est discret, la lissité équivaut au fait que tous les stabilisateurs soient ouverts.

Remarque 2.3.1. L'entier h étant fixé, pour tout A -module M et pour tout morphisme dans $\text{Hom}_{\mathcal{O}_L}(M, L/\mathcal{O}_L)$, l'image du morphisme est contenue dans $\varpi^{-h} \mathcal{O}_L / \mathcal{O}_L$. La postcomposition par la multiplication par ϖ^h fournit alors un isomorphisme naturel entre le dual de Pontryagin et $\text{Hom}_A(M, A)$. Dans cette section et la suivante, le foncteur $\text{Hom}_A(\cdot, A)$ est encore appelé dual de Pontryagin et demeure exact depuis la catégorie des A -modules.

Donnons des noms aux différents éléments qui interviendront dans l'arithmétique de G . Nous donnons le plus souvent des expressions explicites, mais gardant simultanément un vocabulaire plus théoriques qui permettent de généraliser la construction à un groupe G réductif, scindé sur \mathbb{Q}_p , de centre connexe. La preuve ne serait pas très différente, hormis la définition desdits éléments.

Définition 2.3.2. On note B le Borel canonique formé des matrices triangulaires supérieures, le tore T formé des matrices diagonales, le sous-groupe N de B constitué des matrices unipotentes. Les racines du plus grand sous-groupe de Lie distingué semi-simple, ici $SL_n(\mathbb{Q}_p)$, sont notées Φ . Dans le cas de G , on les paramètre par les couples d'entiers $(i \neq j)_{1 \leq i, j \leq n}$ où l'action sur l'algèbre de Cartan $T \cap SL_n(\mathbb{Q}_p)$ est donnée par le caractère $t \mapsto t_i t_j^{-1}$. Les racines positives sont notées Φ^+ et sont paramétrées dans notre cas par les couples d'entiers $(i < j)_{1 \leq i, j \leq n}$. On note $u_\alpha : \mathbb{Q}_p \rightarrow N$ un isomorphisme de \mathbb{Q}_p avec l'espace associé à la racine α : pour la racine $(i < j)$, ce sera canoniquement $x \mapsto \text{Id} + x E_{i, j}$. On note $n_\alpha = u_\alpha(1)$. Le produit des $u_\alpha(\mathbb{Z}_p)$ est noté N_0 : c'est le groupe des matrices unipotentes de B à coefficients dans \mathbb{Z}_p .

On note $\Delta = \{(i < i + 1) \mid 1 \leq i \leq n - 1\}$ les racines simples.

Posons

$$\delta : N \rightarrow \mathbb{Q}_p^\Delta, \quad n \mapsto (n_{i, i+1})_{1 \leq i \leq n-1}$$

qui est un morphisme de groupes continu, dont on note $H_\Delta \triangleleft N$ le noyau et $H_{\Delta, 0} \triangleleft N_0$ l'intersection du noyau avec N_0 . Appelons $N_{\Delta, 0}$ le quotient $N_0 / H_{\Delta, 0}$, isomorphe à \mathbb{Z}_p^Δ .

Dans le cas de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, l'anneau qui apparaissait dans l'équivalence de Fontaine était reconstruit à partir de $N_0 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme dans la proposition B.1.5. Ici, nous reconstruisons l'anneau à $|\Delta|$ variables qui apparaît pour la correspondance entre les (φ, Γ) -modules étales à $|\Delta|$ variables et les représentations de p^h -torsion d'un produit de groupes de Galois $\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p} | \mathbb{Q}_p)$. Il se trouve que l'algèbre d'Iwasawa $A[[N_{\Delta, 0}]]$ est exactement l'anneau souhaité, comme montré en proposition B.1.2.

Définition 2.3.3. Définissons également T_+ le monoïde des éléments de $t \in T$ tels que pour toute racine positive $\alpha = (i < j)$, on a $\alpha(t) = t_i t_j^{-1} \in \mathbb{Z}_p$. C'est le monoïde des éléments dont les valuations décroissent sur la diagonale. On note T_0 son sous-groupe maximal, i.e. les matrices diagonales à coefficients dans \mathbb{Z}_p^\times multipliées par une homothétie. Pour toute famille $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ d'entiers p -adiques non nuls, il existe un élément $t_{(\gamma_\alpha)} \in T_+$ tel que pour tout $\alpha' \in \Delta$ $\alpha'(t_{(\gamma_\alpha)}) = x_{\alpha'}$. Il est unique à élément du centre près. Dans le cas de G , on fixe pour $t_{(\gamma_\alpha)}$ la matrice diagonale de dernier coefficient 1 et dont les quotients de coefficients successifs sont les γ_α .

Des éléments particuliers correspondant aux racines simples seront distingués : la matrice obtenue dans le cas de $(\gamma_\alpha) = (p^{\mathbb{1}_{\alpha=\beta}})$ sera notée t_β .

Remarque 2.3.4. Le monoïde T_+ est engendré par $T_0 \cong (\mathbb{Z}_p^\times)^n \times \mathbb{Q}_p^\times$ et les éléments t_α .

Définition 2.3.5. La définition de T_+ assure exactement que N_0 est stable par conjugaison par $t \in T_+$. En effet, la conjugaison par un élément t du tore correspond à la multiplication de chaque coefficient d'indice $(i < j)$ par $\alpha(t)$ où $\alpha = (i < j) \in \Phi^+$. La conjugaison étant continue, et $H_{\Delta,0}$ étant distingué dans N_0 , on en déduit un endomorphisme φ_t de $A[[N_{\Delta,0}]]$. La famille des $(\varphi_t)_{t \in T_+}$ fournit une action du monoïde T_+ . Par ailleurs, la proposition B.1.2 prouve que $\varphi_\alpha = \varphi_{t_\alpha}$ est le Frobenius classique associé à la variable X_α via l'isomorphisme $A[[N_{\Delta,0}]] = A[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]]$. Plus explicitement, ces Frobenius sont les seuls endomorphismes de A -algèbres continus pour la topologie (\underline{X}) -adique tels que pour tous $\alpha, \beta \in \Delta$, on a

$$\varphi_\alpha(X_\beta) = (1 + X_\beta)^{p^{\mathbb{1}_{\alpha=\beta}}} - 1.$$

Plus généralement, l'action de $t_{(\gamma_\alpha)}$ est donnée par

$$\varphi_{t_{(\gamma_\alpha)}}(X_\beta) = (1 + X_\beta)^{\gamma_\beta} - 1$$

où cette dernière expression est définie comme dans la définition 1.2.45.

Définition 2.3.6. On définit l'anneau

$$A((N_{\Delta,0})) = A[[N_{\Delta,0}]] [X_\alpha^{-1} \mid \alpha \in \Delta] = A[[N_{\Delta,0}]] [X_\Delta^{-1}]$$

où $X_\Delta = \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$. Il est isomorphe aux séries de Laurent en $|\Delta|$ variables. On le munit d'une action de T_+ via la localisation des φ_t que l'on appelle encore φ_t .

Remarque 2.3.7. Le monoïde T_+ n'est pas exactement le monoïde $T_{+,\Delta}$ apparaissant dans l'équivalence de Fontaine multivariable. Il conserve en son sein les homothéties. Bien que les φ_t associés sur $A((N_{\Delta,0}))$ soient triviaux, la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$ présente tout de même une action de ces homothéties, ce qui se traduirait, si l'on veut passer à $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_{+,\Delta}, A((N_{\Delta,0})))$ par l'oubli d'un "caractère central", ce qui était le cas pour le foncteur de Colmez.

2.3.2 Construction du foncteur

Pour construire le foncteur \mathbf{D}_Δ^\vee , il nous faut tout d'abord définir les T_+ -modules étales sur $A((N_{\Delta,0}))$ et se pencher sur l'arithmétique de cet anneau.

Définition 2.3.8. On rappelle que pour un module M sur $A[[N_{\Delta,0}]]$, le module $\varphi_t^* M$ est défini comme

$$\varphi_t^* M = A[[N_{\Delta,0}]] \otimes_{\varphi_t, A[[N_{\Delta,0}]]} M.$$

L'indice φ_t signifie que le produit tensoriel est réalisé par rapport à la structure de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module sur $A[[N_{\Delta,0}]]$ fournie par φ_t , i.e. que $x \otimes (ym) = (x\varphi_t(y)) \otimes m$. La même définition s'applique en remplaçant $A[[N_{\Delta,0}]]$ par $A((N_{\Delta,0}))$.

Définition 2.3.9. On définit la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$ comme en définition 1.1.4 avec $(\varphi_t)_{t \in T_+}$ comme morphisme de monoïdes de T_+ dans $\text{End}(A((N_{\Delta,0})))$. Pour simplifier les notations, on appellera F_t l'endomorphisme φ_t -semi-linéaire sur un objet M , sans plus faire mention du module en question, mais en utilisant la lettre F pour le distinguer de l'endomorphisme de $A((N_{\Delta,0}))$. On rappelle que la condition d'égalité impose que M est de type fini que que les linéarisés F_t^* sont isomorphiques.

Remarque 2.3.10. Soient t_1, t_2 des éléments de T_+ . Puisque $\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1 t_2}$, il existe un isomorphisme naturel en M

$$\nu_{t_1, t_2, M} : \varphi_{t_1 t_2}^* M \xrightarrow{\sim} \varphi_{t_1}^* (\varphi_{t_2}^* M), \quad x \otimes m \mapsto x \otimes (1 \otimes m).$$

Le morphisme $F_{t_1}^* \circ (\varphi_{t_1}^* F_{t_2}^*) \circ \nu_{t_1, t_2, M}$ envoie alors $x \otimes m$ sur

$$\begin{aligned} (F_{t_1}^* \circ (\varphi_{t_1}^* F_{t_2}^*))(x \otimes 1 \otimes F_{t_2}(m)) &= F_{t_1}^*(x \otimes F_{t_1}(m)) \\ &= x F_{t_1}(F_{t_2}(m)) \\ &= F_{t_1 t_2}^*(x \otimes m) \end{aligned}$$

Le linéarisé $F_{t_1 t_2}^*$ est donc un isomorphisme dès que $F_{t_1}^*$ et $F_{t_2}^*$ le sont. Puisque T_0 et les $(t_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ engendrent T_+ , la condition d'étalité se vérifie sur T_0 et chaque t_α . De surcroît, le monoïde T_0 est un groupe, ce qui implique que les F_t^* sont automatiquement inversibles pour $t \in T_0$: en effet, le morphisme $(\varphi_t^* F_{t^{-1}}^*) \circ \nu_{t, t^{-1}, M}$ est l'inverse de F_t^* . La condition d'étalité se vérifie de fait sur chaque t_α .

Pour la construction qui suit, il nous faut d'abord regarder d'un peu plus près la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta, 0})))$. L'anneau A est artinien. De fait, l'anneau $A[[N_{\Delta, 0}]]$ est noethérien et l'anneau $A((N_{\Delta, 0}))$ est encore noethérien comme localisation d'un anneau noethérien. Pour $A = \kappa$, le corps des fractions $K((N_{\Delta, 0}))$ de $\kappa((N_{\Delta, 0}))$ existe, il est plat sur $\kappa((N_{\Delta, 0}))$. De fait l'application

$$\text{lg}_{\kappa((N_{\Delta, 0}))} : M \mapsto \dim_{K((N_{\Delta, 0}))} K((N_{\Delta, 0})) \otimes_{\kappa((N_{\Delta, 0}))} M$$

est additive sur les suites exactes de $\kappa((N_{\Delta, 0}))$ -modules de type fini.

Définition 2.3.11. On définit la longueur d'un $A((N_{\Delta, 0}))$ -module de type fini M comme

$$\text{lg}(M) = \sum_{k \geq 0} \text{lg}_{\kappa((N_{\Delta, 0}))}(\varpi^k M / \varpi^{k+1} M)$$

où la somme est finie puisque nous sommes sur A .

Lemme 2.3.12. La longueur est additive sur les suites exactes. De plus, on a $\text{lg}(M) = \text{lg}(\varphi_t^* M)$

Démonstration. Voir[Záb18a, Lemme 2.4]. □

Suivant les idées de la construction pour $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, puis leur première généralisation par C. Breuil dans [Bre15], nous considérons des modules sur l'anneau non commutatif $A[[N_{\Delta, 0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta]$ où les F_α commutent entre eux et où la multiplication par F_α est φ_α -semi-linéaire (i.e. pour tout $x \in A[[N_{\Delta, 0}]]$, on a $F_\alpha x = \varphi_\alpha(x) F_\alpha$). On munit cet anneau non commutatif d'une action de T_+ en prenant l'action précédente sur $A[[N_{\Delta, 0}]]$ et en décrétant qu'elle laisse les F_α fixes.

Remarque 2.3.13. Il est possible de voir une structure de $A((N_{\Delta, 0}))$ -modules avec action de T_+ comme une structure de $A((N_{\Delta, 0})) [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta]$ -module avec une action semi-linéaire de T_0 .

Lemme 2.3.14. Soit M un $A[[N_{\Delta, 0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta]$ -module et $t \in T_+$. Il existe un isomorphisme naturel

$$j_M : (\varphi_t^* M)^\vee \rightarrow \varphi_t^*(M^\vee), \quad \mu \mapsto \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta, 0}/tN_{\Delta, 0}t^{-1})} u \otimes \mu(u^{-1} \otimes \cdot)$$

De plus, cet isomorphisme ne dépend pas du choix des représentants.

On appelle également j_M l'isomorphisme $(\varphi_t^* M)^\vee [X_\Delta^{-1}] \cong \varphi_t^*(M^\vee [X_\Delta^{-1}])$ obtenu en localisant en X_Δ puis en postcomposant par $(\varphi_t^* N) [X_\Delta^{-1}] \cong \varphi_t^*(N [X_\Delta^{-1}])$ qui provient du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A[[N_{\Delta, 0}]] & \longrightarrow & A((N_{\Delta, 0})) \\ \downarrow \varphi_t & & \downarrow \varphi_t \\ A[[N_{\Delta, 0}]] & \longrightarrow & A((N_{\Delta, 0})) \end{array}$$

Démonstration. Si $u' = utnt^{-1}$ alors

$$\begin{aligned}
u' \otimes \mu(u'^{-1} \otimes \cdot) &= u' \otimes \mu(u^{-1} \otimes n^{-1} \cdot) \\
&= u' \otimes n^{-1} \mu(u^{-1} \otimes \cdot) \\
&= u' t n^{-1} t^{-1} \otimes \mu(u^{-1} \otimes \cdot) \\
&= u \otimes \mu(u^{-1} \otimes \cdot)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que le morphisme défini ne dépend pas du choix des représentants.

Même si c'est la formule barbare sous forme de somme que nous allons utiliser dans la suite, le morphisme dans l'autre sens est plus aisé à intuitier. Supposons que le représentant de la classe de l'identité est effectivement l'identité. On va utiliser l'inverse à gauche distingué ψ_t de φ_t sur $A((N_{\Delta,0}))$ que l'on peut définir comme

$$\psi_t \left(\sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \varphi_t(x_u) \right) = x_{\text{Id}}.$$

Cet inverse nous fournit un morphisme dans l'autre sens

$$k_M : \varphi_t^*(M^\vee) \rightarrow (\varphi_t^*M)^\vee, \quad x \otimes \lambda \mapsto [y \otimes m \mapsto \lambda(\psi_t(xy)m)].$$

Commençons par montrer que k_M arrive bien dans $(\varphi_t^*M)^\vee$. L'image de $x \otimes \lambda$ est évidemment A -linéaire. De plus,

$$\begin{aligned}
k_M(x \otimes \lambda)(y \otimes zm) &= \lambda(\psi_t(xy)zm) \\
&= \lambda(\psi_t(xy)\varphi_t(z)m) \\
&= k_M(x \otimes \lambda)(\varphi_t(z)y \otimes m)
\end{aligned}$$

Comme ψ_t et λ sont additives, on a également la bilinéarité. Cela montre que $k_M(x \otimes \lambda)$, qui est a priori définie depuis le $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module libre engendré par les $(y \otimes m)$, se factorise en réalité par φ_t^*M . Prouvons ensuite que k_M , vue comme application depuis le $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module libre engendré par les $x \otimes \lambda$ se factorise bien par $\varphi_t^*(M^\vee)$. Nous évinçons les calculs d'additivité et nous nous contentons des deux calculs de linéarité :

$$\begin{aligned}
k_M(zx \otimes \lambda)(y \otimes m) &= \lambda(\psi_t(xyz)m) \\
&= k_M(x \otimes \lambda)(zy \otimes m) \\
&= k_M(x \otimes \lambda)(z(y \otimes m)) \\
&= (zk_M(x \otimes \lambda))(y \otimes m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_M(x \otimes z\lambda)(y \otimes m) &= (z\lambda)(\psi_t(xy)m) \\
&= \lambda(z\psi_t(xy)m) \\
&= \lambda(\psi_t(\varphi_t(z)xy)m) \\
&= k_M(\varphi_t(z)x \otimes \lambda)(y \otimes m)
\end{aligned}$$

L'application j_M est bien définie puisque $\mu(u \otimes \cdot)$ est A -linéaire, assez évidemment additive. Il est possible d'éviter la preuve de sa $A[[N_{\Delta,0}]]$ -linéarité : ce sera évident une fois que l'on aura prouvé que c'est l'inverse de k_M .

On rappelle que si ψ_t est l'inverse à gauche particulier de φ_t sur $A[[N_{\Delta,0}]]$, pour tout couple de représentants (u, u') on a $\psi_t(uu'^{-1}) = \delta_{u,u'}$. D'un côté, pour tout v dans les représentants choisis et tout λ dans M^\vee , on a

$$\begin{aligned}
(j_M(k_M(v \otimes \lambda)))(y \otimes m) &= \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \otimes k_M(v \otimes \lambda)(u^{-1} \otimes m) \\
&= \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \otimes \lambda(\psi_t(vu^{-1})m) \\
&= v \otimes \lambda(m)
\end{aligned}$$

puisque $\psi_t(vu^{-1}) = 0$ dès que $u \neq v$. Ces éléments engendrant $\varphi_t^*(M^\vee)$ comme groupe abélien, on a prouvé que $j_M \circ k_M = \text{Id}$

De l'autre côté, pour tout $\mu \in (\varphi_t^* M)^\vee$, tout représentant choisi v et tout $m \in M$, on obtient

$$\begin{aligned} (k_M(j_M(\mu)))(v^{-1} \otimes m) &= \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} (k_M(u \otimes \mu(u^{-1} \otimes \cdot)))(v^{-1} \otimes m) \\ &= \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} \mu(u^{-1} \otimes \psi(uv^{-1})m) \\ &= \mu(v^{-1} \otimes m) \end{aligned}$$

car un seul des termes est non nul. Les éléments auxquels on a évalué engendrant $\varphi_t^* M$ comme A -module et $k_M(j_M(\mu))$ étant A -linéaire, on a prouvé que $k_M \circ j_M = \text{Id}$. \square

Théorème 2.3.15. *Soit M un module de type fini sur $A[[N_{\Delta,0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta]$ avec une action semi-linéaire de T_0 . On suppose que l'action de $A[[N_{\Delta,0}]]$ sur M donnée par la multiplication est lisse (i.e. l'annulateur de tout élément est ouvert) et admissible (le dual de Pontryagin est de type fini sur $A[[N_{\Delta,0}]]$). Alors, le module $M^\vee[X_\Delta^{-1}]$ est naturellement muni d'une structure d'objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$ en définissant l'action de $t \in T_+$ comme l'inverse de la composée*

$$M^\vee[X_\Delta^{-1}] \xrightarrow{(F_\alpha^*)^\vee} (\varphi_\alpha^* M)^\vee[X_\Delta^{-1}] \xrightarrow{j_M} \varphi_\alpha^*(M^\vee[X_\Delta^{-1}]) \quad (2.1)$$

qui est bijective.

Par la suite, nous aurons besoin à plusieurs reprises du lemme technique suivant, qui servira à la preuve du théorème.

Lemme 2.3.16. *Les seuls idéaux de $\kappa((N_{\Delta,0}))$ stables par l'action de T_0 sont $\{0\}$ et $\kappa((N_{\Delta,0}))$.*

Démonstration. Pour ne pas surcharger la lecture, la preuve est reléguée en annexe C. \square

Deuxième lemme pratique pour la preuve du théorème :

Lemme 2.3.17. *l'endomorphisme φ_t de $A((N_{\Delta,0}))$ est plat.*

Démonstration. L'endomorphisme φ_t de $A[[N_{\Delta,0}]]$ fait de $A[[N_{\Delta,0}]]$ un $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module libre : il est plat. De plus, si M est un $A((N_{\Delta,0}))$ -module, le morphisme naturel

$$A[[N_{\Delta,0}]] \otimes_{A[[N_{\Delta,0}], \varphi_t]} M \hookrightarrow A((N_{\Delta,0})) \otimes_{A((N_{\Delta,0}), \varphi_t)} M$$

est un isomorphisme. En effet, un élément $(\frac{y}{X_\Delta^n}) \otimes m$ au but vaut

$$\left(\frac{y \frac{\varphi_t(X_\Delta^n)}{X_\Delta^n}}{\varphi_t(X_\Delta^n)} \right) \otimes m$$

où le numérateur appartient à $A[[N_{\Delta,0}]]$. Donc $(\frac{y}{X_\Delta^n}) \otimes m$ est l'image de $(y \frac{\varphi_t(X_\Delta^n)}{X_\Delta^n}) \otimes \frac{m}{X_\Delta^n}$. \square

Démonstration de 2.3.15. La remarque 2.3.10 montre que l'étalement pour t dans T_0 est toujours automatique, et munit $M^\vee[X_\Delta^{-1}]$ d'une structure de module avec action étalement de T_0 via $t \cdot \lambda = \lambda(t^{-1} \cdot)$. Il nous reste donc les t_α à étudier.

On considère comme dans l'énoncé la composée

$$M^\vee[X_\Delta^{-1}] \xrightarrow{(F_\alpha^*)^\vee} (\varphi_\alpha^* M)^\vee[X_\Delta^{-1}] \xrightarrow{j_M} \varphi_\alpha^*(M^\vee[X_\Delta^{-1}]) \quad (2.2)$$

Nous voudrions un isomorphisme dans l'autre sens.

Étape 1 : supposons d'abord que $A = \kappa$ est un corps. Commençons par prouver que $(F_\alpha^*)^\vee$ est injectif. Sur le conoyau C de F_α^* (qui existe a priori, M n'est pas supposé étalement), l'endomorphisme F_α est nul. Ainsi, la structure de $\kappa[[N_{\Delta,0}]] [F_\beta \mid \beta \in \Delta]$ -module sur C se factorise en une structure de $\kappa[[N_{\Delta,0}]] [F_\beta \mid \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}]$ -module, pour laquelle C est encore de type fini : en effet, toute famille génératrice de M est génératrice du noyau comme

$\kappa[[N_{\Delta,0}]] [F_{\beta} \mid \beta \in \Delta]$ -module, et encore comme $\kappa[[N_{\Delta,0}]] [F_{\beta} \mid \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}]$ -module puisque la multiplication par F_{α} est nulle. De plus, C est lisse comme $\kappa[[N_{\Delta,0}]]$ -module. Cela veut dire que pour tout élément m , il existe un $[n_{\alpha}]^{p^n}$ qui agisse trivialement sur m : autrement dit m est de $(1 + X_{\alpha})^{p^n} - 1 = X_{\alpha}^{p^n}$ -torsion. Puisque C est de type fini et que X_{α} est dans le centre de $\kappa[[N_{\Delta,0}]] [F_{\beta} \mid \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}]$, on peut choisir n tel que $X_{\alpha}^{p^n} C = \{0\}$. La suite exacte

$$\varphi_{\alpha}^*(M) \xrightarrow{F_{\alpha}^*} M \rightarrow C$$

donne, par exactitude du dual de Pontryagin, puis par platitude de la localisation une suite exacte

$$C^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}] \rightarrow M^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}] \xrightarrow{(F_{\alpha}^*)^{\vee}} (\varphi_{\alpha}^* M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]$$

dont le premier terme est nul puisque C^{\vee} est de $X_{\alpha}^{p^n}$ -torsion. L'injectivité de $(F_{\alpha}^*)^{\vee}$ s'en déduit.

D'après le lemme 2.3.12, le morphisme injectif $j_M \circ (F_{\alpha}^*)^{\vee}$ a pour source et but deux modules de même rang. En particulier, son conoyau, de type fini, est également de torsion. Il en découle que l'anneau de ce conoyau est un idéal non nul de $\kappa((N_{\Delta,0}))$, stable par l'action de T_0 puisque $j_M \circ (F_{\alpha}^*)^{\vee}$ est T_0 -équivariant. D'après le lemme 2.3.16, cet anneau est donc $\kappa((N_{\Delta,0}))$ et notre conoyau est trivial. La surjectivité de $j_M \circ (F_{\alpha}^*)^{\vee}$ s'en déduit.

Étape 2 : l'initialisation étant effectuée, on peut établir le résultat par récurrence sur h . Supposons le résultat vrai pour $A = \mathcal{O}_L / \varpi^h \mathcal{O}_L$. L'action de T_+ est A -linéaire, ce qui permet d'écrire une suite exacte de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -modules avec action de T_+ dont les morphismes sont T_+ -équivariants

$$0 \rightarrow \varpi^h M / \varpi^{h+1} M \rightarrow M / \varpi^{h+1} M \rightarrow M / \varpi^h M \rightarrow 0$$

L'exactitude du dual de Pontryagin et de la localisation en tirent une suite exacte

$$0 \rightarrow (\varpi^h M / \varpi^{h+1} M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}] \rightarrow (M / \varpi^{h+1} M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}] \rightarrow (M / \varpi^h M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}] \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, le lemme 2.3.17 permet d'obtenir enfin une suite exacte

$$0 \rightarrow \varphi_{\alpha}^*((\varpi^h M / \varpi^{h+1} M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]) \rightarrow \varphi_{\alpha}^*((M / \varpi^{h+1} M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]) \rightarrow \varphi_{\alpha}^*((M / \varpi^h M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]) \rightarrow 0$$

La construction des "inverses de Frobenius" dans l'équation 2.2 étant naturelle, on obtient un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes et dont les flèches verticales sont justement ces "inverses de Frobenius" :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \varphi_{\alpha}^*((\varpi^h M / \varpi^{h+1} M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]) & \longrightarrow & \varphi_{\alpha}^*((M / \varpi^{h+1} M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]) & \longrightarrow & \varphi_{\alpha}^*((M / \varpi^h M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & (\varpi^h M / \varpi^{h+1} M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}] & \longrightarrow & (M / \varpi^{h+1} M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}] & \longrightarrow & (M / \varpi^h M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}] \longrightarrow 0 \end{array}$$

Le lemme des cinq conclut à l'égalité par hypothèse de récurrence (les termes de gauche et de droite sont de ϖ^h -torsion). \square

Remarque 2.3.18. Le Frobenius sur le dual est défini de manière implicite comme un inverse. cependant le cas agréable où M est un module étale demeure plus agréable. Il existe alors un inverse à gauche distingué de F_t sur M défini comme suit : prenons à nouveau une famille de représentants $\mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})$ de $N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1}$ contenant l'identité et posons $G_t(\sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u F_t(m_u)) = m_{\text{Id}}$. Pour λ dans M^{\vee} , nous pouvons calculer l'image par "l'inverse du Frobenius" de $\lambda \circ G_t$. Cette image vaut

$$j_M(\lambda \circ G_t \circ F_t^*) = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \otimes \lambda(G_t(u^{-1} F_t(\cdot))) = 1 \otimes \lambda$$

d'où $F_t(\lambda) = \lambda \circ G_t$.

On utilisera cependant cette proposition dans des cas moins limpides, voire quand F_t est nilpotent, ce qui nous donne des informations additionnelles.

Pour une représentation de torsion Π de G , restreignons l'action au Borel. Le module $\Pi^{H_{\Delta,0}}$ est muni d'une action lisse de $N_{\Delta,0}$, i.e. d'une structure de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module lisse. Il nous reste à obtenir des Frobenius semi-linéaires. Le sous-groupe $H_{\Delta,0}$ est stable par conjugaison par $t \in T_+$, sans que la conjugaison soit un automorphisme.

Lemme 2.3.19. Posons $\mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})}$ un système de représentants. Pour $m \in \Pi^{H_{\Delta,0}}$, l'élément $ut \cdot m$ ne dépend pas du choix du représentant u . De plus,

$$F_t(m) = \sum_{u \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})}} ut \cdot m$$

est invariant par $H_{\Delta,0}$ et fournit un endomorphisme φ_t -semi-linéaire de $\Pi^{H_{\Delta,0}}$.

La famille des $(F_t)_{t \in T_+}$ fournit une action du monoïde T_+ .

Démonstration. Si m est invariant par $H_{\Delta,0}$, alors $t \cdot m$ est invariant par $tH_{\Delta,0}t^{-1}$. Ainsi, l'élément $ut \cdot m$ ne dépend pas du choix du représentant.

Pour tout $v \in H_{\Delta,0}$,

$$\begin{aligned} vF_t(m) &= \sum_{u \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})}} v(ut \cdot m) \\ &= \sum_{u \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})}} (vu)(t \cdot m) \end{aligned}$$

La multiplication à gauche par \bar{v} est une bijection des classes de $H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1}$. Par conséquent, toujours pour $m \in \Pi^{H_{\Delta,0}}$, on obtient

$$v \cdot F_t(m) = F_t(m)$$

ce qui prouve que F_t stabilise $\Pi^{H_{\Delta,0}}$.

L'additivité ne pose aucun souci.

Pour vérifier la semi-linéarité, posons $x \in A[[N_{\Delta,0}]]$, alors

$$\begin{aligned} F_t(xm) &= \sum_{u \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})}} ut \cdot (xm) \\ &= \sum_{u \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})}} u(txt^{-1})t \cdot m \\ &= \sum_{u \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})}} (txt^{-1})(txt^{-1})^{-1}u(txt^{-1})t \cdot m \\ &= (txt^{-1})F_t(m) \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de ce que la conjugaison par $tx^{-1}t^{-1} \in tN_0t^{-1}$ est un automorphisme de $H_{\Delta,0}$ et de $tH_{\Delta,0}t^{-1}$. On obtient une action de tN_0t^{-1} sur les classes $H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1}$

Enfin, soient $t_1, t_2 \in T_+$.

$$\begin{aligned} F_{t_1 t_2} &= \sum_{u \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/t_1 t_2 H_{\Delta,0} t_2^{-1} t_1^{-1})}} ut_1 t_2 \\ &= \sum_{u_1 \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/t_1 H_{\Delta,0} t_1^{-1})}} \sum_{v \in \mathcal{R}^{(t_1 H_{\Delta,0} t_1^{-1}/t_1 t_2 H_{\Delta,0} t_1^{-1} t_2^{-1})}} u_1 v t_1 t_2 \\ &= \sum_{u_1 \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/t_1 H_{\Delta,0} t_1^{-1})}} \sum_{u_2 \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/t_2 H_{\Delta,0} t_2^{-1})}} u_1 (t_1 u_2 t_1^{-1}) t_1 t_2 \\ &= \sum_{u_1 \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/t_1 H_{\Delta,0} t_1^{-1})}} \sum_{u_2 \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/t_2 H_{\Delta,0} t_2^{-1})}} u_1 t_1 \cdot u_2 t_2 \\ &= \sum_{u_1 \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/t_1 H_{\Delta,0} t_1^{-1})}} ut_1 \cdot \left(\sum_{u_2 \in \mathcal{R}^{(H_{\Delta,0}/t_2 H_{\Delta,0} t_2^{-1})}} u_2 t_2 \right) \\ &= F_{t_1} \circ F_{t_2} \end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.20. Pour $t \in T_0$, la conjugaison par t est un automorphisme de N_0 et il n'y a qu'un seul terme dans la somme, i.e. l'action de T_0 laisse $\Pi^{H_{\Delta,0}}$ stable et c'est cette action qui définit F_t .

Définition 2.3.21. Soit $\mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})$ la catégorie dont les objets sont les sous- $A[[N_{\Delta,0}]] [F_{\alpha} | \alpha \in \Delta]$ -sous-modules de $\Pi^{H_{\Delta,0}}$ stables par les $(F_t)_{t \in T_0}$ vérifiant les conditions du théorème 2.3.15, et où les morphismes sont les inclusions. Ledit théorème fournissant un foncteur contravariant de la catégorie $\mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})$ vers $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$, elle nous permet de définir

$$\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}(\Pi) = \varprojlim_{M \in \mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})^{\text{op}}} M^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}].$$

qui est un T_+ -module pro-étale.

Remarque 2.3.22. La construction fonctionne pour un A -module avec action lisse de N_0 et une action semi-linéaire de T_+ (par rapport à la structure de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module induite). On appellera encore $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}$ la construction dans ce cadre.

2.3.3 Functorialité et étude de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$

Définissons la catégorie source du foncteur de Zábrádi. C'est essentiellement une catégorie de représentations de torsion, auxquelles il faut rajouter une hypothèse supplémentaire pour garantir plus tard des propriétés agréables pour ledit foncteur.

Définition 2.3.23. Les objets de la catégorie $\text{Rep}_{\varpi^h\text{-tors}} G$ sont les A -modules Π munis d'une action lisse de $G = \text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et tels que $\mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})$ est dénombrable. Ses morphismes sont les morphismes de A -modules G -équivalents.

Remarque 2.3.24. La catégorie des représentations lisses et admissibles de G sur A est une sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_{\varpi^h\text{-tors}} G$. En effet, pour une telle représentation Π , on a que $\Pi = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Pi^{K_n}$ où $K_n = \{M \in \text{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \mid M \in \text{Id} + p^n \text{M}_n(\mathbb{Q}_p)\}$. Par admissibilité, les sous-modules Π^{K_n} sont de types finis sur A . Le module Π est de cardinal dénombrable. Les objets de $\mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})$ s'injectant dans les famille finies d'éléments de Π (ce sont des $A[[N_{\Delta,0}]] [F_{\alpha} | \alpha \in \Delta]$ -modules de type fini), ils ont un cardinal au plus dénombrable.

Il n'est pour l'instant pas évident pourquoi nous imposons cette condition supplémentaire sur les représentations. A posteriori, nous en aurons besoin pour pouvoir utiliser Mittag-Leffler dans les sections qui suivront. Toutefois, on peut déjà voir cette hypothèse comme une analogue de l'admissibilité dans la section 1.5 où nous définissons le foncteur de Colmez.

Définition 2.3.25. La catégorie $\mathcal{D}^{\text{pro-ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$ est la catégorie des $A((N_{\Delta,0}))$ -modules munis d'une action semi-linéaire de T_+ , pro-étales (i.e. limite projective de modules dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$). Les morphismes sont les morphismes de $A((N_{\Delta,0}))$ -modules qui sont T_+ -équivalents.

Si nous avons déjà défini le foncteur $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}$ sur les objets, son action sur les morphismes reste à étudier.

Proposition 2.3.26. Si $f : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ est un morphisme dans $\text{Rep}_{\varpi^h\text{-tors}} G$, et si $M \in \mathcal{M}_{\Delta}(\Pi_1^{H_{\Delta,0}})$, alors $f(M) \in \mathcal{M}_{\Delta}(\Pi_2^{H_{\Delta,0}})$.

Démonstration. Le morphisme f est G -équivalent, ce qui entraîne qu'il se restreint correstreint en un morphisme de $A[[N_{\Delta,0}]] [F_{\alpha} | \alpha \in \Delta]$ de $\Pi_1^{H_{\Delta,0}}$ vers $\Pi_2^{H_{\Delta,0}}$. Si M est de type fini sur $A[[N_{\Delta,0}]] [F_{\alpha} | \alpha \in \Delta]$, alors $f(M)$ aussi puisque f est équivalent, donc devient un morphisme de $A[[N_{\Delta,0}]] [F_{\alpha} | \alpha \in \Delta]$ -modules de $\Pi_1^{H_{\Delta,0}}$ dans $\Pi_2^{H_{\Delta,0}}$. Le dual de Pontryagin étant exact, on se retrouve avec une le module $f(M)^{\vee}$ s'identifie à un sous- $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module de M^{\vee} , de type fini par noethérianité de $A[[N_{\Delta,0}]]$. \square

Corollaire 2.3.27. On peut voir $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}$ comme un foncteur contravariant de la catégorie $\text{Rep}_{\varpi^h\text{-tors}} G$ vers la catégorie $\mathcal{D}^{\text{pro-ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$.

Démonstration. Pour un morphisme f , la proposition précédente prouve que pour tout $M \in \mathcal{M}_{\Delta}(\Pi_1^{H_{\Delta,0}})$, il existe un élément $f(M) \in \mathcal{M}_{\Delta}(\Pi_2^{H_{\Delta,0}})$ et un morphisme $f(M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}] \rightarrow M^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]$ qui soit fonctoriel en M . En passant à la limite et en précomposant par le morphisme de $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}(\Pi_1)$ vers $\varprojlim_{M \in \mathcal{M}_{\Delta}(\Pi_1^{H_{\Delta,0}})^{\text{op}}} f(M)^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]$ on a

bien construit $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}(f)$.

La commutation à la composition ne pose pas de problème. \square

Remarque 2.3.28. On rappelle que d'après la proposition 1.1.5, en utilisant la noéthérianité de $A((N_{\Delta,0}))$ et la platitude des φ_t , la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$ est abélienne

Tout ceci nous permet de considérer par la suite les noyaux et conoyaux dans la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$. Le foncteur $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}$ peut à présent se voir comme un foncteur additif.

2.3.4 Liens avec le foncteur de Colmez

Dans cette sous-section, l'entier n vaut 2, ce qui correspond à $G = \text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Le foncteur \mathbf{D} , construit dans la section 1.5 par P. Colmez, s'avère être un cas particulier du foncteur de Zábřádí dont nous venons de détailler la construction. On pose Π un objet de $\text{Rep}_{\text{tors}} G$ de ϖ^h -torsion (rappelons que la condition est a priori plus forte que l'appartenance à $\text{Rep}_{\varpi^h\text{-tors}} G$ que nous venons de définir puisque la construction du premier chapitre demande l'admissibilité et non la condition de dénombrabilité abstraite).

Lemme 2.3.29. *Soit W une présentation standard de Π . Alors, le module $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ appartient à $\mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})$.*

Démonstration. Pour $n = 2$, le sous-groupe $H_{\Delta,0}$ est vide. Il en découle que $\Pi^{H_{\Delta,0}} = \Pi$ et que l'action de Hecke sur ce dernier est simplement l'action de $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le fait d'être de $A[[N_{\Delta,0}]] [F_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta]$ -type fini correspond au fait d'être de type fini comme $A[\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}] [\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$ -module (ne pas oublier que toutes les actions sont lisses). Cela correspond exactement au fait d'être de type fini comme $A[G_0]$ -module. Toute famille génératrice de W comme A -module est une famille génératrice de $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ comme $A[G_0]$ -module ce qui conclut.

Reste l'admissibilité. Or, le [Col10, Th. IV.2.1] montre que pour toute représentation absolument irréductible admissible et lisse, il existe une présentation standard W_0 telle que $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ est admissible comme $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module. Dans la démonstration de la proposition 1.5.16, il avait été prouvé que pour $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W^{[1]}) \rightarrow I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}$ est de conoyau fini. On en déduit que $(I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W^{[1]}))^{\vee}$ est de type fini comme $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module dès que $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ l'est. Par récurrence, le module $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_0^{[n]})$ est admissible pour tout entier naturel n . Tout $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ étant contenu dans un $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W_0^{[n]})$, on en déduit qu'il est admissible.

En général, si $0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_2$ est une suite exacte de représentations, comme dans la preuve du théorème 1.5.31, il existe des présentations standards W_1 (resp. W et W_2) telle que la suite $0 \rightarrow I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi_1}(W_1) \rightarrow I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W) \rightarrow I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi_2}(W_2) \rightarrow 0$ est exacte. Les $A[[N_{\Delta,0}]]$ -modules admissibles étant stables par extension, on en déduit que la propriété "pour toute présentation standard de Π , le module $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ appartient à $\mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})$ " est stable par extension. On en déduit par récurrence sur le nombre de facteurs de Jordan-Hölder de Π que pour toute présentation standard W , le module $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ est admissible. \square

Lemme 2.3.30. *Tout $M \in \mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})$ est contenu dans un module de type $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ pour une certaine présentation standard W .*

Démonstration. Soit $(m_i)_{i \in I}$ une famille finie qui engendrent M comme $A[[N_{\Delta,0}]] [F]$ -module et soit W une présentation standard arbitraire. Il existe un entier k tel que pour tout i on a $m_i \in W^{[k]}$. En prenant les $A[G_0]$ -modules engendrés, on obtient que $M \subseteq I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W^{[k]})$. La proposition 1.5.11 conclut que $W^{[k]}$. \square

Les lemmes précédents impliquent que la sous-catégorie pleine des modules $M \in \mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})$ qui s'écrivent $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ est cofinale dans $\mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})$ ce qui donne un isomorphisme naturel de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -modules

$$\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}(\Pi) \cong \varprojlim_{W \in \text{PrStan}(\Pi)^{\text{op}}} (I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W))^{\vee} [X^{-1}].$$

Théorème 2.3.31. *En identifiant le $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module de droite dans l'égalité précédente à $\mathbf{D}(\Pi)$ (tous les termes y sont isomorphes), l'isomorphisme précédent devient un isomorphisme dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ entre $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}(\Pi)$ et $\mathbf{D}(\Pi)$.*

Démonstration. La structure de $A((N_{\Delta,0}))$ -module fournie par la construction de P. Colmez sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D_W^{\natural}(\Pi)$ correspond à celle fournie par la structure de G. Zábřádí. Il reste à prouver que les Frobenius sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D_W^{\natural}(\Pi)$ fournis par les constructions de P. Colmez et de G. Zábřádí coïncident. Pour $\mu \in (I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W))^{\vee}$ qui s'annule sur W , dont on rappelle que l'on peut le prolonger par 0 par λ , le Frobenius est défini par le foncteur de Colmez comme l'image de $\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\vee}(\lambda)$ dans $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)_0^{\vee} [X^{-1}] = \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D_W^+(\Pi)$. On note ν sa restriction à $I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)$ dont on veut montrer qu'elle est le Frobenius de μ pour la construction de Zábřádí.

Il suffit de vérifier que "l'inverse du Frobenius" sur $(I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W))^\vee[X^{-1}]$ envoie ν sur $1 \otimes \mu$. Nous avons déjà explicité cet inverse comme $\nu \mapsto \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/\xi(p)N_{\Delta,0}\xi(p)^{-1})} u \otimes \nu(u^{-1}F_t(\cdot))$, i.e. dans notre cas

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \nu \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \right) &= \sum_{i=0}^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \lambda \left(\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \right) \Big|_{I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \lambda \left(\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \right) \Big|_{I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)} \end{aligned}$$

Pour finir, remarquer que pour $i \neq 0$, on a $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_0 \subseteq G_1$ donc que $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W) \subseteq G_1 \cdot W$. La forme linéaire $\lambda \left(\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \right) \Big|_{I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)}$ est nulle puisque $\lambda \in I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)_0^\vee$. L'image de ν est exactement $1 \otimes \mu$.

Nous avons prouvé la coïncidence des Frobenius pour les $\mu \in I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)$ qui s'annulent sur W . Nous avons déjà prouvé dans la section 1.5 qu'ils engendraient $\mathbf{D}(\Pi)$ comme \mathcal{O}_ε -module. \square

2.3.5 Liens avec le foncteur de Breuil

Le foncteur de Zábrádi s'articule sur le même principe de construction que le foncteur de Breuil dans [Bre15]. Nous détaillons brièvement la construction de ce dernier foncteur. Soit N_1 le noyau de

$$l : N_0 \rightarrow \mathbb{Z}_p, \quad n \mapsto \sum_i n_{i,i+1}$$

qui est la somme des coefficients surdiagonaux. Cette flèche se factorise par δ : on a donc la suite de sous-groupes distingués $H_{\Delta,0} \triangleleft N_1 \triangleleft N_0$. Breuil munit Π^{N_1} d'une structure de $A[[X]][F]$ -module avec action semi-linéaire de Γ de manière analogue au cas multivariable : la structure de $A[[X]]$ -module est obtenue via l'action lisse de $\mathbb{Z}_p \cong N_0/N_1$, l'action de Hecke F avec le même style de somme qu'en 2.3.19 en sommant sur les classes $N_1/t_{p,ldots,p}N_1t_{p,ldots,p}^{-1}$, action de Γ via l'action de conjugaison des matrices $t_{(x,\dots,x)}$ qui laisse stable N_1 . Il prouve de même que les sous- $A[[X]][F]$ -modules M de type fini, lisses et admissibles comme $A[[X]]$ -modules produisent un (φ, Γ) -module étale sur $A[[X]]$ via $M^\vee[X^{-1}]$. On note $\mathcal{M}(\Pi^{N_1})$ la catégorie de ces modules. Enfin, Breuil définit son foncteur comme

$$\mathbf{D}_\xi^\vee(\Pi) = \varprojlim_{M \in \mathcal{M}(\Pi^{N_1})^{\text{op}}} M^\vee[X^{-1}].$$

On trouvera dans [Bre15] les propriétés similaires à celles que nous avons démontré ou démontrerons pour le foncteur de Zábrádi. La comparaison entre ces deux foncteurs sera un outil puissant pour simplifier parfois les arguments grâce au cas plus facile à traiter d'une seule variable.

La restriction à une variable

Le morphisme factorisé $l : N_{\Delta,0} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ induit un morphisme continu d'algèbres $l : A[[N_{\Delta,0}]] \rightarrow A[[X]]$ dont le noyau est $(X_\alpha - X_\beta)_{\alpha \neq \beta}$, correspondant au noyau $\prod (u_\alpha/u_\beta)(\mathbb{Z}_p)$ de l . Étant continu, le morphisme l s'étend en un morphisme surjectif $l : A((N_{\Delta,0})) \rightarrow A((X))$ ayant également pour noyau $(X_\alpha - X_\beta)_{\alpha \neq \beta}$, qui correspond à l'identification de toutes les variables à X .

De plus, pour $\gamma \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ on note $\xi(\gamma)$ l'élément de T_+ correspondant à la suite (γ, \dots, γ) , i.e. la matrice $\text{Diag}(\gamma^{n-1}, \gamma^{n-2}, \dots, 1)$. La conjugaison par cet élément laisse stable le noyau de l . Par conséquent l'endomorphisme $\varphi_{\xi(\gamma)}$ sur $A((N_{\Delta,0}))$ se factorise par l . Pour $\gamma = p$ cette action fournit le Frobenius usuel sur $A((X))$. Pour $\gamma \in \Gamma$, cette action fournit l'action usuelle de Γ sur $A((X))$.

Si $D \in \mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$, on peut munir $A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} D$ d'un endomorphisme semi-linéaire par rapport à l'action de γ sur $A((X))$ dont le linéarisé est défini comme suit :

$$\varphi_{\xi(\gamma)}^*(A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} D) \cong A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} \varphi_{\xi(\gamma)}^* D \xrightarrow{\text{Id} \otimes F_{\xi(\gamma)}^*} A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} D$$

où la première flèche est obtenue par transitivité du produit tensoriel à partir du diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
A((N_{\Delta,0})) & \xrightarrow{l} & A((X)) \\
\downarrow \varphi_{\xi(\gamma)} & & \downarrow \varphi_{\xi(\gamma)} \\
A((N_{\Delta,0})) & \xrightarrow{l} & A((X))
\end{array}$$

Cela fournit un Frobenius φ -semi-linéaire et une action semi-linéaire de Γ qui commutent.

Lemme 2.3.32. *Soient R un anneau, un idéal maximal I de R et M un R -module sans torsion. Le morphisme de R -modules suivant est injectif*

$$M \rightarrow M_I.$$

Sans hypothèse sur la torsion, le morphisme de R/I -modules suivant est injectif

$$M/IM \rightarrow M_I/IM_I.$$

Démonstration. Soit m dans le noyau du premier morphisme. Il existe $r \in R \setminus I$ tel que $rm = 0$. Puisque M est sans torsion, cela implique que $m = 0$.

Soit \bar{m} dans le noyau du second morphisme, i.e. que $m \in IM_I$. Écrivons comme une somme finie $m = \frac{\sum i_k m_k}{r}$ avec les $i_k \in I$ et $r \notin I$. Il existe $s \notin I$ tel que $s(rm - \sum i_k m_k) = 0$ dans M ce qui entraîne que $srm \in IM$. Puisque I est maximal, on peut trouver $s' \in R$ et $i \in I$ tels que $srs' + i = 1$. Ainsi, l'élément

$$m = (srs' + i)m = s'(srm) + im \in IM$$

et $\bar{m} = 0$. □

Proposition 2.3.33. *Le foncteur $A((X)) \otimes_{l, A((N_{\Delta,0}))} \bullet$ depuis la catégorie $\mathcal{D}(T_0, A((N_{\Delta,0})))$ vers la catégorie des $A((X))$ -modules est exact et fidèle. De plus, si l'on restreint au départ à $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$, et que l'on munit l'image des endomorphismes précédents, le foncteur arrive en réalité dans la catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, A((X)))$.*

Démonstration. Par un principe de récurrence, il suffit de démontrer le résultat pour l'identification de deux variables, i.e. le quotient par $(X_\alpha - X_\beta)$ avec α et β fixés.

Démontrons d'abord l'exactitude. Soit $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow 0$ une suite exacte. L'identification des variables revient à un produit tensoriel : seule l'exactitude à gauche est à vérifier. Prenons donc $d_1 + (X_\alpha - X_\beta)D_1$ qui appartient à $(X_\alpha - X_\beta)D_2$. Posons $d_2 \in D_2$ tel que $d_1 = (X_\alpha - X_\beta)d_2$. La première suite étant exacte, on sait que l'image d_3 de d_2 est de $(X_\alpha - X_\beta)$ -torsion. Lorsque $d_3 \in \varpi^r D_3$ pour un entier r , on peut le voir dans $\varpi^r D_3 / \varpi^{r+1} D_3$ qui est un $\kappa((N_{\Delta,0}))$ -module avec action de T_0 , de type fini. Comme d'habitude, le lemme 2.3.16 nous dit qu'il est sans torsion. L'image de d_3 , qui est de torsion, est appartient de fait à $\varpi^{r+1} D_3$. Ceci étant vrai pour tout r , on conclut que $d_3 = 0$ et $d_2 \in D_1$.

Pour la fidélité, soit $f : D_1 \rightarrow D_2$ non nul. En particulier, par séparation ϖ -adique de $f(D_1)$, le module $M = f(D_1) / \varpi f(D_1)$ est non nul. La catégorie $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_0, A((N_{\Delta,0})))$ étant abélienne, le module M en est un objet. Il est même objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_0, \kappa((N_{\Delta,0})))$. Par le lemme 2.3.16, tout objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_0, \kappa((N_{\Delta,0})))$ est sans torsion. Le lemme 2.3.32 montre que le morphisme $M \rightarrow M_{(X_\alpha - X_\beta)_{\alpha \neq \beta}}$ de localisation hors de cet idéal maximal est injectif; ce localisé est non nul, de type fini sur le localisé de $\kappa((N_{\Delta,0}))$. Le lemme de Nakayama permet alors de conclure que $\frac{M_{(X_\alpha - X_\beta)_{\alpha \neq \beta}}}{(X_\alpha - X_\beta)_{\alpha \neq \beta} M_{(X_\alpha - X_\beta)_{\alpha \neq \beta}}}$ n'est pas nul. Le lemme 2.3.32 affirme de son côté que le morphisme $\frac{M}{(X_\alpha - X_\beta)_{\alpha \neq \beta} M} \rightarrow \frac{M_{(X_\alpha - X_\beta)_{\alpha \neq \beta}}}{(X_\alpha - X_\beta)_{\alpha \neq \beta} M_{(X_\alpha - X_\beta)_{\alpha \neq \beta}}}$ est injectif. Son image engendrant le but comme $\kappa((N_{\Delta,0}))_{(X_\alpha - X_\beta)_{\alpha \neq \beta}}$ -module, la source ne peut être nulle. Autrement formulé, le module $A((X)) \otimes_{l, A((N_{\Delta,0}))} M$ n'est pas nul et l'image de f non plus.

Rappelons que pour définir l'action de $\xi(\gamma)$ sur $A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} D$ pour $D \in \mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$, on considère

$$\varphi_{t_{\xi(\gamma)}}^* \left(A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} D \right) \cong A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} \varphi_{t_{\xi(\gamma)}}^* D \xrightarrow{\text{Id} \otimes F_{t_{\xi(\gamma)}}^*} \frac{A((N_{\Delta,0}))}{(X_\alpha - X_\beta)} \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} D$$

La fidélité prouve que la dernière flèche est un isomorphisme puisque $F_{t_{\xi(\gamma)}}^*$ l'est. □

Les ψ -actions

Rappelons que pour un (φ, Γ) -module étale D , on a défini la ψ -action comme

$$\psi_D \left(\sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi_D(d_i) \right) = d_i$$

qui vérifie $\psi_D(x\varphi_D(d)) = \psi_t(x)d$, inverse à gauche de φ_D .

Pour $t \in T_+$, l'anneau $A[[N_{\Delta,0}]]$ est un $\varphi_t(A[[N_{\Delta,0}]])$ -module libre. L'identification

$$\varphi_t^* D = \bigoplus_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \left(\varphi_t(A[[N_{\Delta,0}]]) \otimes_{\varphi_t, A[[N_{\Delta,0}]]} D \right)$$

nous fournit une écriture unique de tout élément $d \in D$ comme $d = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} uF_t(d_{t,u})$. Dans le cadre où l'identité appartient au système de représentants, on définit la ψ -action de t comme étant $G_t(d) := d_{t,1}$. Remarquons que si la définition de G_t dépend crucialement du représentant de $\bar{1}$ choisi, les termes de la somme décomposant d n'en dépendant pas. On définit ψ_t comme la ψ -action associée au module $A((N_{\Delta,0}))$ avec les endomorphismes φ_t .

Lemme 2.3.34. *Prouvons les identités suivantes, pour tout $d \in D$, $t, t_1, t_2 \in T_+$, u dans le système de représentant et $x \in A((N_{\Delta,0}))$:*

$$d_{t,u} = G_t(u^{-1}d)$$

$$G_t(xF_t(d)) = \psi_t(x)d$$

$$G_t(\varphi_t(x)d) = xG_t(d)$$

$$G_{t_1 t_2} = G_{t_2} \circ G_{t_1}$$

Démonstration. Première identité : on utilise les égalités

$$\begin{aligned} u^{-1}d &= u^{-1} \sum_{v \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} vF_t(d_{t,v}) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u^{-1}vF_t(d_{t,v}) \end{aligned}$$

À présent, chaque $u^{-1}v$ s'écrit $v'\varphi_t(v'')$ avec v' le représentant de $u^{-1}v$. Le seul v pour lequel v' vaut l'identité est u , le v'' est nul puisque u est dans le système de représentant, et le terme associé de la somme vaut $F_t(d_{t,u})$ soit $G_t(u^{-1}d) = d_{t,u}$.

Deuxième égalité : on écrit

$$x = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u\varphi_t(x_{t,u}) = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u\varphi_t(\psi_t(u^{-1}x))$$

où la dernière identification provient de la première identité appliquée à $A((N_{\Delta,0}))$ avec les φ_t . Cela nous fournit la décomposition

$$xF_t(d) = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u\varphi_t(\psi_t(u^{-1}x))F_t(d) = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} uF_t(\psi_t(u^{-1}x)d)$$

puis l'identité $G_t(xF_t(d)) = \psi_t(x)d$.

Troisième identité : on écrit

$$\varphi_t(x)d = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} \varphi_t(x)uF_t(d_{t,u}) = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} uF_t(xd_{t,u})$$

d'où $G_t(\varphi_t(x)d) = xd_{t,1} = xG_t(d)$.

Quatrième identité : il faut ici choisir correctement nos représentants. Si l'on a choisi deux systèmes de représentants $\mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_1N_{\Delta,0}t_1^{-1})$ et $\mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_2N_{\Delta,0}t_2^{-1})$ contenant l'identité, l'ensemble

$$\{u_1t_1u_2t_1^{-1} \mid u_1 \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_1N_{\Delta,0}t_1^{-1}), u_2 \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_2N_{\Delta,0}t_2^{-1})\}$$

est un système de représentants de $N_{\Delta,0}/t_1t_2N_{\Delta,0}(t_1t_2)^{-1}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} (G_{t_2} \circ G_{t_1})(d) &= (G_{t_2} \circ G_{t_1}) \left(\sum_{(u_1, u_2) \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_1N_{\Delta,0}t_1^{-1}) \times \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_2N_{\Delta,0}t_2^{-1})} u_1t_1u_2t_1^{-1} F_{t_1t_2}(d_{t_1t_2, u_1t_1u_2t_1^{-1}}) \right) \\ &= (G_{t_2} \circ G_{t_1}) \left(\sum_{u_1 \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_1N_{\Delta,0}t_1^{-1})} u_1 \left(\sum_{u_2 \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_2N_{\Delta,0}t_2^{-1})} t_1u_2t_1^{-1} (F_{t_1} \circ F_{t_2})(d_{t_1t_2, u_1t_1u_2t_1^{-1}}) \right) \right) \\ &= (G_{t_2} \circ G_{t_1}) \left(\sum_{u_1 \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_1N_{\Delta,0}t_1^{-1})} u_1 \left(\sum_{u_2 \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_2N_{\Delta,0}t_2^{-1})} F_{t_1}(u_2F_{t_2}(d_{t_1t_2, u_1t_1u_2t_1^{-1}})) \right) \right) \\ &= (G_{t_2} \circ G_{t_1}) \left(\sum_{u_1 \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_1N_{\Delta,0}t_1^{-1})} u_1 F_{t_1} \left(\sum_{u_2 \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_2N_{\Delta,0}t_2^{-1})} u_2 F_{t_2}(d_{t_1t_2, u_1t_1u_2t_1^{-1}}) \right) \right) \\ &= G_{t_2} \left(\sum_{u_2 \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/t_2N_{\Delta,0}t_2^{-1})} u_2 F_{t_2}(d_{t_1t_2, t_1u_2t_1^{-1}}) \right) \\ &= d_{t_1t_2, 1} \\ &= G_{t_1t_2}(d) \end{aligned}$$

□

Nous donnons ici quelques lemmes sur les ψ -actions qui seront bien utiles.

Lemme 2.3.35. Si $M \in \mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})$ alors la ψ -action sur $M^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]$ est donnée sur l'image de M^{\vee} par F_t^{\vee} où ici F_t correspond à celui sur M

Démonstration. Pour un module arbitraire D dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$, on remarque que

$$d \mapsto \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \otimes G_t(u^{-1}d)$$

est un inverse à gauche de F_t^* . En effet, tout élément de φ_t^*D s'écrit comme $\sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \otimes d_{t,u}$ et donc F_t^* l'envoie sur $\sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u F_t d_{t,u}$. On utilise la première identité du lemme 2.3.34 pour conclure.

Nous avons construit l'action de T_+ sur $M^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]$ en inversant $j_M \circ (F_t^*)^{\vee}$. Grâce à la formule explicite pour j_M , on peut expliciter $j_M \circ (F_t^*)^{\vee}$ comme la localisation de

$$M^{\vee} \rightarrow \varphi_t^*M^{\vee}, \quad \lambda \mapsto \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \otimes F_t^{\vee}(\lambda(u^{-1}\cdot)).$$

Si nous appelons G_t la ψ -action sur $M^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]$, on en déduit que pour $\lambda \in M^{\vee}$ on a l'identité suivante dans $\varphi_t^*(M^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}])$:

$$\sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \otimes F_t^{\vee}(\lambda(u^{-1}\cdot)) = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \otimes G_t(u^{-1}\lambda) = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \otimes G_t(\lambda(u\cdot))$$

En identifiant les termes sur le représentant identité dans la décomposition

$$\varphi_t^*(M^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]) = \bigoplus_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/tN_{\Delta,0}t^{-1})} u \left(\varphi_t(A((N_{\Delta,0}))) \otimes_{\varphi_t, A((N_{\Delta,0}))} M^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}] \right)$$

on obtient l'identité souhaitée.

□

Remarque 2.3.36. On obtient sans difficulté une propriété analogue pour la construction de Breuil.

Une dernière propriété pour voir ce que devient la ψ -action par identification des variables.

Lemme 2.3.37. *Pour tout objet D de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$ et tout élément $d \in D$, on a l'identité suivante dans $D_l = A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} D$:*

$$\psi_{D_l}(1 \otimes d) = 1 \otimes \left(\sum_{u' \in \mathcal{R}(N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0})} G_{\xi(p)}(u'^{-1}d) \right).$$

Démonstration. Pour cela, il faut décomposer $N_{\Delta,0}/\xi(p)N_{\Delta,0}\xi(p)^{-1}$. Ces classes à droite s'identifient aux classes $N_0/\xi(p)N_0\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0}$ que l'on écrit comme

$$(N_0/\xi(p)N_0\xi(p)^{-1}N_1) \times (\xi(p)N_0\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0}N_1/\xi(p)N_0\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0})$$

Le premier terme s'identifie à $(N_0/N_1)/\xi(p)(N_0/N_1)\xi(p)^{-1}$ et le deuxième à

$$N_1/N_1 \cap \xi(p)N_0\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0} = N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0}.$$

Choisissons donc nos représentants en décomposant ainsi nos classes à droite.

$$\begin{aligned} 1 \otimes d &= 1 \otimes \left(\sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/\xi(p)N_{\Delta,0}\xi(p)^{-1})} u F_{\xi(p)}(G_{\xi(p)}(u^{-1}d)) \right) \\ &= \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/\xi(p)N_{\Delta,0}\xi(p)^{-1})} u \varphi_{D_l}(1 \otimes G_{\xi(p)}(u^{-1}d)) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{R}((N_0/N_1)/\xi(p)(N_0/N_1)\xi(p)^{-1})} \sum_{u' \in \mathcal{R}(N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0})} v u' \varphi_{D_l}(1 \otimes G_{\xi(p)}(u'^{-1}v^{-1}d)) \end{aligned}$$

Or, les éléments vu' et v sont égaux dans $A((X))$ puisque $u' \in N_1$ ce qui nous donne

$$1 \otimes d = \sum_{v \in \mathcal{R}((N_0/N_1)/\xi(p)(N_0/N_1)\xi(p)^{-1})} v \varphi_{D_l} \left(1 \otimes \left(\sum_{u' \in \mathcal{R}(N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0})} G_{\xi(p)}(u'^{-1}v^{-1}d) \right) \right)$$

et on identifie. □

Un morphisme pour faire le lien

Le but de ces paragraphes est d'établir l'existence d'une transformation naturelle entre \mathbf{D}_{ξ}^{\vee} et $A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} \mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}$ qui soit formée de morphismes surjectifs.

Lemme 2.3.38. *Le module Π^{N_1} est l'ensemble des éléments de $(X_{\alpha} - X_{\beta})_{\alpha \neq \beta}$ -torsion de $\Pi^{H_{\Delta,0}}$.*

La structure de $A[[X]][F]$ -module via l'action de Hecke (voir [Bre15]) sur Π^{N_1} provient de la structure de $A[[N_{\Delta,0}][F_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta]$ -module via l'action de Hecke que nous avons définie sur $\Pi^{H_{\Delta,0}}$ de la manière suivante : en tensorisant par $A[[X]]$ et en posant

$$F = \left(\sum_{u \in \mathcal{R}(N_1/H_{\Delta,0}\xi(p)N_1\xi(p)^{-1})} u \right) \circ F_{\Delta}$$

Démonstration. Le quotient $N_1/H_{\Delta,0}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p^{\Delta}/\{(x_{\alpha}) \mid \sum x_{\alpha} = 0\}$, en vertu de la factorisation $l = \text{Tr} \circ \delta$. Ainsi, il est engendré par les $[n_{\alpha}] - [n_{\beta}] = X_{\alpha} - X_{\beta}$. Cela nous fournit l'identification aux éléments de torsion. On obtient aussi que sur ces éléments l'action de $N_0/H_{\Delta,0}$ se factorise par N_0/N_1 , i.e. la structure de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module est en fait une structure de $A[[X]]$ -module.

Pour le Frobenius, la construction de Breuil nous indique que

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{u \in \mathcal{R}(N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1})} u\xi(p) \\
&= \sum_{u \in \mathcal{R}(N_1/H_{\Delta,0}\xi(p)N_1\xi(p)^{-1})} \sum_{v \in \mathcal{R}(H_{\Delta,0}\xi(p)N_1\xi(p)^{-1})/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}} uv\xi(p) \\
&= \sum_{u \in \mathcal{R}(N_1/H_{\Delta,0}\xi(p)N_1\xi(p)^{-1})} \sum_{v \in \mathcal{R}(H_{\Delta,0}/\xi(p)H_{\Delta,0}\xi(p)^{-1})} uv\xi(p) \\
&= \left(\sum_{u \in \mathcal{R}(N_1/H_{\Delta,0}\xi(p)N_1\xi(p)^{-1})} u \right) \circ F_{\Delta}
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.39. Si $M \in \mathcal{M}_{\Delta}(\Pi^{H_{\Delta,0}})$, alors M^{N_1} est la $(X_{\alpha} - X_{\beta})$ -torsion et on a

$$(M^{N_1})^{\vee}[X^{-1}] \cong A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} M^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}]$$

en tant que $A((X))$ -modules.

Démonstration. Le sous-module M^{N_1} est exactement $M^{N_1/H_{\Delta,0}}$ où ce dernier quotient est engendré par les éléments $n_{\alpha}n_{\beta}^{-1}$. Ainsi, avec la structure de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module, on a $M^{N_1} = (X_{\alpha} - X_{\beta})_{\alpha \neq \beta} - \text{Tors}(M)$.

Comme précédemment, il nous suffit de montrer le deuxième isomorphisme pour l'identification de deux variables $\alpha_0 \neq \alpha_1$, i.e. de montrer que l'on a

$$((X_{\alpha_0} - X_{\alpha_1}) - \text{Tors}(M))^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}] \cong A((N_{\Delta,0}))/ (X_{\alpha_0} - X_{\alpha_1}) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} M^{\vee}[X_{\Delta}^{-1}].$$

Pour ce faire, la dualité de Pontryagin étant exacte, la suite

$$0 \rightarrow (X_{\alpha_0} - X_{\alpha_1}) - \text{Tors}(M) \rightarrow M \xrightarrow{X_{\alpha_0} - X_{\alpha_1}} M$$

devient

$$M^{\vee} \xrightarrow{(X_{\alpha_0} - X_{\alpha_1})^{\vee}} M^{\vee} \rightarrow ((X_{\alpha_0} - X_{\alpha_1}) - \text{Tors}(M))^{\vee} \rightarrow 0$$

et le dual $(X_{\alpha_0} - X_{\alpha_1})^{\vee}$ est la multiplication par $(X_{\alpha_0} - X_{\alpha_1})$ sur les duaux.

On peut inverser X_{Δ} partout en conservant l'exactitude. Par exactitude à droite du produit tensoriel, la suite est encore exacte après application de $A((N_{\Delta,0}))/ (X_{\alpha_0} - X_{\alpha_1}) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} \bullet$. De surcroit, la première flèche devient nulle après cette tensorisation, d'où l'isomorphisme. □

Remarque 2.3.40. Nous avons au passage démontré à mi-voix l'existence d'un morphisme surjectif de $A[[X]]$ -modules

$$\iota : A[[X]] \otimes_{A[[N_{\Delta,0}]]} M^{\vee} \rightarrow (M^{N_1})^{\vee}.$$

C'est en réalité très simple sans l'enrobage de la preuve précédente : l'inclusion $M^{N_1} \subset M$ donne une surjection $M^{\vee} \rightarrow (M^{N_1})^{\vee}$, morphisme de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -modules. Or, l'action des X_{α} est identique au but, d'où la factorisation.

Lemme 2.3.41. En gardant les notations de la remarque, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
A[[X]] \otimes_{A[[N_{\Delta,0}]]} M^{\vee} & \xrightarrow{\iota} & (M^{N_1})^{\vee} \\
\downarrow 1 \otimes (1 \otimes F_{\Delta})^{\vee} & & \downarrow (1 \otimes F)^{\vee} \\
A[[X]] \otimes_{A[[N_{\Delta,0}]]} (\varphi_{\xi(p)}^* M)^{\vee} & & (\varphi^*(M^{N_1}))^{\vee} \\
\downarrow 1 \otimes j_M & & \downarrow j'_{M^{N_1}} \\
A[[X]] \otimes_{A[[N_{\Delta,0}]]} \varphi_{\xi(p)}^*(M^{\vee}) & & \\
\wr \downarrow & & \downarrow \\
\varphi^*(A[[X]] \otimes_{A[[N_{\Delta,0}]]} M^{\vee}) & \xrightarrow{\varphi^* \iota} & \varphi^*((M^{N_1})^{\vee})
\end{array}$$

où $j'_{M^{N_1}}$ est l'analogue du lemme 2.3.14 pour la construction de Breuil.

Après localisation en X , cela nous dit que l'isomorphisme de la proposition 2.3.39 est un morphisme dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, A((X)))$ si l'on munit le terme de droite du Frobenius obtenu à partir de $F_{\xi(p)}$ du théorème 2.3.15 et si l'on munit $(M^{N_1})^{\vee}$ du Frobenius donné par la construction de Breuil.

Démonstration. Pour cela, il faut décomposer $N_{\Delta,0}/\xi(p)N_{\Delta,0}\xi(p)^{-1}$. Ces classes à droite sont $N_0/\xi(p)N_0\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0}$ que l'on écrit comme

$$(N_0/\xi(p)N_0\xi(p)^{-1}N_1) \times (\xi(p)N_0\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0}N_1/\xi(p)N_0\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0})$$

Le premier terme s'identifie à $(N_0/N_1)/\xi(p)(N_0/N_1)\xi(p)^{-1}$ et le deuxième à

$$N_1/N_1 \cap \xi(p)N_0\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0} = N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0}.$$

Si l'on suit dans le diagramme l'image de $1 \otimes \lambda$ on a donc

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes \lambda & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & \lambda|_{M^{N_1}} \\ \downarrow 1 \otimes (1 \otimes F_{\Delta})^{\vee} & & \downarrow (1 \otimes F)^{\vee} \\ 1 \otimes [(y \otimes m) \mapsto \lambda(yF_{\Delta}(m))] & & (y \otimes m) \mapsto \lambda(yF(m)) \\ \downarrow 1 \otimes j_M & & \downarrow j_{M^{N_1}} \\ 1 \otimes \left(\sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/\xi(p)N_{\Delta,0}\xi(p)^{-1})} u \otimes \lambda(u^{-1}F(\cdot)) \right) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/\xi(p)N_{\Delta,0}\xi(p)^{-1})} u \otimes (1 \otimes \lambda(u^{-1}F_{\Delta}(\cdot))) & & \sum_{v \in \mathcal{R}((N_0/N_1)/\xi(p)(N_0/N_1)\xi(p)^{-1})} v \otimes \lambda(v^{-1}F(\cdot))|_{(M^{N_1})} \end{array}$$

Il nous reste à vérifier que $\varphi^* \iota$ complète bien le diagramme. Or,

$$\begin{aligned} & \varphi^* \left(\sum_{u \in \mathcal{R}(N_{\Delta,0}/\xi(p)N_{\Delta,0}\xi(p)^{-1})} u \otimes (1 \otimes \lambda(u^{-1}F_{\Delta}(\cdot))) \right) \\ &= \varphi^* \left(\sum_{v \in \mathcal{R}((N_0/N_1)/\xi(p)(N_0/N_1)\xi(p)^{-1})} \sum_{u' \in \mathcal{R}(N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0})} vu' \otimes (1 \otimes \lambda(u'^{-1}v^{-1}F_{\Delta}(\cdot))) \right) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{R}((N_0/N_1)/\xi(p)(N_0/N_1)\xi(p)^{-1})} \sum_{u' \in \mathcal{R}(N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0})} v \otimes \lambda(u'^{-1}v^{-1}F_{\Delta}(\cdot))|_{(M^{N_1})} \\ &= \sum_{v \in \mathcal{R}((N_0/N_1)/\xi(p)(N_0/N_1)\xi(p)^{-1})} v \otimes \left(\sum_{u' \in \mathcal{R}(N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0})} \lambda(u'^{-1}v^{-1}F_{\Delta}(\cdot))|_{(M^{N_1})} \right) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{R}((N_0/N_1)/\xi(p)(N_0/N_1)\xi(p)^{-1})} v \otimes \lambda \left(v^{-1} \left(\sum_{u' \in \mathcal{R}(N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0})} vu'v^{-1} \right) F_{\Delta}(\cdot) \right)|_{(M^{N_1})} \\ &= \sum_{v \in \mathcal{R}((N_0/N_1)/\xi(p)(N_0/N_1)\xi(p)^{-1})} v \otimes \lambda(F(\cdot))|_{(M^{N_1})} \end{aligned}$$

pour justifier la dernière égalité sans tricher, il faut justifier que si (u') est un système de représentants de $N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0}$ alors $(vu'^{-1}v^{-1})$ en est encore un. Cela provient conjointement du fait que N_1 est distingué dans N_0 et que $\xi(p)N_1\xi(p)^{-1}H_{\Delta,0}$ est distingué. Pour ce dernier, il suffit de remarquer que c'est le noyau de $N_0 \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\Delta} \times \mathbb{Z}_p$ donné par la réduction des coefficients diagonaux et la trace. \square

Remarque 2.3.42. Ainsi, sans hypothèse a priori sur M^{N_1} lui-même, l'analogue du théorème 2.3.15 pour une variable munit $(M^{N_1})^{\vee}[X^{-1}]$ d'une structure de (φ, Γ) -module étale obtenu à partir de $(1 \otimes F)^{\vee}$.

À part cette subtilité, la proposition fait un peu doublon avec le lemme 2.3.37 et l'on peut en général rédiger les preuves en utilisant l'une ou l'autre.

Lemme 2.3.43 ([EZ17], lemme 2.15). *Soit D un (φ, Γ) -module étale sur $A((X))$ et D_0 un treillis (i.e. un sous- $A[[X]]$ -module compact qui engendre D , stable par ψ_D et par l'action de Γ). Alors, le module D_0^{\vee} est de type fini sur $A[[X]][F]$, où la multiplication par F est donnée par ψ_D^{\vee} restreint à D_0 .*

Théorème 2.3.44. *Il existe une surjection naturelle de $A((X))$ -modules*

$$\mathbf{D}_\xi^\vee(\Pi) \twoheadrightarrow A((X)) \widehat{\otimes}_{A((N_{\Delta,0}))} \mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi).$$

Ici, la notation $\widehat{\otimes}$ est la limite projective sur tous les quotients de type fini sur $A((N_{\Delta,0}))$.

Démonstration. Prenons $M \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi^{H_{\Delta,0}})$. D'après la proposition 2.3.33, le module $A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} M^\vee[X_\Delta^{-1}]$ est étale avec le Frobenius obtenu par transfert de $F_{\xi(p)}$. L'image D_0 de M^\vee est un treillis stable par la ψ -action et par l'action Γ . Le fait que ce soit un réseau complet et la stabilité par l'action de Γ sont limpides. Pour la stabilité par la ψ -action, utiliser le lemme 2.3.35. Le lemme 2.3.43 nous dit alors que D_0^\vee est de type fini sur $A[[X]][\widetilde{F}]$, où \widetilde{F} est le dual de la ψ -action sur D_0 . Le lemme 2.3.41 prouve ensuite que le Frobenius sur $A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} M^\vee[X_\Delta^{-1}]$ s'identifie au Frobenius donné par Breuil sur $(M^{N_1})^\vee[X^{-1}]$. Par conséquent, c'est également le cas pour la ψ -action, qui correspond à F^\vee .

Rappelons l'isomorphisme de modules topologiques $M = (M^\vee)^\vee$. L'élément m_* appartient à $(A[[X]] \otimes M^\vee)^\vee$ si et seulement si tous les $\lambda(X_\alpha \cdot) - \lambda(X_\beta \cdot)$ s'annulent sur m , en particulier si et seulement si $m \in M^{N_1}$ (pour le seulement si, considérer que par exactitude du dual de Pontryagin, on peut étendre une forme linéaire sur le module engendré par $X_\alpha m$ et $X_\beta m$). Enfin, puisque D_0 est également l'image de $A[[X]] \otimes M^\vee$, on sait que D_0^\vee est un sous-module de $(A[[X]] \otimes M^\vee)^\vee = M^{N_1}$. Nous avons donc trouvé un sous-module M' de M^{N_1} qui est de type fini sur $A[[X]][F']$ et de dual D_0 . Via les identifications précédentes, l'endomorphisme F' est ici le dual de F^\vee sur $(A((X)) \otimes M^\vee)^\vee \cong (M^{N_1})^\vee[X^{-1}]$: ainsi, la structure de $A[[X]][F']$ -module que l'on obtient sur M' est exactement la structure donnée par Breuil. En bref, le module M' appartient à $\mathcal{M}(\Pi^{N_1})$. De plus,

$$M'^\vee[X^{-1}] \cong D_0[X^{-1}] \cong A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} M^\vee[X_\Delta^{-1}]$$

et en passant à la limite

$$\varprojlim_{M \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi^{H_{\Delta,0}})^{\text{op}}} M'^\vee[X^{-1}] \cong \varprojlim_{M \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi^{H_{\Delta,0}})^{\text{op}}} A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} M^\vee[X_\Delta^{-1}].$$

Les $M^\vee[X_\Delta^{-1}]$ sont cofinaux parmi les quotients de type fini de $\mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi)$ donc la limite projective des termes de droite donne effectivement $A((X)) \widehat{\otimes}_{A((N_{\Delta,0}))} \mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi)$. L'anneau $A((X))$ étant artinien a fortiori pseudo-compact, les modules considérés sont pseudo-compacts et [Gab62, Théorème 3 de IV.3] garantit que les limites projectives considérées sont exactes. Par conséquent

$$\varprojlim_{N \in \mathcal{M}(\Pi^{N_1})^{\text{op}}} N^\vee[X^{-1}] \twoheadrightarrow \varprojlim_{M \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi^{H_{\Delta,0}})^{\text{op}}} M'^\vee[X^{-1}]$$

est surjectif. Ces deux remarques concluent. \square

Remarque 2.3.45. Zábřádí pose dans [Záb18a] la question du caractère isomorphique de ce morphisme, bien que les preuves qui suivent se déroulent correctement sans.

Corollaire 2.3.46. *Si $\mathbf{D}_\xi^\vee(\Pi) = \{0\}$ alors $\mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi) = \{0\}$.*

Démonstration. Le morphisme surjectif du théorème 2.3.44 nous dit que $A((X)) \widehat{\otimes}_{A((N_{\Delta,0}))} \mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi) = \{0\}$. Pour tout $M \subseteq N$ dans $\mathcal{M}_\Delta(\Pi^{H_{\Delta,0}})$, le morphisme dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_0, A((N_{\Delta,0})))$

$$N^\vee[X_\Delta^{-1}] \twoheadrightarrow M^\vee[X_\Delta^{-1}]$$

est surjectif. Grâce à l'exactitude en proposition 2.3.33, le morphisme de $A((X))$ -modules induit

$$A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} N^\vee[X_\Delta^{-1}] \twoheadrightarrow A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} M^\vee[X_\Delta^{-1}]$$

est surjectif. Toujours grâce à la pseudo-compacité, on en déduit un morphisme surjectif

$$A((X)) \widehat{\otimes}_{A((N_{\Delta,0}))} \mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi) \twoheadrightarrow A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} M^\vee[X_\Delta^{-1}]$$

ce qui implique que $A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} M^\vee[X_\Delta^{-1}] = \{0\}$. En particulier l'identité de $M^\vee[X_\Delta^{-1}]$ est envoyée par la restriction à une variable sur la flèche nulle. La fidélité en proposition 2.3.33 conclut que $M^\vee[X_\Delta^{-1}] = \{0\}$. Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi^{H_{\Delta,0}})$, on en conclut que $\mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi) = \{0\}$. \square

Remarque 2.3.47. C'est principalement ce corollaire que nous utiliserons dans la troisième partie.

2.3.6 Exactitude à droite

Nous prouvons dans cette sous-section que le foncteur \mathbf{D}_Δ^\vee est exact à droite.

Proposition 2.3.48. *Soit D un objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$ et $D_0 \subset D$ un treillis stable sous la ψ -action de T_+ . Alors D_0^\vee muni de $\tilde{F}_t = G_t^\vee$ est un $A[[N_{\Delta,0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta]$ -module de type fini.*

Démonstration. Notons $D_{0,l}$ l'image de D_0 dans $A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} D$. Le lemme 2.3.37 nous dit que c'est un treillis stable par la ψ -action et par l'action de Γ . De fait, le lemme 2.3.43 affirme que $D_{0,l}^\vee$ est un $A[[X]][F]$ -module de type fini. Prenons des générateurs (m_1, \dots, m_r) . On peut voir ces éléments dans D_0^\vee puisque la surjection $D_0 \twoheadrightarrow D_{0,l}$ se dualise en une injection $D_{0,l}^\vee \hookrightarrow D_0^\vee$. On regarde maintenant M le sous- $A[[N_{\Delta,0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta]$ -module de D_0^\vee engendré par les $t_0 m_i$ pour $t_0 \in T_0$ et m_i dans notre système de générateurs.

Montrons que le module M est de type fini sur $A[[N_{\Delta,0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta]$. Puisque D_0 est compact, son dual de Pontryagin constitué de formes linéaires continues est lisse. Ainsi, on peut trouver un entier n tel que tous les m_i sont dans $(D_0^\vee)^{N_{\Delta,0}^{p^n}}$ et c'est aussi le cas de tous les $t_0 m_i$. Or, le module $(D_0^\vee)^\vee$ est isomorphe à D_0 qui est de type fini sur $A[[N_{\Delta,0}]]$: le module D_0^\vee est admissible. En particulier, selon la caractérisation de l'admissibilité dans [Vig07], le module $(D_0^\vee)^{N_{\Delta,0}^{p^n}}$ est fini. Les $t_0 m_i$ sont donc en nombre fini ce qui conclut.

L'injection $M \hookrightarrow D_0^\vee$ se dualise en une surjection $D_0 \twoheadrightarrow M^\vee$ ce qui prouve que M est en plus admissible. On peut voir d'après le théorème 2.3.15 le module $M^\vee[X_\Delta^{-1}]$ comme un objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$. L'expression de F en fonction des F_α prouve que l'on peut donner un sens à l'inclusion $D_{0,l}^\vee \hookrightarrow M$. Les injections $D_{0,l}^\vee \hookrightarrow M \hookrightarrow D_0^\vee$ deviennent, après dualisation et localisation

$$D \twoheadrightarrow M^\vee[X_\Delta^{-1}] \twoheadrightarrow A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} D$$

et le premier morphisme ci-dessus est un morphisme dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$. En tensorisant par $A((X))$ la suite précédente, la composée est l'identité de $A((X)) \otimes_{A((N_{\Delta,0}))} D$. En particulier, l'identification des variables transforme $D \twoheadrightarrow M^\vee[X_\Delta^{-1}]$ en un isomorphisme. La fidélité sur la catégorie $\mathcal{D}(T_0, A((N_{\Delta,0})))$ démontrée en proposition 2.3.33 nous dit en particulier que le morphisme original était un isomorphisme.

Enfin, nous avons remarqué lors de la preuve de la proposition 2.3.33 que les modules dans $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_0, \kappa((N_{\Delta,0})))$ sont sans torsion. De fait, les objets $\varpi^r D / \varpi^{r+1} D$ sont sans torsion et D_0 est sans $X_\Delta^{\mathbb{N}}$ -torsion. En particulier, le morphisme $D_0 \twoheadrightarrow M^\vee$ est injectif puisque sa localisation en X_Δ est un isomorphisme. On a obtenu un isomorphisme $D_0 \cong M^\vee$ qui se dualise en $D_0^\vee = M$. \square

Théorème 2.3.49. *Le foncteur \mathbf{D}_Δ^\vee est exact à droite.*

Démonstration. Soit $0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi_2 \rightarrow \Pi_3 \rightarrow 0$ une suite exacte dans $\text{Rep}_{\varpi^h - \text{tors}} G$. On en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow \Pi_1^{H_{\Delta,0}} \rightarrow \Pi_2^{H_{\Delta,0}} \xrightarrow{f} \Pi_3^{H_{\Delta,0}}.$$

Pour tout $M \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi_2^{H_{\Delta,0}})$, la proposition 2.3.26 a déjà prouvé que $f(M) \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi_3^{H_{\Delta,0}})$. De plus le noyau de $M \mapsto f(M)$ est $M \cap \Pi_1$ qui est un sous- $A[[N_{\Delta,0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta]$ -module de M . L'exactitude du dual et la platitude de la localisation nous fournissent une suite exacte

$$f(M)^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow M^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow (M \cap \Pi_1)^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow 0$$

ce qui prouve en particulier que $(M \cap \Pi_1)^\vee[X_\Delta^{-1}]$ est un objet de $\mathcal{D}^{\text{ét}}(T_+, A((N_{\Delta,0})))$. L'image de $(M \cap \Pi_1)^\vee$ dedans, qui est un quotient de $(M \cap \Pi_1)^\vee$ est un treillis stable par la ψ -action (on a calculé la ψ -action comme étant les F_t^\vee). La proposition 2.3.48 nous affirme alors que le dual M' de ce quotient, qui s'identifie à un sous-module de $M \cap \Pi_1$ avec sa structure usuelle de $A[[N_{\Delta,0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta]$ -module (les Frobenius vont être les duaux de la ψ -action, i.e. les Frobenius de départ sur M), est de type fini sur ce même anneau. On a donc trouvé $M' \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi_1^{H_{\Delta,0}})$ avec une inclusion $M' \hookrightarrow M$ qui fournisse par functorialité une suite exacte

$$f(M)^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow M^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow M'^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow 0$$

Par hypothèse sur notre catégorie de représentations, la catégorie $\mathcal{M}_\Delta(\Pi_2^{H_{\Delta,0}})$ est dénombrables et les systèmes sont de Mittag-Leffler. Nous obtenons donc la suite exacte

$$\varprojlim_{M \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi_2^{H_{\Delta,0}})^{\text{op}}} f(M)^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow \varprojlim_{M \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi_2^{H_{\Delta,0}})^{\text{op}}} M^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow \varprojlim_{M \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi_2^{H_{\Delta,0}})^{\text{op}}} M'^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow 0$$

Tout élément de $\mathcal{M}_\Delta(\Pi_1^{H\Delta,0})$ peut-être vu comme un élément de $\mathcal{M}_\Delta(\Pi_2^{H\Delta,0})$. En particulier, les M' parcourent tout $\mathcal{M}_\Delta(\Pi_1^{H\Delta,0})$ d'où la suite exacte

$$\varprojlim_{M \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi_2^{H\Delta,0})^{\text{op}}} f(M)^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow \varprojlim_{M \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi_2^{H\Delta,0})^{\text{op}}} M^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow \varprojlim_{M' \in \mathcal{M}_\Delta(\Pi_1^{H\Delta,0})} M'^\vee[X_\Delta^{-1}] \rightarrow 0$$

Le premier terme est une limite projective sur un sous-système de celui qui définit $\mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi_3)$. La catégorie $\mathcal{M}_\Delta(\Pi_3^{H\Delta,0})$ étant dénombrable et les systèmes considérés étant de Mittag-Leffler, il existe une surjection de $\mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi_3)$ sur le premier terme, d'où la suite exacte

$$\mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi_3) \rightarrow \mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi_2) \rightarrow \mathbf{D}_\Delta^\vee(\Pi_1) \rightarrow 0.$$

□

Remarque 2.3.50. Une subtilité se glisse ici par rapport au cas de Breuil. Dans son cas, l'anneau $A[[X]][F]$ était cohérent à gauche (voir [Eme08]) et donc pour $M \in \mathcal{M}(\Pi_2^{N_1})$, on avait automatiquement $M \cap \Pi_1 \in \mathcal{M}(\Pi_1^{N_1})$.

2.4 Induction parabolique

Définition 2.4.1. Un sous-groupe parabolique d'un groupe algébrique linéaire est un sous-groupe P contenant un Borel B . Dans le cas de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, tout Borel est conjugué au Borel canonique B des matrices triangulaires supérieures et les sous-groupes paraboliques associés sont les sous-groupes fixant un drapeau. Autrement dit, ce sont les groupes de matrices inversibles s'écrivant

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array} \right)$$

pour un certain type (n_1, \dots, n_k) qui encode la taille successive des blocs (ici c'est $(2, 1, 2)$). Un tel groupe s'écrit comme produit semi-direct des unipotentes N par un groupe réductif L_P (qui est juste les matrices diagonales par blocs dans le cas de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$).

Exemple 2.4.2. L'exemple le plus basique est celui de $P = B$ pour lequel $L_B = T$.

Définition 2.4.3. Soit (Π_P, V) une représentation de P . Alors, on définit $\text{Ind}_P^G(\Pi_P)$ comme l'espace des fonction $f : G \rightarrow V$, localement constantes, telles que pour tout $g \in G$ et $p \in P$ on a $f(pg) = \Pi_P(p) \cdot f(g)$ et qui sont lisses pour l'action de multiplication à droite.

De manière plus générale, prenons G' un sous-groupe de G et (V, Π') une représentation de G' . On se fixe également un sous-ensemble $S \subset G$ et un autre sous-groupe $G'' < G$ tel que $S = G'SG''$. L'induite $\text{Ind}_{G'}^S(\Pi)$ sera la représentation de G'' constituée de l'ensemble des fonctions $f : S \rightarrow V$, localement constantes, telles que la multiplication à gauche par G' soit l'action de Π' et qui sont lisses pour l'action de G'' donnée par la multiplication à droite.

Dans ce cadre, on note aussi $c - \text{Ind}_{G'}^S(\Pi)$ pour la sous-représentation des fonctions à support compact dans les classes $G' \backslash S$.

Exemple 2.4.4. Nous illustrerons souvent notre propos par l'induction d'un caractère du tore T , vu comme représentation du Borel.

2.4.1 Dans le cas de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Dans ce cas, le seul groupe parabolique contenant le Borel canonique est le Borel lui-même. Les représentations de son tore sont les produits de caractères de \mathbb{Q}_p^\times . On se fixe un tel produit de caractères continus $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$, à valeurs dans $A = \mathcal{O}_L/\varpi^h \mathcal{O}_L$. On note $\mu = \chi_1/\chi_2$ qui est un caractère de \mathbb{Q}_p^\times .

Le but de cette sous-section est de calculer, à la main, le module $\mathbf{D}_\Delta^\vee(\mathrm{Ind}_{B^-}^G(\chi))$ dans ce cas précis de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. La preuve fera intervenir une expression explicite de cette induite, mais les étapes de calcul qui suivront souligneront la stratégie générale qui suivra. On trouvera foncièrement les mêmes étapes de calcul dans la section IV.4.17 de [Col10], mais nous le rédigerons ici en préparant les notations et les étapes du cas général.

On remarque qu'une fonction dans $\mathrm{Ind}_{B^-}^G(\chi)$ est déterminée par ses valeurs en des représentants de $B^- \backslash G$, qui n'est autre que $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ via la première ligne. On choisira comme suit ces représentants :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } x \in \mathbb{Q}_p \\ & w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } \infty. \end{aligned}$$

Lemme 2.4.5. *L'application*

$$\Phi : \mathrm{Ind}_{B^-}^G(\chi) \rightarrow [\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \rightarrow A]$$

d'évaluation sur les représentants est une bijection sur l'ensemble des fonctions f sur \mathbb{Q}_p , localement constantes, et telles que $f(\frac{1}{x})\mu(x)$ est constante égale à $f(\infty)$ au voisinage de 0.

On note M l'ensemble de ces fonctions et on le munit de la structure de $A[[X]]$ -module et de l'action de T_+ induites par transfert de structure.

Démonstration. Comme nous l'avons remarqué nous évaluons en des représentants de $B^- \backslash G$, ce qui rend cette application injective.

Montrons d'abord que toutes les fonctions annoncées sont dans l'image. Il faut faire un petit calcul pour cela. Pour $x \neq 0$, et pour tout n , en posant $w_p(x) = \min(v_p(x), 0)$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_{n+w_p(x)} \subseteq \begin{pmatrix} 1+p^n\mathbb{Z}_p & x+p^n\mathbb{Z}_p \\ p^n\mathbb{Z}_p & 1+p^n\mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \subseteq N^- \begin{pmatrix} 1+p^n\mathbb{Z}_p & 0 \\ 0 & 1+p^n\mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x+p^n\mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (*5)$$

Pour $x = 0$ on a la même identité sans la présence du w_p . Enfin,

$$\begin{pmatrix} p^n a & 1+p^n b \\ 1+p^n\mathbb{Z}_p & p^n\mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \in N^- \begin{pmatrix} p^n a & 0 \\ 0 & \frac{1+p^n\mathbb{Z}_p}{p^n a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+p^n b}{p^n a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (*6)$$

Si f vérifie les conditions, on pose $\tilde{f}(g) = \chi(b)f(r)$ où $g = br$ est l'unique écriture avec $b \in B^-$ et r dans nos représentants. C'est le candidat à être un antécédent de f . L'équation (*6) donne que

$$\tilde{f} \left(\begin{pmatrix} p^n a & 1+p^n\mathbb{Z}_p \\ 1+p^n\mathbb{Z}_p & p^n\mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \right) \subseteq \chi_2(1+p^n\mathbb{Z}_p)\chi_1(1+p^n\mathbb{Z}_p)(\mu \times f(1/\cdot)) \left(\frac{p^n a}{1+p^n b} \right)$$

Puisque χ_2 et χ_1 sont constants au voisinage de 1, \tilde{f} est constante au voisinage de w si et seulement si $f(1/x)\mu(x) \equiv f(\infty)$ au voisinage de 0. Pour étudier un peu plus les implications de cette égalité en l'infini, disons que pour $v_p(x) \geq m$, on a $f(1/x)\mu(x) = f(\infty)$, soyons plus précis. Pour tout y , on écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+p^n a & p^n b \\ p^n c & 1+p^n d \end{pmatrix} \in N^- \begin{pmatrix} A & y+p^n(b+yd) \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A = 1+p^n(a+cy)$ et $B = 1+p^n d - \frac{p^n c(y+p^n(b+yd))}{1+p^n(a+cy)}$. En particulier,

$$\begin{aligned} \tilde{f} \left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+p^n a & p^n b \\ p^n c & 1+p^n d \end{pmatrix} \right) &= \chi_1(A)\chi_2(B)f \left(\frac{y+p^n(b+yd)}{A} \right) \\ &= f(\infty)\chi_2(AB)\mu(y+p^n(b+yd)) \end{aligned}$$

lorsque $v_p\left(\frac{y+p^n(b+yd)}{A}\right) \leq -m$, ce qui arrive à coup sûr dès que $n \geq m$ et que $v_p(y) \leq -m$.

De plus, magnifiquement, $AB \in 1 + p^n\mathbb{Z}_p$. Comme on se place là où $v_p(y) \leq -m \leq 0$, on a de plus $y + p^n(b + yd) \in y(1 + p^n\mathbb{Z}_p)$. Quitte à augmenter m , on suppose que μ est constant sur $1 + p^m\mathbb{Z}_p$, on en déduit que \tilde{f} est constante sur $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_m$ pour tout $v_p(y) \leq -m$. Mieux, pour tout $g \in \cup_{v_p(y) \leq -m} B^-\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $\tilde{f}(gK_m) = \tilde{f}(g)$. Pour conclure dans un sens que \tilde{f} est effectivement dans la source, on remarque que l'équation (*5) donne pour $v_p(y) \geq -m$

$$\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_M\right) \subseteq \chi_1(1 + p^{M-m}\mathbb{Z}_p)\chi_2(1 + p^{M-m}\mathbb{Z}_p)f(x + p^{M-m}\mathbb{Z}_p).$$

Puisque $p^{-m}\mathbb{Z}_p$ est compact, si f est localement constante, elle l'est uniformément sur $p^{-m}\mathbb{Z}_p$ et on a un groupe compact ouvert K_M tel que $\tilde{f}(\cdot K_M) = \tilde{f}$.

Pour l'autre sens, on a déjà montré que l'image arrivait dans les fonctions vérifiant la condition en l'infini. Il suffit pour conclure à la continuité de remarquer que

$$\begin{pmatrix} 1 & x + p^n\mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_{n+w_p(x)}.$$

□

Lemme 2.4.6. *La structure de module est définie par $((1 + X)f)(x) = f(1 + x)$ et $((1 + X)f)(\infty) = f(\infty)$.*

L'action est définie par $(t \cdot f)(x) = f\left(\frac{t_2x}{t_1}\right)\chi(t)$ et $(t \cdot f)(\infty) = \chi(tw^{-1})f(\infty)$.

Démonstration. Pour définir la structure de module, il suffit de définir l'action de $(1 + X)$ qui engendre topologiquement l'anneau $A[[N_{\Delta,0}]]$. Pour la suite, on pose g telle que $\tilde{g} = f$

$$\begin{aligned} ((1 + X)f)(x) &= (n_0 \cdot g)\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= g\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= g\left(\begin{pmatrix} 1 & 1+x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= f(1+x) \end{aligned}$$

et à l'infini on déduit du calcul précédent sur \mathbb{Q}_p :

$$\begin{aligned} ((1 + X)f)(\infty) &= \lim_{x \rightarrow 0} f\left(1 + \frac{1}{x}\right)\mu(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1+x}{x}\right)\mu\left(\frac{1+x}{x}\right)\mu(1+x)^{-1} \\ &= f(\infty) \end{aligned}$$

car $\mu \xrightarrow{y \rightarrow 1} 1$.

Pour l'action de $t \in T_+$, on pose encore g telle que $\tilde{g} = f$

$$\begin{aligned} ((t \cdot f)(x) &= (t \cdot g)\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= g\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t\right) \\ &= g\left(\begin{pmatrix} t_1 & t_2x \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= g\left(t \begin{pmatrix} 1 & \frac{t_2x}{t_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \chi(t)f\left(\frac{t_2x}{t_1}\right) \end{aligned}$$

et à l'infini on déduit du calcul précédent sur \mathbb{Q}_p :

$$\begin{aligned}
(t \cdot f)(\infty) &= \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{t_1}{t_2 x}\right) \chi(t) m u(x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{t_1}{t_2 x}\right) \mu\left(\frac{t_1}{t_2 x}\right) \chi(t) \mu\left(\frac{t_1}{t_2}\right) \\
&= \chi(w t w^{-1}) \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{t_1}{t_2 x}\right) \mu\left(\frac{t_1}{t_2 x}\right) \\
&= \chi(w t w^{-1}) f(\infty)
\end{aligned}$$

car $\frac{t_1}{t_2 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. □

Lemme 2.4.7. *Considérons M_0 le sous-module des fonctions à support dans \mathbb{Z}_p de $\text{Ind}_{B^-}^G(\chi)$ (on fait l'identification du support comme d'un fermé de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ via l'isomorphisme du lemme 2.4.5).*

L'injection canonique donne un isomorphisme de $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}(M) \cong \mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}(M_0)$

Démonstration. On pose $M'_0 = c - \text{Ind}_{B^-}^G(\chi)$ le sous-module des fonctions à support compact. Les sous-modules M_0 et M'_0 sont des sous- $A[[X]][[F]]$ -modules, stables par l'action de T_0 . Le foncteur $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}$ étant exact à droite, il suffit de prouver qu'il annule les quotients M/M'_0 et M'_0/M_0 .

Pour le premier, remarquons M/M'_0 est isomorphe à A via $f \mapsto f(\infty)$ (on utilise la description du lemme 2.4.5 pour identifier le noyau de $M \rightarrow A$). Le lemme précédent prouve que $((1+X)f)(\infty) = f(\infty)$ autrement dit que l'isomorphisme $M/M'_0 \cong A$ est un isomorphisme de $A[[X]]$ -modules. Le module M/M'_0 est de X -torsion pour la structure de $A[[X]]$ -module. Ainsi, son dual est également de X -torsion, et en inversant X , on obtient que $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}(M/M'_0) = \{0\}$.

Pour le second quotient, il faut plutôt regarder l'action du Frobenius. Nous sommes dans le cas de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, donc F est simplement l'action de $t = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Au vu de la formule $((\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f)(x) = f(p^{-1}x)$, le Frobenius transforme une fonction à support dans $p^n \mathbb{Z}_p$ en fonction à support dans $p^{n+1} \mathbb{Z}_p$. Ainsi, tout vecteur de M'_0/M_0 est de F^n -torsion pour un certain n , et tout sous-module $M_1 \in \mathcal{M}_{\Delta}(M'_0/M_0)$ est de F^n -torsion pour un certain n (il est de type fini sur $A[[X]][[F]]$). En particulier, sur $M_1[X^{-1}]$, le Frobenius est nilpotent. Comme selon le lemme 2.3.16 ce module est étale, il est également nul. En passant à la limite projective,

$$\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}(M'_0/M_0) = \{0\}.$$

□

Théorème 2.4.8. *Pour χ un caractère continu du tore, on a*

$$\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}(\text{Ind}_{B^-}^G(\chi)) = A((X)) \otimes_A A(\chi^{-1})$$

où l'action de T_+ sur $A(\chi^{-1})$ donnée par la multiplication par χ^{-1} .

Démonstration. On s'est restreint à M_0 qui d'après le lemme 2.4.6 est isomorphe à $\text{LC}(\mathbb{Z}_p, A)$ muni de la structure de $A[[X]]$ -module donnée par l'annexe B.1. La transformée d'Amice étudiée en annexe B.1 montre que le dual de M_0 est alors isomorphe à l'espace des mesures sur \mathbb{Z}_p qui est $A[[X]]$ avec identification de 1 au Dirac en 0, que l'on note δ_0 . Il reste à calculer l'action.

Si $t \in T_+$, on a

$$(t \cdot \delta_0)(f) = \delta_0(t^{-1} \cdot f) = f(0) \chi(t^{-1}) = \chi^{-1}(t) \delta_0(f).$$

□

2.4.2 Induction parabolique générale

Nous voulons démontrer une généralisation du résultat de la première section au cas d'une induction depuis un sous-groupe parabolique quelconque. On se fixe pour la suite un sous-groupe parabolique P contenant notre Borel B des matrices triangulaires supérieures.

Pour Π_P une représentation admissible de torsion du sous-groupe de Levi L_P que l'on étend à P^- via le morphisme surjectif $P^- \twoheadrightarrow L_P$, on s'intéresse à l'induite $\text{Ind}_{P^-}^G(\Pi_P)$

Définition 2.4.9 (Voir dans [Vig07] pourquoi cette définition est juste). Pour un groupe analytique p -adique H (un groupe contenant un pro- p -groupe ouvert U isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}_p)$), une A -représentation discrète continue Π de H est dite admissible si l'une des propriétés suivantes équivalentes est vérifiée :

- i) Pour tout sous-groupe ouvert compact H' de H , le A -module $\Pi^{H'}$ est de type fini.
- ii) Pour un pro- p -sous-groupe ouvert (compact) U de H le A -module Π^U est de type fini.
- iii) Pour tout sous-groupe ouvert compact H' de H , le $A[[H']]$ -module Π^\vee est de type fini.
- iv) Pour un pro- p -sous-groupe ouvert (compact) U de H le $A[[U]]$ -module Π^\vee est de type fini.

Corollaire 2.4.10. *La sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{disc}} H$ formée des représentations admissibles est abélienne.*

Démonstration. La stabilité par sous-objet provient des deux premières caractérisations de l'admissibilité couplées avec la noethérianité de A .

La stabilité par quotient provient de la dernière caractérisation de l'admissibilité, couplée avec l'exactitude du dual de Pontryagin et avec la noethérianité de $A[[U]]$. \square

Corollaire 2.4.11. *Dans le cas de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ qui nous occupe avec un sous-groupe parabolique P , si Π_P est une représentation discrète admissible de ϖ^h -torsion de L_P , alors $\mathrm{Ind}_{P^-}^G(\Pi_P)$ est admissible comme représentation de G .*

Démonstration. Prenons $K_1 = \mathrm{GL}_n(1 + p\mathbb{Z}_p)$. Nous cherchons à montrer en utilisant la deuxième caractérisation que $\mathrm{Ind}_{P^-}^G(\Pi_P)^{K_1}$ est de type fini sur A . Une fonction de ces invariants est déterminée par ses valeurs sur $P^- \backslash G / K_1$. Puisque $P^- \backslash G$ est compact muni de la topologie quotient et K_1 ouvert. Le double quotient précédent est fini. De plus pour tout $g \in \mathcal{R}(P^- \backslash G / K_1)$, il existe un entier m_g tel que la conjugaison par g^{-1} envoie $K_{m_g} = \mathrm{GL}_n(1 + p^{m_g}\mathbb{Z}_p)$ dans K_1 . De fait, pour toute fonction $f \in \mathrm{Ind}_{P^-}^G(\Pi_P)^{K_1}$ et tout $k \in K_{m_g} \cap L_P$, on a

$$\begin{aligned} k \cdot f(g) &= f(kg) \\ &= f(g(g^{-1}kg)) \\ &= f(g) \end{aligned}$$

Il existe ainsi une injection de A -modules

$$\mathrm{Ind}_{P^-}^G(\Pi_P) \hookrightarrow \bigoplus_{g \in \mathcal{R}(P^- \backslash G / K_1)} \Pi_P^{K_{m_g} \cap L_P}$$

et la première caractérisation affirme que les $\Pi_P^{K_{m_g} \cap L_P}$ sont tous des type fini sur A . \square

Ces deux corollaires ont pour but d'oublier dans la section qui suit les considérations d'appartenance des représentations considérées à $\mathrm{Rep}_{\varpi^h\text{-tors}} G$ puis qu'elles seront toutes admissibles, en particulier dénombrables. Le but de cette sous-section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.4.12. *Soit Π_P une représentation admissible de $\mathrm{Rep}_{\varpi^h\text{-tors}} L_P$ qui est localement admissible pour les $(t_\alpha)_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_P}$ (i.e. l'image de tout vecteur par $\prod_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_P} t_\alpha^{\mathbb{Z}}$ est finie). Il existe un isomorphisme naturel de T_+ -modules pro-étales sur $A((N_{\Delta,0}))$:*

$$\mathbf{D}_{\Delta}^\vee(\mathrm{Ind}_{P^-}^G(\Pi_P)) \cong A((N_{\Delta,0})) \widehat{\otimes}_{A((N_{\Delta_P,0}))} \mathbf{D}_{\Delta_P}^\vee(\Pi_P).$$

Remarque 2.4.13. L'énoncé du théorème précédent fait intervenir $\mathbf{D}_{\Delta_P}^\vee$ que nous n'avons pas défini. En réalité, la construction du foncteur s'inscrit dans un cadre plus général des groupes réductifs de centre connexe et scindés sur \mathbb{Q}_p , ici L_P . Le groupe de Lie p -adique L_P a encore un tore scindé sur \mathbb{Q}_p et ses racines sont les $(i \neq j)$ correspondant à un espace unidimensionnel $\mathrm{Id} + \mathbb{Q}_p E_{i,j}$ contenu dans L_P . On utilise les notations $H_{\Delta_P,0}$ pour l'intersection $H_{\Delta,0} \cap L_P$, $N_{L_P,0}$ pour l'intersection $N_{\Delta,0} \cap L_P$ et $N_{\Delta_P,0}$ pour le quotient $N_{L_P,0} / H_{\Delta_P,0}$, etc.

Remarque 2.4.14. L'hypothèse de locale admissibilité n'est pas restrictive pour les cas basiques : par exemple prenons $\Pi_{P,i}$ des représentations de torsion des $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{Q}_p)$ (où les n_i sont les tailles des blocs qui forment L_P), ayant chacune un caractère central χ_i (qui a une image finie puisque la représentation est à valeurs dans A). Alors, la représentation produit tensoriel $\otimes \Pi_{P,i}$ de L_P est encore de torsion et elle est localement admissible puisque pour $\alpha \notin \Delta_P$, la matrice t_α agit comme suit :

$$t_\alpha \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = (\chi_1(p)v_1 \otimes \dots \otimes \chi_j(p)v_j \otimes v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_k)$$

où $\alpha = (j, j + 1)$.

Le même raisonnement tient pour la représentation $\sum \Pi_{P,i}$.

Découpage de l'induite

L'annexe D.1.2 dont on gardera les notations nous fournit, en posant W le groupe de Weyl de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et W_P le groupe de Weyl de P , la décomposition de Bruhat

$$G = \bigsqcup_{w \in W(P)} P^- w B.$$

Définition 2.4.15. Pour $w \in W(P)$, on appelle $G_w = \overline{P^- w B}$ l'adhérence et on définit l'ordre partiel de Bruhat sur $W(P)$ comme $w' \leq w$ si et seulement si $G_{w'} \subseteq G_w$. M.-F. Vigneras dans [Vig08] donne [Jan03, p. II 13.7] comme référence. On choisit également un ordre total \preceq sur $W(P)$ qui est anticompatible avec l'ordre de Bruhat, i.e. si $w' < w$ alors $w \prec w'$.

Lemme 2.4.16. Pour $w \in W(P)$, il se trouve que $G_w = \cup_{w' \leq w} P^- w' B$.

Démonstration. La multiplication étant continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, l'adhérence G_w est stable par multiplication à gauche par P^- et à droite par B . Autrement dit, pour toute permutation w' dans $W(P)$, on obtient que $G_{w'} \subseteq G_w$ si et seulement si $w' \in G_w$ et si et seulement si $P^- w' B \cap G_w \neq \emptyset$. Ainsi, G_w est une union de $P^- w' B$, l'union étant exactement sur les $w' \leq w$. \square

Remarque 2.4.17. On peut définir l'ordre de Bruhat comme suit : on considère les écritures de longueur minimale des w avec les transpositions "racines simples" ($i \ i + 1$). Alors $w \leq w'$ si et seulement si w' est obtenu en supprimant des termes d'une écriture minimale de w . Il existe en particulier un minimum w_0 l'élément de plus grand longueur qui consiste en l'involution $i \mapsto n - i$. L'identité est un élément maximal.

Exemple 2.4.18. Pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et son unique parabolique B , on a $W(B) = \{\mathrm{Id}, (12)\}$. Pour noter les sous-ensembles de matrices de la décomposition de Bruhat, on indique par des croix les coefficients qui ne peuvent être nuls. Alors

$$B^- B = \begin{pmatrix} \times & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$B^- (12) B = \begin{pmatrix} 0 & \times \\ \times & * \end{pmatrix}.$$

On voit donc que $(12) \leq \mathrm{Id}$.

Exemple 2.4.19. Pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ et le parabolique B , l'arithmétique est plus subtile puisque $W(B) = \mathfrak{S}_3$. Par le calcul,

$$B^- B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \times & * \\ * & * \end{matrix}} & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \text{ où le carré est inversible}$$

$$B^- (23) B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \times & * \\ * & * \end{matrix}} & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \text{ où le carré n'est pas inversible}$$

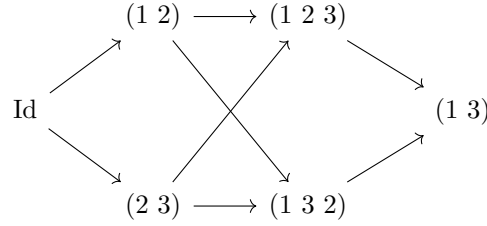
$$B^- (12) B = \begin{pmatrix} 0 & \times & * \\ \times & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$B^- (123) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ \times & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$B^* (132) B = \begin{pmatrix} 0 & \times & * \\ 0 & * & * \\ \times & * & * \end{pmatrix}$$

$$B^- (13) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & * \\ \times & * & * \end{pmatrix}.$$

Ici, chaque élément d'une longueur d'écriture minimale est plus petit que tous les éléments de la longueur précédente où seule Id est de longueur nulle, où (12) et (23) sont de longueur 1, où les 3-cycles sont de longueur 2 et où (13) est de longueur maximale. De manière plus graphique, l'ordre de Bruhat se représente comme



Définition 2.4.20. On note ensuite $U_w = \cup_{w' \prec w} P^- w' B$ qui est ouvert puisque son complémentaire est

$$\bigcup_{w \prec w'} P^- w' B = \bigcup_{w \prec w'} G_{w'}$$

Ces ouverts étant croissants pour l'ordre total \prec , ils induisent une filtration de $\text{Ind}_{P^-}^G(\Pi_P)$ via $F_w = \{f \in \text{Ind}_{P^-}^G(\Pi_P) \mid \text{supp}(f) \subset U_w\}$.

Démonstration. Nous montrons tout de même l'identité $\cup_{w \prec w'} P^- w' B = \cup_{w \prec w'} G_{w'}$. Une inclusion est évidente et dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}
\bigcup_{w \prec w'} G_w &= \bigcup_{w \prec w'} \bigcup_{w'' \leq w'} P^- w'' B \\
&\subseteq \bigcup_{w \prec w'} \bigcup_{w' \prec w''} P^- w'' B \\
&= \bigcup_{w \prec w''} P^- w'' B
\end{aligned}$$

□

Le reste de cette sous-section sera consacrée à expliciter les graduations que fournit cette filtration.

Proposition 2.4.21. Les gradués sont des sous-objets de $\mathcal{C}_w(\Pi_P) = c - \text{Ind}_{P^-}^{P^- w B}(\Pi_P)$. Le premier cran de la filtration est même $\mathcal{C}_{\text{Id}}(\Pi_P)$ entier.

Démonstration. Soit w' le prédécesseur de w . Regardons l'application de restriction à $P^- w B$ allant de F_w à $\text{Ind}_{P^-}^{P^- w B}(\Pi_P)$. Soit f une fonction dans F_w . Son support modulo P^- est un fermé de l'espace compact $P^- \backslash G$. Son support est un compact contenu dans l'ouvert $P^- \backslash U_w$: c'est un compact de ce dernier quotient. Enfin, le support de sa restriction à $P^- w B$, qui est fermé dans U_w en écrivant $U_w = U_{w'} \sqcup P^- w B$, est un fermé du support dans $P^- \backslash U_w$ qui est compact : c'est un compact. L'image de la restriction est donc à valeurs dans $\mathcal{C}_w(\Pi_P)$.

De plus, puisque tous les éléments de F_w sont à support dans $U_w = U_{w'} \sqcup P^- w B$, le noyau est exactement $F_{w'}$ ce qui fournit une injection du gradué dans $\mathcal{C}_w(\Pi_P)$. Le résultat supplémentaire pour le premier cran s'obtient en remarquant que toute fonction de $\mathcal{C}_{\text{Id}}(\Pi_P)$ s'étend par 0 en une fonction de $\text{Ind}_{P^-}^G(\Pi_P)$. □

Remarque 2.4.22. Dans le cas déjà traité de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on voit que le premier cran de la filtration s'identifie par l'isomorphisme de la proposition 2.4.5 aux fonctions à support compact dans \mathbb{Q}_p , auxquelles nous nous étions d'abord restreint dans le calcul de la première section.

Remarque 2.4.23. Nous pouvons essayer de comprendre la preuve précédente sans la mécanique de la topologie : essayons de montrer à la main que la restriction à $P^- w B$ arrive dans les fonctions à support compact modulo P^- dans le cas de $G = \text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, $P = B$ et au cran $w = (2\ 3)$ de la filtration. La proposition D.2.4 nous fournit comme représentants de $B^- \backslash B^- w B$ la famille $N_w = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}_p \right\}$. De plus, la suite d'applications continues

$$N_w \hookrightarrow B^- w N_w \twoheadrightarrow B^- \backslash B^- w B$$

montre qu'il suffit de prouver que le support de la restriction à N_w muni de la topologie induite par N est compact. On peut écrire

$$\begin{aligned}
w \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -ba^{-1} & -a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 1 & ba^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -ba^{-1} & -a^{-1} \end{pmatrix} (1\ 3\ 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ba^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si $v_p(a) \leq -m$ alors la produit appartient à $B^-(1\ 3\ 2)N_{(1\ 3\ 2)}K_m$. On peut aussi écrire

$$\begin{aligned}
w \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 1 & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{-1} & ab^{-1} & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 1 & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1\ 2\ 3) \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b^{-1} & ab^{-1} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si $v_p(a) \geq -m$ et $v_p(b) \leq -2m$ alors le produit appartient à $B^-(1\ 2\ 3)N_{(1\ 2\ 3)}K_m$.

De fait, si $f \in F_w$ invariante par K_m , on en déduit que f est nulle sur $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dès que $v_p(a) \leq -m$ ou $v_p(a) \geq -m$ et $v_p(b) \leq -2m$. Le support est compact.

Une fois cette décomposition effectuée, nous allons calculer sur chacun de ces termes ce que fait le foncteur $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}$.

Calcul pour $w \neq \text{Id}$

Pour $w \neq \text{Id}$, il se trouve que nous voulons trouver $\{0\}$, comme le suggère le cas particulier de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ où nous avons réussi à nous ramener au premier cran de la filtration. Par le corollaire 2.3.46, il suffit de prouver que le foncteur de Breuil appliqué aux autres crans de la filtration donne zéro. Mieux, comme ce sont des sous-objets de $\mathcal{C}_w(\Pi_P)$ et que le foncteur de Breuil est exact à droite, il suffit de prouver que le foncteur de Breuil s'annule sur $\mathcal{C}_w(\Pi_P)$.

Lemme 2.4.24. *Notons Π_P^w la représentation de $w^{-1}P^-w$ ayant le même espace sous-jacent que Π_P , avec action de $w^{-1}pw$ égale à l'action de p sur Π_P . Il existe une bijection N -équivariante*

$$\mathcal{C}_w(\Pi_P) \cong c - \text{Ind}_{w^{-1}P^-w \cap N}^N(\Pi_P^w).$$

De plus, l'action de T_+ à gauche se transfère sur le terme de droite en

$$(t \cdot g)(n) = \Pi_P^w(t)(g(t^{-1}nt)).$$

Les actions de N à gauche et à droite étant lisses, cette bijection peut s'interpréter comme un isomorphisme de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -modules qui est T_+ -équivariant.

Démonstration. L'idée vient de ce que $P^-wB = P^-wN$ donc qu'il suffit pour connaître une fonction de $\mathcal{C}_w(\Pi_P)$ de la connaître sur wN . Pour être précis, fixons

$$r : \mathcal{C}_w(\Pi_P) \rightarrow c - \text{Ind}_{w^{-1}P^-w \cap N}^N(\Pi_P^w), \quad f \mapsto (n \mapsto (f(wn))).$$

Montrons d'abord qu'elle est bien définie. Pour f à la source et $w^{-1}p^-w \in w^{-1}P^-w \cap N$, calculons

$$\begin{aligned}
r(f)(w^{-1}p^{-}wn) &= f(p^{-}wn) \\
&= \Pi_P(p^{-})(f(wn)) \\
&= \Pi_P^w(w^{-1}p^{-}w)(f(wn)) \\
&= \Pi_P^w(w^{-1}p^{-}w)(r(f)(n))
\end{aligned}$$

De plus, le fait que f soit à support compact modulo P^{-} dit exactement que $r(f)$ est à support compact et la continuité ne pose aucun problème.

L'injectivité provient de ce que wN est un système de représentants de $P^{-} \backslash P^{-}wN$. La surjectivité est plus subtile. Prenons g dans le but. On voudrait définir $f(p^{-}wn) = \Pi_P(p^{-})(g(n))$ mais cette définition est a priori ambiguë. Néanmoins, si $p^{-}wn = q^{-}wm$ alors $w^{-1}(q^{-})^{-1}p^{-}w$ appartient à N ce qui entraîne que $g(m) = \Pi_P((q^{-})^{-1}p^{-})(g(n))$: autrement dit, les deux définitions de f coïncident. Maintenant que f est correctement définie, elle a pour support dans $P^{-} \backslash P^{-}wN$ l'image du support de g , et si g est invariante par l'action de multiplication à droite d'un voisinage N' de 0 dans N , alors f également. Autrement dit, la fonction f est bien dans $\mathcal{C}_w(\Pi_P)$, d'image g par r .

Cette bijection est N -équivariante puisque l'action est la multiplication à droite des deux côtés.

Pour l'action de T_+ , calculons le transfert de l'action le long de l'isomorphisme r :

$$\begin{aligned}
r(t \cdot f)(n) &= f(wnt) \\
&= f(wtw^{-1}wt^{-1}nt) \\
&= \Pi_P(wtw^{-1})(f(wt^{-1}nt)) \\
&= \Pi_P^w(t)(r(f)(t^{-1}nt))
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.4.25. *Il existe un isomorphisme*

$$\mathbf{D}_\xi^\vee(\mathcal{C}_w(\Pi_P)) = \mathbf{D}_\xi^\vee((\text{Ind}_{w^{-1}P^{-}w \cap N_0}^{N_0}(\Pi_P^w))^{N_1})$$

où nous rappelons que nous avons étendu \mathbf{D}_ξ^\vee aux $A[[X]]$ -modules avec action semi-linéaire de Γ .

Démonstration. Commençons par prouver que si M est un sous- $A[[X]][F]$ -module de type fini du module $(c - \text{Ind}_{w^{-1}P^{-}w \cap N}^N(\Pi_P^w))^{N_1}$ alors il existe un entier n tel que tous les éléments de $F^n M$ sont à support dans N_0 . En particulier, on pourra identifier $F^n M$ à un sous-module de $(\text{Ind}_{w^{-1}P^{-}w \cap N_0}^{N_0}(\Pi_P^w))^{N_1}$.

Pour ce faire, posons

$$N_k = \xi(p)^{-k} N_0 \xi(p)^k = \begin{pmatrix} 1 & p^{-k(j-i)\mathbb{Z}_p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tout compact de N est contenu dans l'un des N_k . Pour améliorer la lisibilité, posons également $M_k = (\text{Ind}_{w^{-1}P^{-}w \cap N_k}^{N_k}(\Pi_P^w))^{N_1}$ qui peut être vu comme le sous- $A[[X]]$ -module de $(c - \text{Ind}_{w^{-1}P^{-}w \cap N}^N(\Pi_P^w))^{N_1}$ des fonctions à support dans $(w^{-1}P^{-}w \cap N)N_k$. Ces sous-modules forment une filtration croissante et exhaustive. Il se trouve que $F(M_{k+1}) \subseteq M_k$. En effet, si le support de f est contenu dans $(w^{-1}P^{-}w \cap N)N_k$ et que $F(f)(n) \neq 0$, on sait que

$$F(f)(n) = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_1/\xi(p)N_1\xi(p)^{-1})} (u\xi(p) \cdot f)(n).$$

Il existe par conséquent au moins un représentant u tel que $\xi(p)^{-1}nu\xi(p) \in (w^{-1}P^{-}w \cap N)N_{k+1}$.

$$\begin{aligned}
\xi(p)^{-1}nu\xi(p) \in (w^{-1}P^{-}w \cap N)N_{k+1} &\Leftrightarrow nu \in (w^{-1}P^{-}w \cap N)\xi(p)N_{k+1}\xi(p)^{-1} \\
&\Leftrightarrow nu \in (w^{-1}P^{-}w \cap N)N_k \\
&\Leftrightarrow n \in (w^{-1}P^{-}w \cap N)N_k
\end{aligned}$$

La filtration étant exhaustive pour tout élément f dans M , il existe n tel que $F^n(f)$ appartient à M_0 . Ce qui précède montre également que M_0 est stable par F . Ainsi, si un système générateur de M sur $A[[X]][F]$ est envoyé par F^n dans M_0 , c'est vrai pour M tout entier.

Soit alors $\widetilde{M} = (c - \text{Ind}_{w^{-1}P^-w \cap N}^N(\Pi_P^w))^{N_1}/M_0$. Ce que l'on vient de prouver montre que tout élément de $M \in \mathcal{M}(\widetilde{M})$ vérifie $F^n(M) = \{0\}$ pour un certain entier n (prendre un module de type fini le relevant et appliquer ce qui précède). De fait, par l'analogie dans le cas de Breuil du théorème 2.3.15, le Frobenius étale sur $M^\vee[X^{-1}]$ est nul, donc $M^\vee[X^{-1}] = \{0\}$. On en déduit que $\mathbf{D}_\xi^\vee(\widetilde{M}) = \{0\}$. La suite exacte

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow (c - \text{Ind}_{w^{-1}P^-w \cap N}^N(\Pi_P^w))^{N_1} \rightarrow \widetilde{M}$$

et l'exactitude à droite du foncteur \mathbf{D}_ξ^\vee concluent. \square

Cherchons maintenant à mieux comprendre le double quotient qui contient toute l'information d'une fonction de la dernière induite $(c - \text{Ind}_{w^{-1}P^-w \cap N_0}^{N_0}(\Pi_P^w))^{N_1}$, i.e. le double quotient $(w^{-1}P^-w \cap N_0) \backslash N_0/N_1$.

Lemme 2.4.26. *Si $w \neq \text{Id}$, alors $w^{-1}(\Phi^- \setminus \Phi_P^-) \cap \Delta \neq \emptyset$.*

Démonstration. Comme $w \neq \text{Id}$, il existe un entier i avec $w(i+1) < w(i)$. Alors, $w((i < i+1))$ est la racine $t \mapsto t_{w(i)} t_{w(i+1)}^{-1}$ qui appartient à Φ^- . De plus, comme w est un représentant de Kostant, on a $w^{-1}(\Phi_P^-) \subseteq \Phi^-$ d'où $w^{-1}(\Phi^-) \cap \Delta = w^{-1}(\Phi^- \setminus \Phi_P^-) \cap \Delta$ \square

Lemme 2.4.27. *Si $w \neq \text{Id}$, le double quotient $(w^{-1}P^-w \cap N_0) \backslash N_0/N_1$ est trivial.*

Démonstration. Prenons $\alpha \in w^{-1}(\Phi^-) \cap \Delta$ donnée par le lemme précédent. On a $N_{\alpha,0} \subset w^{-1}P^-w$ puisque $w(\alpha)$ est une racine négative. Donc $N_{\alpha,0} \subset w^{-1}P^-w \cap N_0$. Il suffit donc de regarder $N_{\alpha,0} \backslash N_0/N_1 = l(N_{\alpha,0}) \backslash \mathbb{Z}_p$ qui est trivial. \square

Proposition 2.4.28. *Le module $\mathbf{D}_\xi^\vee(\mathcal{C}_w(\Pi_P))$ est trivial si $w \neq \text{Id}$.*

Démonstration. Le lemme précédent prouve que l'injection entre A -modules donnée par la restriction

$$(\text{Ind}_{w^{-1}P^-w \cap N_0}^{N_0}(\Pi_P^w))^{N_1} \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{R}((w^{-1}N_{P^-w} \cap N_0) \backslash N_0/N_1), \Pi_P^w)$$

a pour but les fonctions continues sur un ensemble à un élément. Disons que l'on choisit l'identité comme représentant. Calculons l'action de $(1+X)$ à la source via cette injection. Il se trouve que $((1+X)f)(\text{Id})$ vaut $f(n_\alpha)$ pour n'importe quelle racine simple α . Prenons $\alpha \in w^{-1}(\Phi^- \setminus \Phi_P^-) \cap \Delta$ comme au lemme 2.4.26 ce qui entraîne qu'il existe $\beta \in \Phi^- \setminus \Phi_P^-$ tel que $n_\alpha = w^{-1}n_\beta w$ qui agit trivialement sur Π_P^w . Il en découle que $((1+X)f)(\text{Id}) = (w^{-1}n_\beta w) \cdot f(\text{Id}) = f(\text{Id})$. La multiplication par X est nulle à la source. Après qu'on a passé au dual et inversé X , le module $\mathbf{D}_\xi^\vee(\mathcal{C}_w(\Pi_P))$ est nul. \square

Calcul pour l'identité

Pour l'identité, le lemme 2.4.24 fonctionne encore et fournit un isomorphisme de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -modules qui est T_+ -équivariant entre $\mathcal{C}_{\text{Id}}(\Pi_P)$ et $c - \text{Ind}_{P^- \cap N}^N(\Pi_P) = c - \text{Ind}_{N_{L_P}}^N(\Pi_P)$. La subtilité derrière cet isomorphisme reste de calculer explicitement l'action de T_+ obtenue sur l'induite par transfert de structure.

De plus, la démonstration du lemme 2.4.25 s'adapte au foncteur de Zábřádí en remplaçant F par $\prod_{\alpha \in \Delta} F_\alpha$; on se ramène au calcul de $\mathbf{D}_\Delta^\vee((\text{Ind}_{N_{L_P,0}}^{N_0}(\Pi_P))^{H_{\Delta,0}})$. À nouveau, la subtilité reste de comprendre l'action de Hecke obtenue sur $(\text{Ind}_{N_{L_P,0}}^{N_0}(\Pi_P))^{H_{\Delta,0}}$. Les deux lemmes suivants suivent la transformation de l'action de T_+ .

Lemme 2.4.29. *L'action issue de $\mathcal{C}_{\text{Id}}(\Pi_P)$ devient, sur son sous-espace $\text{Ind}_{N_{L_P,0}}^{N_0}(\Pi_P)$ l'action de T_+ définie par*

$$(t \cdot f)(n) = \sum_{u \in \mathcal{R}(N_{L_P,0}/tN_{L_P,0}t^{-1})} ut \cdot f(t^{-1}u^{-1}nt) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin N_{L_P,0}tN_0t^{-1} \\ ut \cdot f(n_0) & \text{si } n = utn_0t^{-1} \end{cases}$$

où dans la première somme au plus un terme est non nul et la fonction f est étendue par 0 en-dehors de N_0 .

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{C}_{\text{Id}}(\Pi_P)$ à support dans $N_{L_P}N_0$ et Ψ l'isomorphisme, et $n \in N_0$. On sait que $\Psi(t \cdot g)(n) = g(nt)$ qui est donc non nul si et seulement si

$$\begin{aligned} nt \in N_{L_P}N_0 &\Leftrightarrow t^{-1}nt \in N_{L_P}N_0 \\ &\Leftrightarrow \exists(n_p, n_0) \in N_{L_P} \times N_0, t^{-1}nt = n_p n_0 \\ &\Leftrightarrow \exists(n_p, n_0) \in N_{L_P} \times N_0, n = tn_p t^{-1} n_0 t^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists(u, n_0) \in N_{L_P} \times N_0, n = utn_0 t^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists(u, n_0) \in N_{L_P,0} \times N_0, n = utn_0 t^{-1} \end{aligned}$$

Ce qui règle déjà le premier cas. Et si $n = utn_0 t^{-1}$, on peut écrire $g(nt) = g(utn_0) = ut \cdot g(n_0) = ut \cdot \Psi(g)(t^{-1}u^{-1}nt)$ ce qui montre le deuxième cas.

Pour trouver la somme, remarquons que si u et u' vérifient que $t^{-1}u^{-1}nt \in N_0$, alors $u^{-1}u' \in tN_0 t^{-1}$ donc on peut écrire $u' = utvt^{-1}$ avec $v \in N_{L_P,0}$. Réciproquement avec une telle relation, $t^{-1}u^{-1}nt \in N_0$ si et seulement si c'est vrai pour u' . Enfin, si $f \in \text{Ind}_{N_{L_P,0}}^{N_0}(\Pi_P)$, alors

$$u't \cdot f(t^{-1}u'^{-1}nt) = utv \cdot f(v^{-1}t^{-1}u^{-1}nt) = ut \cdot f(t^{-1}u^{-1}nt)$$

□

Le lemme précédent nous fournit les clés pour calculer les Frobenius sur l'espace des invariants.

Proposition 2.4.30. *Sur $(\text{Ind}_{N_{L_P,0}}^{N_0}(\Pi_P))^{H_{\Delta,0}}$, pour $t \in T_+$, l'action de Hecke peut-être défini en fonction de l'action de Hecke sur $\Pi_P^{H_{\Delta_P,0}}$ par*

$$F_t(f)(n) = \sum_{u \in \mathcal{R}(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})} \sum_{v \in \mathcal{R}(N_{L_P,0}/tN_{L_P,0}t^{-1}H_{\Delta,0})} v \cdot F_t(f(t^{-1}v^{-1}nut))$$

où au plus l'un des termes est non nuls

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned} F_t(f)(n) &= \sum_{u \in \mathcal{R}(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})} (ut \cdot f)(n) \\ &= \sum_{u \in \mathcal{R}(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})} (t \cdot f)(nu) \\ &= \sum_{u \in \mathcal{R}(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})} \sum_{m \in \mathcal{R}(N_{L_P,0}/tN_{L_P,0}t^{-1})} mt \cdot f(t^{-1}m^{-1}nut) \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du lemme précédent.

Si tous les termes ne sont pas nuls, alors $n \in N_{L_P}tN_0 t^{-1}H_{\Delta,0}$. Si $n = mtn_0 t^{-1}u^{-1} = mtn_0' t^{-1}u'^{-1}$, alors $u'u^{-1} \in tH_{\Delta,0}t^{-1}$. De fait à m fixé il existe au plus un u qui donne un terme non nul.

De plus, si $n = mtn_0 t^{-1}u = m'tn_0' t^{-1}u'$ alors en utilisant que $H_{\Delta,0}$ est distingué on obtient que $m'^{-1}m$ appartient à $tN_0 t^{-1}H_{\Delta,0}$ et même à $tN_{L_P,0}t^{-1}H_{\Delta,0}$ puisque c'est dans $N_{L_P,0}$. En écrivant donc $m = m'tn_p t^{-1}h$ alors $n = m'tn_p n_0' t^{-1}hu$ et donc $u' = hu$ (on a montré qu'à m fixé un seul u pouvait convenir). La volonté de faire apparaître des Frobenius sur Π_P , aiguillée par le groupement tout neuf des m pour lesquels un terme est non nul, nous invite à décomposer le deuxième quotient en

$$N_{L_P,0}/tN_{L_P,0}t^{-1} = (H_{\Delta_P,0}/tH_{\Delta_P,0}t^{-1}) \times (N_{L_P,0}/tN_{L_P,0}t^{-1}H_{\Delta_P,0})$$

et donc

$$F_t(f)(n) = \sum_{v \in \mathcal{R}(N_{L_P,0}/tN_{L_P,0}t^{-1}H_{\Delta_P,0})} \sum_{\omega \in \mathcal{R}(H_{\Delta_P,0}/tH_{\Delta_P,0}t^{-1})} \sum_{u \in \mathcal{R}(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})} v\omega t \cdot f(t^{-1}\omega^{-1}v^{-1}nut).$$

Ce qui précède montre qu'il existe au plus un v tel que la somme suivante possède des termes non nuls. Pour un tel v , si $n = vtn_0 t^{-1}u^{-1}$ et que $\omega \in H_{\Delta_P,0}$, il existe $h \in H_{\Delta,0}$ tel que $\omega t n_0 t^{-1} = t n_0 t^{-1} h$ et donc $n = v\omega t n_0 t^{-1} h^{-1} u^{-1}$. Ainsi, le représentant u' de la classe de uh est l'unique terme non nul pour $m = v\omega$ et

$$f(t^{-1}v^{-1}nut) = f(t^{-1}(v\omega)^{-1}nuht) = f(t^{-1}(v\omega)^{-1}nu't)$$

où la dernière égalité vient de ce que $uht \in u'tH_{\Delta,0}$. On appelle $u(v, \omega)$ l'unique u , s'il existe, pour lequel $t^{-1}\omega^{-1}v^{-1}nut \in N_0$ (et en choisissant arbitrairement sinon). On tombe sur

$$\begin{aligned}
F_t(f)(n) &= \sum_{v \in \mathcal{R}(N_{LP,0}/tN_{LP,0}t^{-1}H_{\Delta P,0})} \sum_{\omega \in \mathcal{R}(H_{\Delta P,0}/tH_{\Delta P,0}t^{-1})} v\omega t \cdot f(t^{-1}\omega^{-1}v^{-1}nu(v, \omega)t) \\
&= \sum_{v \in \mathcal{R}(N_{LP,0}/tN_{LP,0}t^{-1}H_{\Delta P,0})} \sum_{\omega \in \mathcal{R}(H_{\Delta P,0}/tH_{\Delta P,0}t^{-1})} v\omega t \cdot f(t^{-1}v^{-1}nu(v, \text{Id})t) \\
&= \sum_{v \in \mathcal{R}(N_{LP,0}/tN_{LP,0}t^{-1}H_{\Delta P,0})} v\omega t \cdot F_t(f(t^{-1}v^{-1}nu(v, \text{Id})t)) \\
&= \sum_{u \in \mathcal{R}(H_{\Delta,0}/tH_{\Delta,0}t^{-1})} \sum_{v \in \mathcal{R}(N_{LP,0}/tN_{LP,0}t^{-1}H_{\Delta P,0})} v\omega t \cdot F_t(f(t^{-1}v^{-1}nut))
\end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a rajouté de manière factice des termes nuls.

On a en particulier prouvé au passage qu'au plus un terme de la dernière somme était non nul, puisque dans la première égalité, au plus un v donne une somme non nulle. \square

Calculons à présent $\mathbf{D}_{\Delta}^{\vee}((\text{Ind}_{N_{LP,0}}^{N_0}(\Pi_P))^{H_{\Delta,0}})$.

Lemme 2.4.31. *Soient S_1, S_2 deux groupes profinis. Soient également M_1 un $A[[S_1]]$ -module et M_2 un $A[[S_2]]$ -module de torsion (i.e. muni d'une action de S_2 lisse pour la topologie discrète sur M_2). Alors le produit tensoriel $M_1 \otimes_A M_2$ est naturellement muni d'une structure de $A[[S_1 \times S_2]]$ -module.*

Démonstration. Le module $M_1 \otimes_A M_2$ est naturellement muni d'une structure de $A[[S_1]] \otimes_A A[[S_2]]$ -module. De plus, pour tout élément m de $M_1 \otimes_A M_2$, la lissité de M_2 affirme que l'action de $A[[S_1]] \otimes_A A[[S_2]]$ se factorise par un quotient $A[[S_1]] \otimes_A A[[S_2]]$ avec S_2' un quotient fini de S_2 . Sur cet élément, la surjection $A[[S_1]] \widehat{\otimes}_A A[[S_2]] \rightarrow A[[S_1]] \otimes_A A[[S_2']]$ fournit une action du produit tensoriel complété qui ne dépend pas du choix de S_2' . Par conséquent, le groupe $M_1 \otimes_A M_2$ obtient le galon de $A[[S_1]] \widehat{\otimes}_A A[[S_2]]$ -module. Pour conclure, on utilise le lemme B.3.1. \square

Lemme 2.4.32. *Le $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module $(\text{Ind}_{N_{LP,0}}^{N_0}(\Pi_P))^{H_{\Delta,0}}$ est isomorphe à $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^{\Delta}/\mathbb{Z}_p^{\Delta P}, A) \otimes_A \Pi_P^{H_{\Delta P,0}}$.*

À droite, la structure de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module est obtenue grâce au lemme précédent (le $A[[N_{\Delta P,0}]]$ -module $\Pi_P^{H_{\Delta P,0}}$ est lisse) et à l'identification de groupes profinis de $N_{\Delta,0} \cong \mathbb{Z}_p^{\Delta}/\mathbb{Z}_p^{\Delta P} \times N_{\Delta P,0}$.

Démonstration. Une fonction f dans $(\text{Ind}_{N_{LP,0}}^{N_0}(\Pi_P))^{H_{\Delta,0}}$ est définie par son image sur des représentants de $N_{LP,0} \setminus N_0/H_{\Delta,0}$. De plus, via l'isomorphisme

$$l : N_0/H_{\Delta,0} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{\Delta}$$

l'image de $N_{LP,0}$ est exactement $\mathbb{Z}_p^{\Delta P}$ d'où une identification

$$l_P : N_{LP,0} \setminus N_0/H_{\Delta,0} \cong \mathbb{Z}_p^{\Delta}/\mathbb{Z}_p^{\Delta P}$$

Remarquons d'ailleurs que les $\prod_{\alpha \notin \Delta_P} N_{\alpha,0}$ forment un système de représentants. On identifie alors une fonction f de $(\text{Ind}_{N_{LP,0}}^{N_0}(\Pi))^{H_{\Delta,0}}$ à une fonction depuis $\mathbb{Z}_p^{\Delta}/\mathbb{Z}_p^{\Delta P}$ vers Π_P via ces représentants. La continuité au départ garantit même que l'on peut identifier f à une fonction dans $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^{\Delta}/\mathbb{Z}_p^{\Delta P}, \Pi_P)$. De plus, si $n \in N_0$ et que $h \in H_{\Delta P,0}$, on calcule de deux manières $f(h^{-1}nh)$. D'un côté :

$$\begin{aligned}
f(h^{-1}nh) &= f(nm^{-1}h^{-1}nh) \\
&= f(n)
\end{aligned}$$

car $(n^{-1}h^{-1}n)h$ appartient à $H_{\Delta,0}$. De l'autre, puisque h^{-1} appartient à $N_{LP,0}$, on obtient

$$f(h^{-1}nh) = f(nh) = \Pi_P(h)^{-1}(f(n))$$

ce qui prouve que la fonction localement constante à laquelle f s'identifie est en réalité à valeurs dans $\Pi_P^{H_{\Delta P,0}}$.

Inversement, pour une telle fonction g dans $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, \Pi_P^{H_{\Delta_P,0}})$, on pose $f(n) = \Pi_P(n_P)(g(n_0))$ où l'on a écrit $n = n_P n_0 h$ avec $n_0 \in \prod_{\alpha \notin \Delta_P} N_{\alpha,0}$, $n_P \in N_{L_P,0}$ et $h \in H_{\Delta,0}$. La première question est celle de l'ambiguïté de cette définition. Si $n_P n_0 h = n'_P n'_0 h'$, on sait déjà que $n_0 = n'_0$ car $\prod_{\alpha \notin \Delta_P} N_{\alpha,0}$ sont des représentants. De plus, la matrice $n'^{-1}_P n_P$ appartient à $H_{\Delta,0}$, et même à $H_{\Delta_P,0}$, ce qui donne $\Pi_P(n'_P)(g(n_0)) = \Pi_P(n_P)(g(n_0))$; on a levé l'ambiguïté de la définition. Reste à vérifier la lissité de l'action sur f . Puisque N_0 est compact, il suffit de vérifier que pour tout n il existe k avec $f(n N_k) = f(n)$, où l'on rappelle que $N_k = \xi(p) N_0 \xi(p)^{-1}$. Posons $n = n_P n_0 h$ comme dans la décomposition précédente. Par continuité de g , on sait qu'il existe k pour lequel g est constante sur $\prod_{\alpha \notin \Delta_P} u_\alpha(\alpha(n_0) + p^k \mathbb{Z}_p)$. Quitte à prendre k assez grand, on peut également supposer que $N_{L_P,k}$ laisse fixe $g(n_0)$. Alors, pour tout n_k dans N_k que l'on écrit $n_{P,k} n_{0,k}$ avec $n_{P,k}$ dans $N_{L_P,k}$ et $n_{0,k}$ dans $\prod_{\alpha \notin \Delta_P} u_\alpha(p^k \mathbb{Z}_p)$, on peut écrire

$$n n_k = n_P n_0 h n_{P,k} n_{0,k} = n_P (n_0 n_{P,k} n_0^{-1}) n_0 n_{0,k} h'$$

avec le produit des deux premiers termes dans N_k que l'on peut donc écrire $n'_{P,k} n'_{0,k}$. Il en sort que $n n_k$ appartient à $N_k \prod_{\alpha \notin \Delta_P} u_\alpha(\alpha(n_0) + p^n \mathbb{Z}_p)$. La fonction f appartient de fait à la première induite.

Pour transformer $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, \Pi_P^{H_{\Delta_P,0}})$ en produit tensoriel, il suffit de remarquer que l'image d'une telle fonction est finie, puisque $\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}$ est compact.

Soit f dans la première induite, g son image dans les fonctions localement constantes et $n' = n_P \tilde{n}$ la décomposition d'un élément de $\prod_{\alpha \in \Delta_P} N_{\alpha,0} \times \prod_{\alpha \notin \Delta_P} N_{\alpha,0}$. L'image de $n' \cdot f$ associée à n dans $\prod_{\alpha \notin \Delta_P} N_{\alpha,0}$ l'élément $\Pi_P(n_P)(g(n \tilde{n}))$ (on utilise la commutativité des $N_{\alpha,0}$). Autrement dit, la bijection précédente est un isomorphisme de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -modules. \square

Il faut maintenant voir comment se transfère les Frobenius sur $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A) \otimes_A \Pi_P^{H_{\Delta_P,0}}$ via l'isomorphisme du lemme 2.4.32.

Lemme 2.4.33. *Soit M' un $A[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta \setminus \Delta_P]]$ -module avec un Frobenius φ_t -semi-linéaire F_t et M un $A[[N_{\Delta_P,0}]]$ -module de torsion avec un Frobenius φ_t -semi-linéaire F_t , alors le produit tensoriel $F'_t \otimes F_t$ est semi-linéaire sur $M' \otimes_A M$ muni de la structure de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module du lemme 2.4.31.*

Démonstration. Limpide une fois que l'on a établi que φ_t sur $A[[N_{\Delta,0}]]$ est le produit tensoriel complété des φ_t sur $A[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta \setminus \Delta_P]]$ et $A[[N_{\Delta_P,0}]]$. Pour ce dernier fait, voir la proposition B.3.2. \square

Définition 2.4.34. L'action de T_+ provenant de $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta, A)$ ne laisse pas stable $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A)$. On munit ce dernier d'une action par l'action de conjugaison de t via l'isomorphisme que nous avons établi entre $\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}$ et $\prod_{\alpha \notin \Delta_P} N_{\alpha,0}$. On note F'_t lesdits Frobenius.

Il est aussi possible d'interpréter cette action comme l'action comme provenant de $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta, A$: l'action de $\{t \in T_+ \mid \forall \alpha \in \Delta_P, \alpha(t) = 1\}$ laisse effectivement stable $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A)$. Il devient alors possible de définir l'action de $t_{(\gamma_\alpha)}$ comme la restriction de celle de $t_{\left(\frac{x_\alpha}{\alpha(t)}\right)}$ sur $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta, A)$.

Proposition 2.4.35. *Les Frobenius obtenus par transfert de structure le long de l'isomorphisme du lemme 2.4.32 sur $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A) \otimes_A \Pi_P^{H_{\Delta_P,0}}$ est l'action produit tensorielle que l'on vient de décrire.*

Démonstration. Par semi-linéarité des deux Frobenius possible, il suffit de le vérifier sur un tenseur pur $g = f \otimes m$. Dans la suite du calcul, on imaginera plutôt que g est la fonction dans l'induite dont $f \otimes m$ provient.

Pour $t \in T_0$, la somme dans le lemme 2.4.30 n'a qu'un terme et donc $F_t(g)(n) = F_t(g(t^{-1}nt))$ ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} F_t(f \otimes m)(x_\alpha)_{\alpha \notin \Delta_P} &= F_t(g(t^{-1} \prod u_\alpha(x_\alpha) t)) \\ &= F_t\left(f\left(\frac{x_\alpha}{\alpha(t)}\right) m\right) \\ &= (F'_t(f) \otimes F_t(m))(x_\alpha)_{\alpha \notin \Delta_P} \end{aligned}$$

Pour $\beta \in \Delta_P$, la conjugaison par t_β est l'identité sur $\prod_{\alpha \notin \Delta_P} N_{\alpha,0}$. Autrement dit, la terme de la somme (toujours celle du lemme 2.4.30) associé à $u = v = \text{Id}$ est non nul, et ce doit a fortiori être le seul. On a donc $F_\beta(f \otimes m) = f \otimes F_\beta(m) = F'_\beta(f) \otimes F_\beta(m)$. Pour la dernière égalité, on remarque que F'_β est la restriction de l'endomorphisme F_{Id} de $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta, A)$.

Pour $\beta \notin \Delta_P$ et $n \in \prod_{\alpha \notin \Delta_P} N_{\alpha,0}$, on sait que n appartient à $t_\beta N_0 t_\beta^{-1}$ si et seulement si $u_\beta^{-1}(n) \in p \mathbb{Z}_p$. Or, u_β^{-1} se factorise par l_P (voir la définition au lemme 2.4.32) qui est invariant par multiplication à gauche

par $N_{L_P,0}$ et à droite par $H_{\Delta,0}$. De fait, la matrice n appartient à $t_\beta N_0 t_\beta^{-1}$ si et seulement si elle appartient à $n \in N_{L_P,0} t_\beta N_0 t_\beta^{-1} H_{\Delta,0}$. Le seul terme qui peut être non nul est $u = v = \text{Id}$ et il est non nul si et seulement si $x_\beta \in p\mathbb{Z}_p$. Cela finit de prouver que le Frobenius transféré est le Frobenius usuel sur $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A)$. Dans les deux cas, c'est bien le produit tensoriel des Frobenius. \square

Il nous faut une forme plus agréable à manipuler que ce produit tensoriel des structures de modules.

Lemme 2.4.36. *Soit M un $A[[N_{\Delta,0}]]$ -module de type fini. On a*

$$M = \varprojlim_k \left[A[[N_{\Delta,0}]] / ((1 + X_\alpha)^{p^k} - 1) \right] \otimes_{A[[N_{\Delta,0}]]} M.$$

Démonstration. Puisque M est de type fini, si on le munit de la topologie (\underline{X}) -adique, il possède une surjection continue depuis un module $A[[N_{\Delta,0}]]^n$ qui est complet pour cette topologie. Il est donc complet, ce qui est exactement ce qu'exprime le lemme, les topologies (\underline{X}) -adique et celle engendrée par les ouvertures $((1 + X_\alpha)^{p^n} - 1)M$ étant identiques. \square

Proposition 2.4.37. *Pour tout $M' \in \mathcal{M}_{\Delta_P}(\Pi_P^{H_{\Delta_P,0}})$ le sous-module $\widetilde{M}' = \text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A) \otimes_A M'$ appartient à $\mathcal{M}_\Delta(\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A) \otimes_A \Pi_P^{H_{\Delta_P,0}})$. De plus, il y a une identification de $A[[N_{\Delta,0}]]$ -modules avec action semi-linéaire de T_+ entre*

$$\widetilde{M}'^\vee [X_\Delta^{-1}] \cong A((N_{\Delta,0})) \otimes_{A((N_{\Delta_P,0}))} M'^\vee [X_{\Delta_P}^{-1}]$$

où le Frobenius à droite est donné par le produit tensoriel des Frobenius.

Démonstration. Comme le montre la proposition B.2.2, le module $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A)$ est de type fini sur $A[[X_\alpha \mid \alpha \notin \Delta_P]][F'_\alpha \mid \alpha \notin \Delta_P]$ où les F'_α sont les Frobenius précédemment définis. Par hypothèse, le module M' est de type fini sur $A[[N_{\Delta_P,0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta_P]$. Or, pour tout couple l'élément $(\alpha, \beta) \in \Delta_P \times \Delta \setminus \Delta_P$, il se trouve qu'il existe $t \in T_+$ tel que $F'_t = F'_\beta$ sur le terme de gauche du produit tensoriel et que $F_t = F_\alpha$ sur le terme de droite. En posant I la fonction constante égale à 1 qui engendre $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A)$ et (m_j) une famille génératrice de M' , tout élément de \widetilde{M}' s'écrit

$$\sum u_i F'_{\beta_i} I \otimes v_i F_{\alpha_i} m_{j_i} = \sum u_i v_i F_{\gamma_i} (I \otimes m_{j_i})$$

où γ_i est obtenu comme on vient de le souligner. Le module \widetilde{M}' est donc de type fini sur $A((N_{\Delta,0})) [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta]$.

\widetilde{M}' est évidemment stable par T_0 .

Pour l'admissibilité,

$$\begin{aligned} \widetilde{M}'^\vee &= \text{Hom}_A \left(\varprojlim_h (\text{LC}_h(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A) \otimes_A M'), A \right) \\ &= \lim_{\leftarrow} \text{Hom}_A (\text{LC}_h(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A) \otimes_A M', A) \\ &= \lim_{\leftarrow} \text{Hom}_A (\text{LC}_h(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A), M'^\vee) \\ &= \lim_{\leftarrow} \text{Hom}_A (\text{LC}_h(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A), A) \otimes_A M'^\vee \\ &= \lim_{\leftarrow} \left[A[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta \setminus \Delta_P]] / ((1 + X_\alpha)^{p^h} - 1) \right] \otimes_A M'^\vee \\ &= \lim_{\leftarrow} \left[A[[N_{\Delta,0}]] / ((1 + X_\alpha)^{p^h} - 1)_{\alpha \notin \Delta_P} \right] \otimes_{A[[N_{\Delta_P,0}]]} M'^\vee \end{aligned}$$

On utilise le lemme précédent avec M'^\vee et Δ_P pour obtenir

$$\widetilde{M}'^\vee = \varprojlim_h \left(\left[A[[N_{\Delta,0}]] / ((1 + X_\alpha)^{p^h} - 1)_{\alpha \notin \Delta_P} \right] \otimes_{A[[N_{\Delta_P,0}]]} \left(\varprojlim_k \left[A[[N_{\Delta_P,0}]] / ((1 + X_\beta)^{p^k} - 1) \right] \otimes_{A[[N_{\Delta_P,0}]]} M'^\vee \right) \right)$$

Comme les termes de gauche sont libres sur $A[[N_{\Delta_P,0}]]$, on peut intervertir la limite sur k et le produit tensoriel. De plus, pour un système indexé par \mathbb{N}^2 , la limite peut être faite d'abord sur les lignes et ensuite sur les colonnes, ou sur tout le diagramme d'un coup. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}'^\vee &= \varprojlim_{h,k} \left(\left[A[[N_{\Delta,0}]] / ((1 + X_\alpha)^{p^h} - 1)_{\alpha \notin \Delta_P} \right] \otimes_{A[[N_{\Delta_P,0}]]} \left(\left[A[[N_{\Delta_P,0}]] / ((1 + X_\beta)^{p^k} - 1) \right] \otimes_{A[[N_{\Delta_P,0}]]} M'^\vee \right) \right) \\
&= \varprojlim_{h,k} \left(\left[A[[N_{\Delta,0}]] / ((1 + X_\alpha)^{p^h} - 1)_{\alpha \notin \Delta_P} + ((1 + X_\beta)^{p^k} - 1)_{\beta \in \Delta_P} \right] \otimes_{A[[N_{\Delta_P,0}]]} M'^\vee \right) \\
&= \varprojlim_{h,k} \left(\left[A[[N_{\Delta,0}]] / ((1 + X_\alpha)^{p^h} - 1)_{\alpha \notin \Delta_P} + ((1 + X_\beta)^{p^k} - 1)_{\beta \in \Delta_P} \right] \otimes_{A[[N_{\Delta,0}]]} (A[[N_{\Delta,0}]] \otimes_{A[[N_{\Delta_P,0}]]} M'^\vee) \right)
\end{aligned}$$

Les termes pour $h = k$ sont cofinaux. Et on se retrouve à appliquer le lemme précédent à $A[[N_{\Delta,0}]] \otimes_{A[[N_{\Delta_P,0}]]} M'^\vee$ qui est de type fini sur $A[[N_{\Delta,0}]]$, d'où

$$\widetilde{M}'^\vee = A[[N_{\Delta,0}]] \otimes_{A[[N_{\Delta_P,0}]]} M'^\vee$$

et la condition d'admissibilité découle donc de celle sur M' .

Le diagramme suivant étant commutatif

$$\begin{array}{ccc}
A[[N_{\Delta_P,0}]] & \longrightarrow & A((N_{\Delta_P,0})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
A[[N_{\Delta,0}]] & \longrightarrow & A((N_{\Delta,0}))
\end{array}$$

on peut identifier

$$\widetilde{M}'^\vee[X_\Delta^{-1}] = A((N_{\Delta,0})) \otimes_{A[[N_{\Delta,0}]]} (A[[N_{\Delta,0}]] \otimes_{A[[N_{\Delta_P,0}]]} M'^\vee) = A((N_{\Delta,0})) \otimes_{A((N_{\Delta_P,0}))} M'^\vee[X_\Delta^{-1}].$$

Pour le transfert des Frobenius, le plus simple reste de suivre la ψ -action le long des isomorphismes, c'est à dire le dual des Frobenius sur M' et \widetilde{M}' . \square

Proposition 2.4.38. *Les modules précédents sont cofinaux dans $\mathcal{M}_\Delta(\mathrm{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A) \otimes_A \Pi_P^{H_{\Delta_P,0}})$.*

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_\Delta(\mathrm{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A) \otimes_A \Pi_P^{H_{\Delta_P,0}})$. On pose $M_* = \{f(0) \mid f \in M\}$ où l'on a identifié le produit tensoriel aux fonctions localement constantes vers $\Pi_P^{H_{\Delta_P,0}}$. Comme M est un $A[[N_{\Delta,0}]]$ -sous-module et que

$$\left(\prod_{\alpha \in \Delta_P} u_\alpha(x_\alpha) \cdot f \right)(0) = \left(\prod_{\alpha \in \Delta_P} u_\alpha(x_\alpha) \right) \cdot f(0)$$

il se trouve que M_* est un $A[[N_{\Delta_P,0}]]$ -sous-module. Soit $\alpha \in \Delta$. On a démontré en proposition 2.4.35 que F_α agit sur le produit tensoriel comme l'identité sur le premier terme (puisque $F'_\alpha = F'_{\mathrm{Id}}$) et comme F_α sur le deuxième. Donc $F_\alpha(f(0)) = (F_\alpha f)(0)$. Ainsi, M_* est un $A[[N_{\Delta_P,0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta_P]$ -sous-module.

Montrons qu'il est de type fini. Soit (f_i) un système générateur fini de M et soit U_0 l'ensemble des images des f_i , qui est fini. Par locale admissibilité de Π_P , on sait que l'ensemble $U = \prod_{\alpha \notin \Delta_P} t_\alpha^\mathbb{Z} U_0$ est encore fini. Montrons qu'il engendre M_* comme $A[[N_{\Delta_P,0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta_P]$ -module. Puisque tout élément de M s'écrit comme somme finie des $n \cdot F_t(f_i)$, il suffit de montrer que pour $n \in N_0$ et $t \in \prod_{\alpha \in \Delta} t_\alpha^\mathbb{Z}$, alors $(n \cdot F_t(f_i))(0)$ est dans le module qu'ils engendrent. Si l'on écrit $t = t_1 t_2$ avec $t_1 \in \prod_{\alpha \in \Delta_P} t_\alpha^\mathbb{Z}$ et $t_2 \in \prod_{\alpha \notin \Delta_P} t_\alpha^\mathbb{Z}$. La proposition 2.4.35 nous a montré que $(n \cdot F_t(f))(0) = n_1 (F_t(f)(n_2))$ s'écrit $n_1 F_{t_2}(f(n_3))$ lorsqu'elle n'est pas nulle (voir 2.4.30) où l'on a posé $n_1 \in \prod_{\alpha \in \Delta_P} u_\alpha(\mathbb{Z}_p)$, $n_2 \in \prod_{\alpha \notin \Delta_P} u_\alpha(\mathbb{Z}_p)$ tels que $n_1 n_2 = n$ et où n_3 dépend de t et de n_2 . Sur $\Pi_P^{H_{\Delta_P,0}}$, on a $F_t = F_{t_1} F_{t_2} = F_{t_1} \circ t_2$ puisque F_{t_2} agit par l'action de t_2 . Donc

$$(n \cdot F_t(f))(0) = n_1 F_{t_1}(t_2 \cdot f(n_3)) \in A[[N_{\Delta_P,0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta_P](U).$$

Reste l'admissibilité de M_* . Prenons pour chaque $m \in U$ une fonction $f_m \in M$ telle que $f_m(0) = m$. Comme elles sont en nombre fini, il existe un sous-groupe compact ouvert N_* de $\prod_{\alpha \notin \Delta_P} u_\alpha(\mathbb{Z}_p)$ par lequel toutes les f_m sont invariantes. Comme F_α aussi pour $\alpha \in \Delta_P$ commutent à N_* (vu leur description comme une somme, et la commutation de $N_{\Delta_P,0}$ et $\prod_{\alpha \in \Delta_P} t_\alpha^\mathbb{Z}$ à N_*), toute fonction de

$$M_1 = \sum_{m \in U} A[[N_{\Delta_P,0}]] [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta_P] f_m$$

est également invariant par N_* . On va prouver que M_1 est admissible en utilisant la caractérisation de l'admissibilité par les invariants prouvée dans [Vig07]. Pour tout sous-groupe $N_{P,*}$ compact ouvert de $N_{\Delta_P,0}$, on a

$$M_1^{N_{P,*}} \subset M^{N_{P,*} \times N_*}$$

qui est fini par hypothèse d'admissibilité sur M . Ainsi, le module M_1 est admissible comme représentation de $A[[N_{\Delta_P,0}]]$. Par choix des f_m , le module M_* en est un quotient, encore admissible.

La stabilité par T_0 est limpide puisque pour $t_0 \in T_0$, on a $t_0(f(x_\alpha)) = (t_0 \cdot f)(x_\alpha \alpha(t_0))$.

Pour conclure à la cofinalité, remarquons que $M \subset \widetilde{M}_*$ puisque ces dernières sont les fonctions dont l'image est contenu dans l'union des images des éléments de M . Ce module appartenant $\mathcal{M}_\Delta(\mathrm{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta/\mathbb{Z}_p^{\Delta_P}, A) \otimes_A \Pi_P^{H_{\Delta_P,0}})$, on a fini. \square

Nous avons maintenant toutes les clés pour conclure quant au calcul pour $w = \mathrm{Id}$.

Théorème 2.4.39. *Il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathbf{D}_\Delta^\vee(\mathcal{C}_{\mathrm{Id}}(\Pi_P)) \cong A((N_{\Delta,0})) \widehat{\otimes}_{A((N_{\Delta_P,0}))} \mathbf{D}_{\Delta_P}^\vee(\Pi_P).$$

Démonstration. Nous venons de démontrer que les modules apparaissant dans la proposition 2.4.37 sont cofinaux dans $\mathcal{M}_\Delta((\mathrm{Ind}_{N_{L_P,0}}^{N_0}(\Pi_P))^{H_{\Delta,0}})$ et donc que

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\Delta^\vee(\mathcal{C}_{\mathrm{Id}}(\Pi_P)) &\cong \varprojlim_{M' \in \mathcal{M}_{\Delta_P}(\Pi_P^{H_{\Delta_P,0}})^{\mathrm{op}}} \widetilde{M}'^\vee[X_{\Delta_P}^{-1}] \\ &= \varprojlim_{M' \in \mathcal{M}_{\Delta_P}(\Pi_P^{H_{\Delta_P,0}})^{\mathrm{op}}} A((N_{\Delta,0}) \otimes_{A((N_{\Delta_P,0}))} M')^\vee[X_{\Delta_P}^{-1}] \\ &= A((N_{\Delta,0})) \widehat{\otimes}_{A((N_{\Delta_P,0}))} \mathbf{D}_{\Delta_P}^\vee(\Pi_P) \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient en remarquant que parmi les quotients de type fini du terme de droite, les $M'^\vee[X_{\Delta_P}^{-1}]$ sont cofinaux. \square

2.4.3 Fin de preuve et conséquence

Théorème 2.4.40 (Voir théorème 2.4.12). *Supposons Π_P est localement admissible pour les $(t_\alpha)_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_P}$ (i.e. l'image de tout vecteur par $\prod_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_P} t_\alpha^{\mathbb{Z}}$) est finie, alors on a un isomorphisme de T_+ -modules pro-étales sur $A((N_{\Delta,0}))$*

$$\mathbf{D}_\Delta^\vee(\mathrm{Ind}_{P^-}^G(\Pi_P)) \cong A((N_{\Delta,0})) \widehat{\otimes}_{A((N_{\Delta_P,0}))} \mathbf{D}_{\Delta_P}^\vee(\Pi_P).$$

Démonstration. Le calcul pour $w \neq \mathrm{Id}$ et l'exactitude à droite permettent de dire que \mathbf{D}^\vee s'annule sur les gradués de la filtration sur $\mathrm{Ind}_{P^-}^B(\Pi_P)$, sauf le premier. Par exactitude à droite, on peut descendre récursivement jusqu'à

$$\mathbf{D}_\Delta^\vee(\mathrm{Ind}_{P^-}^G(\Pi_P)) \cong \mathbf{D}_\Delta^\vee(\mathcal{C}_{\mathrm{Id}}(\Pi_P))$$

et le théorème 2.4.39 conclut. \square

Il a déjà été remarqué que ce théorème permet de calculer le foncteur de Zábrádi plus facilement pour l'induite d'un produit tensoriel de représentations sur chacun des blocs de L_P . Prenons le cas le plus simple pour finir : celui de $P = B$ et donc de Π_P valant un produit de caractère χ .

Corollaire 2.4.41. *Pour χ un caractère du tore, le module $\mathbf{D}_\Delta^\vee(\mathrm{Ind}_{B^-}^G(\chi))$ est isomorphe à $A((N_{\Delta,0})) \otimes_A A(\chi^{-1})$.*

Démonstration. Il faut calculer le foncteur de Zábrádi sur χ pour $n = 1$. L'espace χ tout entier est de type fini et admissible. De plus, on a pour $t \in T_+$ l'identité $(1 \otimes F_t)^\vee = (\chi(t))^\vee = \chi(t)$ et son inverse est simplement $\chi^{-1}(t)$. \square

Annexe A

Des propriétés plus catégoriques

Cette annexe est consacrées aux différentes propositions d'aspect plutôt catégorique, voire cohomologique, dont nous avons relégué les démonstrations à plus tard pour ne pas accidenter le déroulement des principales preuves.

Tout d'abord citons le résultat et donnons une référence pour les suites spectrales associées à un double complexe :

Théorème A.0.1 (Corollaire 2.3 dans [FS]). *Pour un double complexe $C^{p,q}$ cohomologique limité dans \mathbb{N}^2 , les deux suites spectrales de première page $C^{p,q}$ et $C^{q,p}$ convergent vers la cohomologie du complexe total $\text{Tot}^n = \bigoplus_{i+j=n} C^{i,j}$.*

Intéressons-nous ensuite à la description de la cohomologie continue. Prenons toujours L une extension finie de \mathbb{Q}_p . Pour un groupe profini G , la cohomologie continue d'un \mathcal{O}_L -module de torsion discret avec action continue de G est définie comme le foncteur dérivé des invariants dans la catégorie des \mathcal{O}_L -modules de torsion discrets avec action continue de G .

Proposition A.0.2. *Soient F, G deux δ -foncteurs depuis une catégorie de modules vers une autre. On suppose que la catégorie de départ de F possède assez de F -acycliques. Pour toute transformation naturelle \mathbf{T}^0 de F^0 à G^0 , il existe une unique transformation naturelle de δ -foncteurs de F à G qui coïncide avec \mathbf{T}^0 en degré 0.*

Si de plus \mathbf{T}^0 est un isomorphisme sur chaque objet et qu'il y a assez de F, G -acycliques, alors \mathbf{T} est un isomorphisme de foncteurs.

Démonstration. Si l'on a construit la transformation naturelle jusqu'au degré n . Pour tout objet V , on écrit une suite exacte

$$0 \rightarrow V \rightarrow I \rightarrow V' \rightarrow 0$$

avec I qui est F -acyclique. On obtient un diagramme commutatif aux lignes exactes données par les suites exactes longues associées à F et G :

$$\begin{array}{ccccccc} F^n(I) & \longrightarrow & F^n(V') & \longrightarrow & F^{n+1}(V) & \longrightarrow & 0 \\ \mathbf{T}^n(I) \downarrow & & \mathbf{T}^n(V') \downarrow & & & & \\ G^n(I) & \longrightarrow & G^n(V') & \longrightarrow & G^{n+1}(V) & & \end{array}$$

Par exactitude des lignes, il existe un unique morphisme $\mathbf{T}^{n+1}(V)$ qui complète le diagramme commutatif : il consiste à envoyer tout $x \in F^{n+1}(V)$ sur l'image d'un relevé dans $F^n(V')$ (ce qui ne dépend pas du relevé). Pour montrer qu'il ne dépend pas du choix de I , comme on a assez de F -acycliques, il suffit de le prouver pour $I \hookrightarrow I_0$. On obtient alors un diagramme commutatif aux lignes exactes dont la dernière flèche est obtenue par la même technique que précédemment

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & I & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & V'_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ce qui donne, par naturalité de \mathbf{T}^n et par functorialité de F et G sur les suites exactes courtes, un diagramme commutatif aux lignes "brisées" exactes

$$\begin{array}{ccccc}
& & & & F^{n+1}(V) \longrightarrow 0 \\
& & & \nearrow & \nearrow \\
F^n(V') & \longrightarrow & F^n(V'_0) & & \\
\downarrow \mathbf{T}^n(V') & & \downarrow \mathbf{T}^n(V'_0) & & \\
G^n(V') & \longrightarrow & G^n(V'_0) & & \\
& & & \searrow & \searrow \\
& & & & G^{n+1}(V)
\end{array}$$

d'où le fait que les deux flèches $F^{n+1}(V) \rightarrow G^{n+1}(V)$ que l'on peut déduire coïncident.

Pour le caractère fonctoriel des suites exactes longues, considérons une suite exacte courte $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow 0$. Par lemme du fer à cheval, on sait que l'on peut choisir des injectifs I_1, I_2 et I_3 tel que le diagramme suivant soit commutatif, avec lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & V'_1 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & I_2 & \longrightarrow & V'_2 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & I_3 & \longrightarrow & V'_3 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Les trois premières flèches de la suite exacte longue associée sont bien fonctorielles parce que \mathbf{T}^0 est une transformation naturelle. Écrivons la preuve pour transmettre la fonctorialité dans un cas particulier, i.e. montrer que le diagramme commutatif pour toute suite exacte V_i

$$\begin{array}{ccc}
F^n(V_1) & \longrightarrow & F^n(V_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
G^n(V_1) & \longrightarrow & G^n(V_2)
\end{array}$$

entraîne la commutativité du même diagramme pour la suite exacte V_i et pour $n + 1$. On écrit le diagramme tridimensionnel

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 0 & & 0 \\
& & & & \uparrow & & \uparrow \\
& & & & G^{n+1}(V_1) & \longrightarrow & G^{n+1}(V_2) \\
& & & \nearrow & \uparrow & & \nearrow \\
F^{n+1}(V_1) & \longrightarrow & F^{n+1}(V_2) & & & & \\
& & & \searrow & \uparrow & & \searrow \\
& & & & G^n(V'_1) & \longrightarrow & G^n(V'_2) \\
& & & \nearrow & \uparrow & & \nearrow \\
F^n(V'_1) & \longrightarrow & F^n(V'_2) & & & &
\end{array}$$

où toutes les faces sont commutatives, sauf celle du haut, dont on déduit la commutativité par chasse au diagramme.

Dans le cas où \mathbf{T}^0 est constituée d'isomorphismes en degré zéro, on conclut à l'isomorphisme par récurrence, en choisissant un F, G -acyclique I tel que $0 \rightarrow v \rightarrow I \rightarrow V' \rightarrow 0$ est exacte. Le diagramme commutatif suivant aux lignes exactes prouve que $\mathbf{T}^{n+1}(V)$ est un isomorphisme grâce au lemme des cinq et à l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{ccccccc} F^n(I) & \longrightarrow & F^n(V') & \longrightarrow & F^{n+1}(V) & \longrightarrow & 0 \\ \mathbf{T}^n(I) \downarrow & & \mathbf{T}^n(V') \downarrow & & \downarrow \mathbf{T}^{n+1}(V) & & \downarrow \\ G^n(I) & \longrightarrow & G^n(V') & \longrightarrow & G^{n+1}(V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

□

Proposition A.0.3. *Soit G un groupe profini et H un sous-groupe fermé. Les invariants de $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G$ des \mathcal{O}_L -modules de torsion discrets munis d'une action continue de G , vers $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G/H$ a un adjoint à gauche qui est exact à gauche. En particulier, [Proe] nous dit que la prise d'invariants transforme les injectifs en injectifs.*

Démonstration. L'adjoint en question est simplement l'oubli de $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G/H$ vers $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G$ qui est évidemment exact. □

Théorème A.0.4. *Soit G un groupe profini et \mathcal{G} la catégorie des sous-groupes ouverts distingués de G dont les morphismes sont les inclusions. Il existe une transformation naturelle de δ -foncteur constituée d'isomorphismes de \mathcal{O}_L -modules entre $H_{\text{cont}}^\bullet(G, \cdot)$ et $\left(\varinjlim_{G' \in \mathcal{G}^{\text{op}}} H^i(G/G', \cdot^{G'}) \right)_{i \geq 0}$.*

Démonstration. D'après la proposition A.0.2, il suffit de prouver l'existence d'une transformation naturelle en degré zéro et d'assez d'acycliques simultanés.

En degré zéro, le deuxième δ -foncteur fournit pour un \mathcal{O}_L -module V de torsion discret avec action continue de G le \mathcal{O}_L -module

$$\begin{aligned} \varinjlim_{G' \in \mathcal{G}^{\text{op}}} H^0(G/G', V^{G'}) &= \varinjlim_{G' \in \mathcal{G}^{\text{op}}} (V^{G'})^{G/G'} \\ &= \varinjlim_{G' \in \mathcal{G}^{\text{op}}} V^G \\ &= V^G \end{aligned}$$

Pour les acycliques, considérer un injectif I de $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G$. Il est par construction acyclique pour le δ -foncteur dérivé. De plus, pour tout $G' \in \mathcal{G}$ la proposition A.0.3 démontre que $V^{G'}$ est injectif dans $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G/G'$ qui est exactement la catégorie $\text{Rep}_{\text{tors}}^{G/G'}$ par finitude de ce dernier quotient, a fortiori acyclique pour la G/G' -cohomologie. Finalement, pour $i \geq 1$, tous les $H^1(G/G', V^{G'})$ sont nuls et V est acyclique pour le deuxième δ -foncteur. □

La suite de ces considérations reprend sans preuves les résultats des sections 2.5 et 2.6 de [Ser63].

Proposition A.0.5. *La cohomologie continue d'un objet V de $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G$ pour un groupe profini G se calcule comme la cohomologie du complexe $\mathcal{C}^0(G^\bullet, V)$ où les différentielles sont données par*

$$(d^n f)(g_1, \dots, g_{n+1}) = g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n).$$

Proposition A.0.6. *Soit G un groupe profini et H un sous-groupe distingué fermé. Soit V un objet de $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G$. Le groupe G agit sur $\mathcal{C}^0(H^\bullet, V)$ via $(g \cdot f)(h_i) = g \cdot f(g^{-1} h_i g)$.*

Cette action passe à la cohomologie et se factorise par H en une structure d'objet de $\text{Rep}_{\text{tors}}^{\text{disc}} G/H$ sur les termes de $H_{\text{cont}}^\bullet(H, V)$.

Théorème A.0.7. *La suite spectrale de Hochschild-Serre est une suite spectrale convergente vers $H_{\text{cont}}^\bullet(G, V)$ dont la deuxième page est donnée par*

$$H_{\text{cont}}^p \left(G/H, H_{\text{cont}}^q(H, V) \right)$$

en utilisant la proposition précédente pour définir la cohomologie des $H_{\text{cont}}^q(H, V)$.

Théorème A.0.8.

Annexe B

Les anneaux de l'analyse p -adique

B.1 Transformée d'Amice

Définition B.1.1. Fixons G un groupe profini et gardons dans notre cadre la notation $A = \mathcal{O}_L/\varpi^m \mathcal{O}_L$ (c'est le cadre où l'anneau des coefficients est un anneau topologique discret). On note \mathcal{G} la catégorie filtrante de ses sous-groupes ouverts distingués ayant pour morphismes les inclusions. L'algèbre de Iwasawa associée est

$$A[[G]] = \varprojlim_{G' \in \mathcal{G}} A[G/G']$$

où les quotients sont finis discret et où $A[G/G']$ est l'algèbre de groupe associée.

Proposition B.1.2. L'algèbre d'Iwasawa $A[[N_{\Delta,0}]]$ est isomorphe à $A[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]]$ via $X_\alpha \mapsto [n_\alpha] - 1$. L'action de T_+ par conjugaison donne pour Frobenius les uniques morphismes de A -algèbres continues pour la topologie (\underline{X}) -adique qui vérifient $\varphi_\alpha(X_\beta) = (1 + X_\beta)^{p^{\delta_{\alpha,\beta}}} - 1$.

Démonstration. Le morphisme δ étant surjectif, le produit \mathbb{Z}_p^{n-1} est isomorphe au conoyau $N_{\Delta,0}$ via $(x_\alpha) \mapsto \prod u_\alpha(x_\alpha)$. De plus, sous-groupes $\prod_{\alpha \in \Delta} p^k \mathbb{Z}_p$ étant cofinaux dans la catégorie associée à \mathbb{Z}_p^{n-1} , l'algèbre d'Iwasawa se calcule comme

$$A[[N_{\Delta,0}]] = \varprojlim_k A[[n_\alpha \mid \alpha \in \Delta]] / ([n_\alpha]^{p^k} - 1) = \varprojlim_k A[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]] / ((1 + X_\alpha)^{p^k} - 1).$$

Ces derniers polynômes convergeant vers 0 pour la topologie (ϖ, X_α) -adique sur $A[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]]$, qui est complet pour cette topologie, l'isomorphisme en découle. Par construction, c'est un homéomorphisme si l'on munit l'algèbre d'Iwasawa de la topologie de limite projective et l'algèbre de polynômes de la topologie (\underline{X}) -adique.

Pour les Frobenius, l'action de T_+ étant continue pour la topologie de limite projective et les $(X_\beta)_{\beta \in \Delta}$ engendrant topologiquement l'anneau de polynôme, prouver les identités suffit. La traduction de $t_\alpha n_\beta t_\alpha^{-1} = n_\beta^{p^{\mathbb{1}_{\alpha=\beta}}}$ via l'isomorphisme conclut. \square

Notre deuxième outil est la transformée d'Amice, qui va nous permettre de dualiser des anneaux de fonctions p -adiques. On trouvera une preuve plus théorique, dans un cadre plus propice à l'émergence de l'analyse p -adique dans [Col].

Proposition B.1.3. Le dual des fonctions localement constantes (i.e. continues) de \mathbb{Z}_p^Δ dans A est isomorphe à $A[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]]$.

Démonstration. Écrivons $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta, A)$ pour l'anneau des fonctions localement constantes, et $\text{LC}_h(\mathbb{Z}_p^\Delta, A)$ l'anneau des fonctions constantes sur chaque $x + p^h \mathbb{Z}_p$ dont l'union croissante couvre l'ensemble des fonctions localement constantes.

Il se trouve qu'en tant que modules $\text{LC}_h(\mathbb{Z}_p^\Delta, A)^\vee \cong A[\mathbb{Z}_p^\Delta / p^h \mathbb{Z}_p^\Delta]$ où $[\bar{x}]$ à droite est l'évaluation en x à gauche. En passant à la limite inductive sur les fonctions, donc à la limite projective, grâce à l'isomorphisme particulier que l'on vient de citer, on tombe effectivement sur l'algèbre d'Iwasawa de \mathbb{Z}_p^Δ . \square

Définition B.1.4. On généralise la construction de l'algèbre d'Iwasawa à \mathcal{O}_L , en effectuant la limite

$$\mathcal{O}_L[[G]] = \varprojlim_{G' \in \mathcal{G}} \mathcal{O}_L[G/G']$$

dans la catégorie des \mathcal{O}_L -algèbres topologiques.

Proposition B.1.5. *Pour une variable, on a l'identification de \mathcal{O}_L -algèbres topologiques*

$$\mathcal{O}_L \left[\left[\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right] \cong \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+.$$

Démonstration. Le groupe que l'on considère est isomorphe à \mathbb{Z}_p pour lequel les sous-groupes $p^k \mathbb{Z}_p$ sont cofinaux dans la catégorie associée à \mathbb{Z}_p . On peut donc calculer :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_L \llbracket \mathbb{Z}_p \rrbracket &= \varprojlim_k \mathcal{O}_L [\mathbb{Z}_p / p^k \mathbb{Z}_p] / ([1]^{p^k} - [0]) \\ &= \varprojlim_k \mathcal{O}_L \llbracket X \rrbracket / ((1 + X)^{p^k} - 1) \\ &= \varprojlim_k \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+ / ((1 + X)^{p^k} - 1) \end{aligned}$$

Ces derniers polynômes convergent vers 0 pour la topologie (ϖ, X) -adique sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ qui est complet pour cette topologie, on conclut. \square

B.2 Les Frobenius

Définition B.2.1. L'espace $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta, A)$ est muni d'une action de $N_{\Delta,0} = \mathbb{Z}_p^\Delta$ par translation donc d'une structure de $A \llbracket N_{\Delta,0} \rrbracket$ -module.

De plus, pour $t \in T_+$, on définit une action par

$$(t \cdot f)(x_\alpha) = \mathbb{1}_{\prod \alpha(t) \mathbb{Z}_p}(x_\alpha) f\left(\frac{x_\alpha}{\alpha(t)}\right).$$

Proposition B.2.2. 1) *L'action précédente est semi-linéaire.*

2) *Le $A \llbracket N_{\Delta,0} \rrbracket [F_\alpha \mid \alpha \in \Delta]$ -module $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta, A)$ est engendré par la fonction constante égale à 1 notée I , admissible et son dual tensorisé est isomorphe à $A((N_{\Delta,0}))$ est muni des Frobenius usuels qui le rendent étale.*

Démonstration. 1) Par continuité, on peut se contenter de vérifier la semi-linéarité pour $y = (y_\alpha) \in N_{\Delta,0}$.

$$\begin{aligned} t \cdot (yf) &= \mathbb{1}_{\prod_{\alpha \in \Delta} \alpha(t) \mathbb{Z}_p}(yf) \left(\frac{\cdot}{\alpha(t)} \right) \\ &= \mathbb{1}_{\prod_{\alpha \in \Delta} \alpha(t) \mathbb{Z}_p} f \left(\frac{\cdot + \alpha(t) y_\alpha}{\alpha(t)} \right) \\ &= (\alpha(t) y_\alpha) \left[\mathbb{1}_{\prod_{\alpha \in \Delta} \alpha(t) \mathbb{Z}_p} f \left(\frac{\cdot}{\alpha(t)} \right) \right] \\ &= (t \cdot y)(t \cdot f) \end{aligned}$$

2) Pour tout entier n et toute famille $x = (x_\alpha) \in \mathbb{Z}_p^\Delta$, la fonction $(x \prod t_\alpha^n) I$ est la fonction à support exactement $\prod_{\alpha \in \Delta} (x_\alpha + p^n \mathbb{Z}_p)$ qui vaut 1 sur son support. Ces fonctions engendrent $\text{LC}(\mathbb{Z}_p^\Delta, A)$ comme A -module, cela prouve la première assertion.

La proposition B.1.3 montre que son dual est isomorphe comme $A \llbracket N_{\Delta,0} \rrbracket$ -module à $A \llbracket N_{\Delta,0} \rrbracket$ ce qui prouve l'admissibilité. Reste à prouver que le morphisme est T_+ -équivariant. Pour $t_0 \in T_0$ et $\lambda = \prod_{\alpha \in \Delta} (1 + X_\alpha)^{x_\alpha}$ la forme linéaire qui donne la valeur en (x_α) , on sait que la ψ -action sur l'image du dual dans le localisé correspond à

$$\lambda \mapsto (f \mapsto \lambda(t \cdot f)) = \mathbb{1}_{\prod_{\alpha \in \Delta} \alpha(t) \mathbb{Z}_p}(x_\alpha) f\left(\frac{x_\alpha}{\alpha(t)}\right)$$

ce qui s'identifie à $\psi_t(\prod_{\alpha \in \Delta} (1 + X_\alpha)^{x_\alpha})$. \square

B.3 Produits tensoriels

Nous prouvons dans cette section les lemmes utiles aux constructions de produits tensoriels dans la section 2.4.

Proposition B.3.1. *Soient S_1 et S_2 deux groupes profinis. Le produit tensoriel complété au-dessus de A des algèbres d'Iwasawa de S_1 et S_2 s'identifie naturellement à l'algèbre d'Iwasawa associée à $S_1 \times S_2$.*

Démonstration. Si S' est dans la catégorie \mathcal{S} associée à $S_1 \times S_2$, les sous-groupes $S'_i = S' \cap S_i \times \{1\}$ s'identifient à des objets des \mathcal{S}_i . Le sous-groupe $S'_1 \times S'_2$ est un objet de \mathcal{S} avec un morphisme vers S' . Les objets $S'_1 \times S'_2$ pour S'_i objet de \mathcal{S}_i sont donc cofinaux dans \mathcal{S} .

$$\begin{aligned} A[[S_1 \times S_2]] &= \varprojlim_{S' \in \mathcal{S}} A[S_1 \times S_2 / S'] \\ &= \varprojlim_{(S'_1, S'_2) \in \mathcal{S}'_1 \times \mathcal{S}'_2} A[S_1 / S'_1] \otimes_A A[S_2 / S'_2] \\ &= A[[S_1]] \widehat{\otimes}_A A[[S_2]] \end{aligned}$$

□

Proposition B.3.2. *Pour $t \in T_+$, munissons $A[[X_\alpha \mid \alpha \notin \Delta_P]]$ de l'endomorphisme φ_t obtenu par $\varphi_t(X_\beta) = (1 + X_\alpha)^{t_\alpha} - 1$ et de même sur $A[[N_{\Delta_P, 0}]]$. Alors, le produit tensoriel complété de ces Frobenius s'identifie au φ_t usuel sur leur produit tensoriel complété $A[[N_{\Delta, 0}]]$ (la forme du produit tensoriel complété est prouvé dans la proposition précédente).*

Démonstration. L'identification est évidente sur chaque quotient

$$A[[N_{\Delta, 0}]] / (1 + X_\alpha)^{p^k} - 1 \cong A[[X_\beta \mid \beta \notin \Delta_P]] / (1 + X_\beta)^{p^k} - 1 \otimes_A A[[N_{\Delta_P, 0}]] / (1 + X_\alpha)^{p^k} - 1$$

et l'on passe à la limite projective. □

Annexe C

Lemmes techniques

C.1 L'application d est une distance

Nous reléguons ici la preuve que d définie sur G/KZ est une distance.

Lemme C.1.1. *La fonction d vérifie l'inégalité triangulaire.*

Démonstration. Puisque la définition de d est invariante par transformation des deux réseaux par une même matrice inversible, on a $d(\bar{g}, \bar{h}g) = d(\bar{\text{Id}}, \bar{h})$. Prenons donc \bar{g}, \bar{h} des sommets de l'arbre, pour lesquels on choisit des représentants $g = \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} p^m & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à montrer que

$$d(\bar{\text{Id}}, \bar{h}) \leq d(\bar{\text{Id}}, \bar{g}) + d(\bar{g}, \bar{h}).$$

Or, on a $d(\bar{g}, \bar{h}) = d(\bar{\text{Id}}, \overline{hg^{-1}})$ où $hg^{-1} = \begin{pmatrix} p^m & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{-n} & -p^{-n}a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{m-n} & b-p^{m-n}a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soient k et l sont associés à n et m par le lemme 1.5.17. Plusieurs situations se présentent :

Cas 1 : si $n - k$ et $m - l$ sont les valuations de a et b et que $k \neq l$. Alors le s que l'on obtient pour hg^{-1} est exactement $\max(k, l) - n$. Le calcul donne donc

$$\begin{aligned} k + |n - k| + s + |m - n - s| &= |n - k| - (n - k) + \max(k, l) + |m - \max(k, l)| \\ &\geq \max(k, l) + |m - \max(k, l)| \\ &\geq l + |m - l| \end{aligned}$$

car la fonction $x \mapsto x + |m - x|$ est croissante.

Cas 2 : on suppose toujours que $n - k$ et $m - l$ sont les valuations de a et b , mais cette fois-ci on suppose que $m - l$ n'est pas la valuation de $b - p^{m-n}a$, donc que $l = k$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} k + |n - k| + s + |m - n - s| &\geq l + |n - l| + |m - n| \\ &\geq l + |m - l| \end{aligned}$$

Cas 3 : dans les cas qui nous restent k ou l vaut 0. Si l vaut 0 c'est limpide en utilisant trois inégalités triangulaires.

Cas 4 : dans le cas contraire prenons $k = 0$. On aurait pu voir dès le début que $l = (m - v_p(b))_+$. Ici, la condition $k = 0$ nous permet de choisir $a = 0$ et d'écrire de fait $s = (m - n - v_p(b))_+$. Si $n \leq 0$ alors $s \geq l$ et de manière évidente $|n| + s + |m - n - s| \geq s + |m - s| \geq l + |m - l|$. De cas restant correspond à $n \geq 0$ et à $l \geq s$. Il est alors possible d'écrire

$$|m - l| - |m - n - s| \leq |n + (s - l)| = n + (s - l)$$

car les deux termes sont négatifs. L'inégalité désirée s'obtient en passant tous les termes du bon côté. □

C.2 Les idéaux de $\kappa((N_{\Delta,0}))$

Nous prouvons le lemme technique 2.3.16 annoncé dans la deuxième partie.

Lemme C.2.1 (2.3.16). *Les seuls idéaux de $\kappa((N_{\Delta,0}))$ stables par l'action de T_0 sont $\{0\}$ et $\kappa((N_{\Delta,0}))$ lui-même.*

Le raisonnement se fait par récurrence sur $|\Delta|$. Pour $|\Delta| = 1$, l'anneau considéré est le corps des fractions rationnelles, donc le lemme est évident. Prenons I un idéal non nul stable par T_0 . On pose $J = I \cap \kappa[[N_{\Delta,0}]]$ et on se fixe un $\alpha \in \Delta$ arbitraire. Nous voudrions enlever la variable X_α et par conséquent, écrivons la décomposition d'un élément $\mu \in J$ comme

$$\mu = \sum_{j \geq 0} \mu_j X_\alpha^j$$

avec chaque μ_i dans $\kappa[[N_{\Delta \setminus \{\alpha\}, 0}]]$. On pose également

$$J_{\alpha,i} = \{\lambda \in \kappa[[N_{\Delta \setminus \{\alpha\}, 0}]] \mid \exists \mu \in J, \mu_i = \lambda\}.$$

Notre candidat à la restriction de J à $|\Delta| - 1$ variables serait construit à partir des $J_{\alpha,i}$. En effet, ce sont des idéaux de $\kappa[[N_{\Delta \setminus \{\alpha\}, 0}]]$ puisque $(\mu + \nu)_i = \mu_i + \nu_i$, que J est stable par multiplication par $\lambda \in \kappa[[N_{\Delta \setminus \{\alpha\}, 0}]]$ et que $(\lambda\mu)_i = \lambda\mu_i$. De plus, puisque J est stable par multiplication par X_α et que $(X_\alpha\mu)_{i+1} = \mu_i$, la suite $(J_{\alpha,i})$ est croissante.

Lemme C.2.2. *Tout idéal de $\kappa[[N_{\Delta,0}]]$ est fermé pour la topologie engendrée par l'idéal maximal.*

Démonstration. L'anneau $\kappa[[N_{\Delta,0}]]$ est compact puisque la topologie (X_α) -adique est la topologie faible sur les coefficients.

Tous ses idéaux sont de type fini, puisqu'il est noethérien ([Mat09, Théorème 3.3]) donc sont des quotient par une application continue d'un module compact. Ils sont donc compacts pour la topologie induite, a fortiori fermés. \square

Lemme C.2.3. *Il y a égalité des $J_{\alpha,i}$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $J_{\alpha,0} \subsetneq J_{\alpha,i}$ avec i minimal pour cette propriété. Prenons μ qui souligne cette inégalité stricte, i.e $\mu_i \notin J_{\alpha,0}$. Prenons $j > 0$ minimal tel que $\mu_j \neq 0$ et que $\mu_j \in J_{\alpha,0}$. Par définition on peut trouver $\nu \in J$ tel que $\nu_0 = \mu_j$ et si l'on considère $\mu' = \mu - X_\alpha^j \nu$, on obtient plusieurs propriétés. Tout d'abord, il n'existe aucun indice $0 < j' \leq j$ tel que $\mu'_{j'} \in J_{\alpha,0} \setminus \{0\}$. Ensuite, l'élément μ' est encore dans J . Et enfin, nous avons encore $\mu'_i \notin J_{\alpha,0}$. Si $j > i$ c'est évident car $\mu'_i = \mu_i$ et sinon $\mu'_i = \mu_i + \nu_{i-j}$ avec $i > i - j$ donc par minimalité de i on a $\nu_{i-j} \in J_{\alpha,0}$.

En construisant ainsi récursivement, on peut trouver une suite $\mu^{(k)}$ dans J telle que la suite des plus petits entiers $j(k) > 0$ avec $\mu^{(k)}_{j(k)} \in J_{\alpha,0} \setminus \{0\}$ soit strictement croissante, que $\mu^{(k)}_i = \mu_i$ et que $\mu^{(k)} \equiv \mu^{(k+1)} \pmod{X_\alpha^{j(k)}}$. Par le lemme précédent, la suite converge donc vers un élément μ^∞ dans J tel que pour tout j on a $\mu_j = 0$ ou $\mu_j \notin J_{\alpha,0}$.

Nous prenons $l > 0$ tel que $\mu_l^\infty \neq 0$, de valuation p -adique minimale, et minimal parmi ceux de valuations p -adique minimale. On note $l = p^r l'$ avec $\gcd(p, l') = 1$. Nous voulons utiliser l'invariance par T_0 pour annuler le terme constant sur lequel nous n'avons pas de prise, puis diviser par une puissance adéquate de X_α pour tomber sur un élément de J de terme constant relié à notre $\mu_l^\infty \notin J_{\alpha,0}$. Il nous faut donc appliquer une action très faible d'où le calcul de

$$t_\alpha^{1+p^t} \cdot \mu^\infty - \mu^\infty.$$

$$\begin{aligned} t_\alpha^{1+p^t} \cdot \mu^\infty - \mu^\infty &= \sum_{j \leq 0} \mu_j^\infty [(1 + X_\alpha)^{1+p^t} - 1]^j - X_\alpha^j \\ &= \sum_{j \geq 1} \mu_j^\infty [(X_\alpha + X_\alpha^{p^t} + X_\alpha^{p^t+1})^j - X_\alpha^j] \end{aligned}$$

en utilisant que l'on est en caractéristique p à la dernière ligne. Et donc si l'on écrit $j = p^s j'$ avec p ne divisant pas j' , il se trouve que

$$(X_\alpha + X_\alpha^{p^t} + X_\alpha^{p^t+1})^j - X_\alpha^j = (X_\alpha^{p^s} + X_\alpha^{p^t+s} + X_\alpha^{p^t+s+p^s})^{j'} - X_\alpha^{p^s j'}$$

dont le premier terme non nuls est $j' X_\alpha^{p^s(j'-1)+pt+s}$. Nous voulons garantir qu'il n'y ait pas de terme plus petit que celui associé à $j = l$. Ainsi, nous voulons que pour tout $j \neq l > 0$ tel que $\mu_j^\infty \neq 0$, on ait $p^s(j'-1)+pt+s >$

$p^r(l' - 1) + p^{t+r}$. Tous ces j , par définition de l , vérifient $s > r$ ou bien ($s = r$ et $j' > l'$). L'inégalité désirée est évidente si ($s = r$ et $j' > l'$). Il suffit donc de choisir t suffisamment grand pour que quelque soit $s > r$ on ait $p^{t+s} - p^{t+r} \geq p^r(p^{t+1} - p^t) > p^r(l' - 1) \geq p^r(l' - 1) - p^s(j' - 1)$ qui est donc une condition indépendante de $s > r$.

Après ce petit passage en arithmétique, on trouve donc un élément de J donc le terme de plus petit degré est $l' \mu_l^\infty X_\alpha^{p^r(l'-1)+p^{r+t}}$. Rappelons-nous que J vient d'un idéal de $\kappa((N_{\Delta,0}))$ donc qu'en divisant par la puissance de X_α on trouve un élément de J de terme constant $l' \mu^\infty \neq 0$ qui ne peut appartenir à $J_{\alpha,0}$ par construction de μ^∞ . \square

On a en particulier prouvé que $J_{\alpha,0} \neq \{0\}$.

Par une construction récurrente similaire à la preuve du lemme, si l'on prend $\lambda \in J_{\alpha,0}$ et $\mu^{(1)} \in J$ qui souligne cette appartenance, on écrit $\mu^{(i+1)} = \mu^{(i)} - \mu^{(i),0} X_\alpha^i$ où $\mu_0^{(i),0} = \mu_i^{(i)} \in J_{\alpha,0}$. Autrement dit, on enlève grâce au lemme précédent les termes non constants. Par fermeture de J , on en déduit que $J_{\alpha,0} \subset J$. En particulier, on peut appliquer notre hypothèse de récurrence à $J_{\alpha,0}[T_{\Delta \setminus \{\alpha\}}^{-1}] \subset I$ qui est un idéal de $\kappa((N_{\Delta \setminus \{\alpha\},0}))$ stable par T_0 , non nul. Il contient 1, donc I aussi.

Annexe D

Décomposition de Bruhat

D.1 Décomposition

On fait ici une preuve de la décomposition de Bruhat pour un groupe parabolique quelconque P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$.

Proposition D.1.1. *Le groupe de Weyl W de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, défini comme $N_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(T)/T$ est isomorphe à \mathfrak{S}_n avec pour représentants les matrices de permutations.*

Le groupe de Weyl W_P de P , défini comme $N_P(T)/T$ est constitué des matrices de permutations appartenant à P , donc de celles dont la décomposition en cycles fixe le drapeau définissant P .

Démonstration. Prenons w dans le normalisateur et fixons $t \in T$ dont toutes les valeurs propres sont distinctes. La matrice wtw^{-1} est régulière de vecteurs propres les we_i où (e_i) est la base canonique. Or, cette matrice doit rester dans T : les (we_i) sont à scalaires près une permutation des (e_i) . Cela nous dit exactement que w s'écrit $t\sigma$ avec σ matrice de permutation.

La version pour P en découle en remarquant que le normalisateur dans P est l'intersection du normalisateur avec P . □

On fixe ensuite $W(P)$ les représentants de Kostant de $W_P \backslash W$ tels que $w^{-1}(\Phi_P^+) \subset \Phi^+$. Dans notre cas, cela veut dire que si i est tel que e_i et e_{i+1} apparaisse dans le même bloc du drapeau, alors $w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$ (il s'agit juste de réordonner à gauche w^{-1} par croissance des images).

Théorème D.1.2 (Décomposition de Bruhat). *Pour tout parabolique P , on a*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) = \bigsqcup_{w \in W(P)} P^- w B.$$

Démonstration. Si l'on pose w_n le produit des $(k \ n - k)$ alors $w_n P^- w B = P w_n w B$. Comme $P^- w B$ ne dépend pas du représentant dans $W_P \backslash W$, on se retirent à montrer que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) = \bigsqcup_{w \in W(P)} P w B.$$

L'union fait fait $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$: si $w \in W$, on note $w' \in W(P)$ le représentant associé et $B w B \subseteq P w' B$. Ainsi, il suffit de prouver que l'union est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans le cas de B .

Soit $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, on définit récursivement $\sigma(1) = \max\{i \mid g_{i,1} \neq 0\}$ l'indice du plus grand coefficient non nul de la première colonne. Il existe $b_1 \in B$ tel que $g^{(1)} = b_1 g$ a un seul coefficient non nul sur la première colonne. Supposons $(\sigma(1), \dots, \sigma(k))$ et $g^{(k)} = b_k g$ définis avec $g^{(k)}$ ayant sur sa j^e colonne seulement les coefficients $\sigma(1), \dots, \sigma(j)$ non nuls (pour $j \leq k$). Soit alors $\sigma(k+1) = \max\{i \notin \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\} \mid g_{i,k}^{(k)} \neq 0\}$. Il existe une matrice b_{k+1} qui convient.

De fait, il existe $b \in B$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tels que la j^e colonne de bg n'ait que les coefficients $(\sigma(k))_{k \leq j}$ non nuls. Ainsi, $\sigma^{-1} b g \in B$ ce qui conclut.

Caractère disjoint pour B : prenons w_0, w_1 tels que $B w_0 B \cap B w_1 B \neq \emptyset$. En particulier, il existe $b_0, b_1 \in B$ tels que $w_1^{-1} b_0 w_0 = b_1$.

La première colonne du premier terme est un réordonnement par w_1 de la $w_0(1)^e$ colonne de b_1 . De fait, cette $w_0(1)^e$ colonne a un seul terme non nul à la w_0^e ligne qui doit être réordonné sur la première ligne, i.e. $w_1(1) = w_0(1)$.

De la même manière, la j^e colonne du premier terme est un réordonnement par w_1 de la $w_0(j)^e$ colonne de b_1 . De fait, cette $w_0(j)^e$ colonne a au plus j termes non nuls aux lignes $w_1(1), \dots, w_1(j)$ (grâce à l'hypothèse de récurrence), i.e. $w_1(1) = w_0(1)$.

Caractère disjoint pour P : de la même manière, on prend une relation $p = w_1 b w_0^{-1}$. Et notons n_1, \dots, n_k le type de P .

Les n_1 premières colonnes de p sont un réarrangement des colonnes $w_0^{-1}(1), \dots, w_0^{-1}(n_1)$ de b . Disons que l'on se fixe $w^{(1)} \in W_P$ telle que $(w_0^{-1}(w^{(1)}(i)))_{i \leq n_1}$ sont dans le bon ordre, alors la $w_0^{-1}(w^{(1)}(i))^e$ colonne de b ne peut avoir que i coefficients non nuls, sinon le total des colonnes $w_0^{-1}(i)$ aurait plus de n_1 lignes avec des coefficients non nuls, incohérent avec le fait qu'un réordonnement soit dans P . On en déduit en particulier que $p w^{(1)}$ a un premier bloc triangulaire supérieur.

En appliquant le même raisonnement aux blocs suivants, on trouve $w \in W_P$ telle que $p w \in B$. Quitte à changer w_0 en $w w_0$, on s'est donc ramené au cas de B et $w_1 = w w_0$. □

D.2 Représentants dans la décomposition de Bruhat

Nous donnons un système agréable de représentants de $P^- \setminus P^- w B$

Définition D.2.1. On note α_i la permutation $(i \ i+1)$, et l'on garde cette notation pour la matrice de permutation associée, et pour la racine simple correspondante.

Pour w dans le groupe de Weyl, l'ensemble N_w est la notation pour le sous-groupe de N donné par $N \cap w^{-1} N w = N \cap (w_0 w)^{-1} N^- (w_0 w)$.

Lemme D.2.2. Pour tout w dans le groupe de Weyl, on a $N = N_{w_0 w} N_w$.

Démonstration. Pour une démonstration dans un cadre de groupe algébrique assez général, voir [Car85, Proposition 2.5.13].

Nous allons également donner une démonstration calculatoire dans le cas de $GL_n(\mathbb{K})$ (le corps n'importe pas pour la preuve; nous le prendrons quelconque). Explicitons l'ensemble N_w . Pour toute matrice $n = (n_{i,j})$ dans N_0 qui vérifie $n_{i,i} = 1$ et $n_{i,j} = 0$ si $j < i$, on obtient

$$w^{-1} n w = (n_{w(i), w(j)}).$$

Les éléments de N_w sont les $w^{-1} n w$ qui appartiennent également à N , autrement dit les matrices m de N qui vérifient que $m_{i,j} = 0$ dès que $w(j) < w(i)$. Pour les mêmes raisons, le sous-groupe $N_{w_0 w}$ est celui des matrices m de N telles que $m_{i,j} = 0$ dès que $w_0 w(i) < w_0 w(j)$. L'élément w_0 étant la permutation avec toutes les inversions, on a $w_0 w(i) < w_0 w(j)$ si et seulement si $w(i) > w(j)$.

Il nous faut seulement prouver que $N \subseteq N_{w_0 w} N_w$. Soit $n = \begin{pmatrix} 1 & n_{i,j} \\ & 1 \end{pmatrix}$ dans N . On veut trouver $a = \begin{pmatrix} 1 & a_{i,j} \\ & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & b_{i,j} \\ & 1 \end{pmatrix}$ telles que a appartient à $N_{w_0 w}$, b appartient à N_w et que $ab = n$. Déterminons par récurrence sur $|j - i|$ les coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ qui donnent les trois conditions à la position (i, j) (autrement dit on "remonte les diagonales"). Le cas $|j - i| = 0$ correspondant à la diagonale nous fournit une initialisation aisée. Supposons que les coefficients sont déterminés pour $|k - l| < |j - i|$, le produit matriciel donne

$$n_{i,j} = \sum_{i \leq k \leq j} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,j} + b_{i,j} + \sum_{i < k < j} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Tous les termes de la somme à droite sont déjà fixés par l'hypothèse de récurrence ce qui entraîne que la somme $a_{i,j} + b_{i,j}$ est uniquement déterminée si l'on veut vérifier cette égalité. De plus, exactement l'une des conditions $w(i) < w(j)$ et $w(i) > w(j)$ est vérifiée ce qui implique que l'on doit imposer la nullité de $a_{i,j}$ ou de $b_{i,j}$ mais pas des deux pour respecter $a \in N_{w_0 w}$ et $b \in N_w$, l'autre paramètre étant libre pour que la somme $a_{i,j} + b_{i,j}$ ait la bonne valeur. La récurrence conclut que $N = N_{w_0 w} N_w$. □

Lemme D.2.3. Le système $w N_w$ est un système de représentants de $B^- \setminus B^- w B$.

Démonstration. Écrivons pour le faire qu'il contient un système de représentants

$$\begin{aligned}
B^-wB &= B^-wN \\
&= B^-wN_{w_0w}N_w \\
&= B^-(wN_{w_0w}w^{-1})wN_w \\
&= B^-(wN_0w^{-1} \cap N_0^-)wN_w \\
&= B^-wN_w
\end{aligned}$$

De plus, si n_1 et n_2 appartiennent à N_w et que leurs multiplication par w sont dans la même classe, il existe $b^- \in B^-$ tel que $b^-wn_1 = wn_2$. On en tire que $b^- = w(n_1n_2^{-1})w^{-1} \in wN_ww^{-1} \subset N$. Il en découle que $b^- \in B^- \cap N = \{\text{Id}\}$ puis que $n_1 = n_2$. □

Proposition D.2.4. *Pour w dans W_P , le système N_w est un système de représentants de $P^- \backslash P^-wB$.*

Démonstration. Le lemme précédent nous fournit déjà que $P^-wB = P^-B^-wB = P^-B^-wN_w = P^-wN_w$. Reste à montrer l'unicité. Si l'on suppose que $p^-wn = p'^-wn'$ sont deux écritures, l'élément $m = (p'^-)^{-1}p^- = wn'n^{-1}w^{-1}$ appartient à $P^- \cap wN_ww^{-1} = P^- \cap N \cap wNw^{-1}$. Puisque m appartient à $P^- \cap N$, prouver qu'il est trivial revient à prouver que pour toute racine $(i < j) \in \Phi_P^+$, le coefficient $m_{i,j}$ est nul. Le choix des représentants W_P impose que $w^{-1}((i < j))$ est positive, autrement dit que $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$. L'appartenance de m à wNw^{-1} force alors la nullité. □

Bibliographie

- [Gab62] P. GABRIEL. « Des catégories abéliennes ». In : *Bulletin de la S.M.F.* 90 (1962), p. 323-448.
- [Ser63] J.P. SERRE. *Cohomologie galoisienne*. Collège de France, 1963.
- [Ax70] J. AX. « Zeros of polynomials over local fields- The Galois action ». In : *Journal of algebra* 15 (1970), p. 417-428.
- [Car85] R.-W. CARTER. *Finite groups of Lie type : conjugacy classes and complex characters*. John Wiley & Sons, 1985.
- [Her98] L. HERR. « Sur la cohomologie galoisienne des corps p -adiques ». In : *Bulletin de la S.M.F.* 126 (1998), p. 563-600.
- [Jan03] J.-C. JANTZEN. *Representations of Algebraic Groups*. AMS, 2003.
- [Fon07] J.-M. FONTAINE. « Représentations p -adiques des corps locaux, 1^{ère} partie ». In : *The Grotendieck Festschrift II* (2007), p. 249-309.
- [Vig07] M.-F. VIGNERAS. « Admissibilité des représentations p -adiques et lemme de Nakayama ». In : (jan. 2007).
- [Eme08] M. EMERTON. « On a class of coherent rings, with applications to the smooth representation theory of GL_2 in characteristic p ». In : *unpublished* (2008).
- [Vig08] M.-F. VIGNÉRAS. « Série principale modulo p de groupes réductifs p -adiques ». In : *Geometrical and functional analysis* 17 (2008), p. 2090-2112.
- [BC09] O. BRINON et B. CONRAD. « CMI SUMMER SCHOOL NOTES ON p -ADIC HODGE THEORY ». In : <http://math.stanford.edu/conrad/papers/notes.pdf> (2009).
- [Mat09] H. MATSUMURA. *Commutative Algebra*. Cambridge University Press, 2009.
- [Col10] P. COLMEZ. « REPRÉSENTATIONS DE $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ ET (φ, Γ) -MODULES ». In : *Astérisque* 330 (2010), p. 345-389.
- [Bre15] C. BREUIL. « Induction parabolique et (φ, Γ) -modules ». In : *Algebra and Number Theory* 9 (2015), p. 2241-2291.
- [EZ17] M. ERDÉLYI et G. ZÁBRÁDI. « Links between generalized Montréal functors ». In : *Mathematische Zeitschrift* 286(3-4) (2017), p. 1227-1275.
- [Sch17] P. SCHNEIDER. *Galois Representations and (φ, Γ) -Modules*. Cambridge University Press, 2017.
- [Záb18a] G. ZÁBRÁDI. « Multivariable (φ, Γ) -modules and smooth \mathfrak{o} -torsion representations ». In : *Selecta Mathematica* 24(2) (2018), p. 935-995.
- [Záb18b] G. ZÁBRÁDI. « Multivariable (φ, Γ) -modules and products of Galois groups ». In : *Maths Research Letter* 25(2) (2018), p. 687-721.
- [Bre+21] C. BREUIL et al. « Conjectures and results on modular representations of $GL_n(K)$ for a p -adic field K ». In : *prepublication* (2021).
- [PZ21] A. PAL et G. ZÁBRÁDI. « Cohomology and overconvergence for representations of powers of Galois groups ». In : *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 20(2) (2021), p. 361-421.
- [CKZ] A. CARTER, K. S. KEDLAYA et G. ZÁBRÁDI. « Drinfeld’s lemma for perfectoid spaces and overconvergence of multivariate (φ, Γ) -modules ». In : *to appear in Documenta Math.* ().
- [Col] P. COLMEZ. « Analyse p -adique et (φ, Γ) -modules ». In : *Notes de cours* ().
- [FS] M. FÜTTERER et M. SCHWAB. « Spectral sequences ». In : <https://www.mathi.uni-heidelberg.de/mfuetterer/texts/specseq.pdf?fbclid=IwAR2iB9cFrsUiuG745kzg6JIGHdpw-bkKEDITXbUGaGGryENtv3q0nmSE7AQ> ().

- [Mor] M. MORROW. « Adic and perfectoid spaces ». In : <https://webusers.imj-prg.fr/matthew.morrow/Espaces/Perf%20spaces/PRG%20final.pdf> ().
- [Proa] Stacks PROJECT. « Lemme 10.154.6 ». In : ().
- [Prob] Stacks PROJECT. « Lemme 10.155.2 ». In : ().
- [Proc] Stacks PROJECT. « Lemme 10.83.2 ». In : ().
- [Prod] Stacks PROJECT. « Lemme 10.86.4 ». In : ().
- [Proe] Stacks PROJECT. « Lemme 12.29.1 ». In : ().