Objets en structures algébriques (et frénésie de diagrammes)

Nataniel Marquis

5 juillet 2023

En février 2023, je suis tombé simultanément des questions concernant d'un côté les objets en anneaux de la catégorie des ensembles topologiques munis de l'action d'un monoïde, de l'autre le quotient d'un produit d'objects par l'action produit d'un produit de deux groupes. En essayant de me convaincre que les énoncés que j'espérais fonctionnaient, je me suis retrouvé à écrire de magnifiques diagrammes au tableau, à les étoffer, à les dépiauter. Même si les énoncés de ce texte sont élémentaires, ils sont établis avec beaucoup de généralité et donnent l'occasion aux turlupinés des diagrammes commutatifs de satisfaire leur passion.

1 Objets en structures algébriques

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ et tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans Ens appelé préfaisceau associé à X et défini par $h_X : Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Un objet en structures algébriques sera grossièrement un objet X tel que le préfaisceau h_X se factorise par la catégorie d'objets algébriques désirée. Cela se reformule en disant que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ est munie de ladite structure algébrique, fonctoriellement en Y. Une traduction plus catégorique constate qu'une structure algébrique (par exemple de groupes) sur un ensemble est la donnée d'application qui font commuter certains diagrammes. Explicitement, une structure de groupe sur un ensemble G est la donnée de trois applications

$$\mu : G \times G \to G, \;\; e : * \to G \text{ et } i : G \to G$$

appelées respectivement multiplication, neutre et inverses, qui font commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mathrm{Id}_G \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{Id}_G"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\mathrm{Id}_G \times e"] \arrow[d, "e \times \mathrm{Id}_G"'] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_G"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"] & G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Delta_G"] \arrow[d, "\Delta_G"'] \arrow[dr] & G \times G \arrow[r, "\mathrm{Id}_G \times i"] & G \times G \arrow[dd, "\mu"] \\
G \times G \arrow[d, "i \times \mathrm{Id}_G"'] & * \arrow[dr, "e"] & \\
G \times G \arrow[rr, "\mu"] & & G
\end{tikzcd}$$

Ces diagrammes traduisent l'associativité de la multiplication, que e fournit un neutre et i une application inverse. Le lemme de Yoneda permet d'exprimer une structure sur les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ fonctorielle comme les précédents diagrammes au niveau de l'objet. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant un objet final et des produits fibrés. Un objet en groupes de $\mathcal{C}$ sera défini comme un objet G muni de morphismes μ, e et i comme précédemment (où le produit est vu dans $\mathcal{C}$ et où $*$ est l'objet final) qui font commuter les diagrammes.

Le but de cette partie est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories possèdant un objet final, et tous les produits fibrés. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur covariant tel que le morphisme naturel $F(Y \times_X Y') \to F(Y) \times_{F(X)} F(Y')$ soit un isomorphisme pour tout produit fibré. Soit enfin T un endomorphisme du foncteur F.*

Pour tout objet en monoïdes Z de $\mathcal{C}$, il existe une structure naturelle d'objet en monoïdes sur $F(Z)$, qui fait de $T(Z)$ un morphisme d'objets en monoïdes.

Le même énoncé est correct en remplaçant les occurrences de monoïdes par groupes, groupes abéliens, anneaux, R-modules ou R-algèbres pour un anneau R.

Commençons par préparer le terrain.

Lemma 1.2. *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégories ayant des produits fibrés tel que le morphisme naturel $F(Y \times_X Z) \to F(Y) \times_{F(X)} F(Z)$ est toujours un isomorphisme. Soit f un morphisme du diagramme définissant $Y \times_X Z$ vers celui définissant $Y' \times_{X'} Z'$. Il induit un morphisme*

$$f_\times : Y \times_X Z \to Y' \times_{X'} Z'.$$

Il induit également un morphisme de diagramme $F(f)$ du diagramme définissant $F(Y) \times_{F(X)} F(Z)$ vers celui définissant $F(Y') \times_{F(X')} F(Z')$. Le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F(Y \times_X Z) \arrow[r, "F(f_\times)"] \arrow[d, "\wr"'] & F(Y' \times_{X'} Z') \arrow[d, "\wr"] \\
F(Y) \times_{F(X)} F(Z) \arrow[r, "F(f)_\times"] & F(Y') \times_{F(X')} F(Z')
\end{tikzcd}$$

En particulier, pour T *un endomorphisme de ce foncteur. Pour tout produit fibré* $Y \times_X Z$*, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
F(Y \times_X Z) \arrow[r, "\mathrm{T}(Y \times_X Z)"] \arrow[d, "\wr"'] & F(Y \times_X Z) \arrow[d, "\wr"] \\
F(Y) \times_{F(X)} F(Z) \arrow[r, "\mathrm{T}(Y) \times_{\mathrm{T}(X)} \mathrm{T}(Z)"] & F(Y) \times_{F(X)} F(Z)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Par propriété universelle du produit fibré, il suffit de le vérifier après projection sur chaque facteur. Appelons p_1 toutes les projections sur les premiers facteurs. Nous étoffons le diagramme comme suit :

$$\begin{tikzcd}
F(Y \times_X Z) \arrow[rr, "F(f_\times)"] \arrow[d, "\wr"'] & & F(Y' \times_{X'} Z') \arrow[d, "\wr"] & \\
F(Y) \times_{F(X)} F(Z) \arrow[rr, "F(f)_\times"] \arrow[dr, "p_1"] & & F(Y') \times_{F(X')} F(Z') \arrow[dr, "p_1"] & \\
& F(Y) \arrow[rr, "F(f_Y)"] & & F(Y')
\end{tikzcd}$$

Par définition de $F(f)_\times$, le parallélépipède inférieur commute. Vérifier le résultat après la première projection revient donc à montrer la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
F(Y \times_X Z) \arrow[rr, "F(f_\times)"] \arrow[d, "\wr"'] & & F(Y' \times_{X'} Z') \arrow[d, "\wr"] & \\
F(Y) \times_{F(X)} F(Z) \arrow[dr, "p_1"] & & F(Y') \times_{F(X')} F(Z') \arrow[dr, "p_1"] & \\
& F(Y) \arrow[rr, "F(f_Y)"] & & F(Y')
\end{tikzcd}$$

que l'on étoffe à son tour en :

$$\begin{tikzcd}
F(Y \times_X Z) \arrow[rr, "F(f_\times)"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[ddr, bend left, "F(p_1)"] & & F(Y' \times_{X'} Z') \arrow[d, "\wr"'] \arrow[ddr, bend left, "F(p_1)"] & \\
F(Y) \times_{F(X)} F(Z) \arrow[dr, "p_1"] & & F(Y') \times_{F(X')} F(Z') \arrow[dr, "p_1"] & \\
& F(Y) \arrow[rr, "F(f_Y)"] & & F(Y')
\end{tikzcd}$$

Ici, les triangles commutent par définition des morphismes naturels qui sont des isomorphismes. Nous nous restreignons ainsi à prouver la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
F(Y \times_X Z) \arrow[r, "F(f_\times)"] \arrow[dr, bend left, "F(p_1)"] & F(Y' \times_{X'} Z') \arrow[dr, bend left, "F(p_1)"] & \\
& F(Y) \arrow[r, "F(f_Y)"] & F(Y')
\end{tikzcd}$$

Cette commutativité est vérifiée avant application de F. En bref, nous avons prouver que les deux compositions dans notre diagramme originel coïncident après projection sur $F(Y')$. Par symétrie, elles coïncident après projection sur $F(Z')$ et sont donc égales.

Dans le cas d'un endomorphisme de f, les flèches $\mathrm{T}(X)$, $\mathrm{T}(Y)$ et $\mathrm{T}(Z)$ fournissent un morphisme de diagramme et on applique le résultat précédent. $\square$

Definition 1.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec des produits finis. Un objet en monoïdes est un triplet (X, μ, η) où

$$\begin{aligned} &X \text{ est un objet de } \mathcal{C}, \\ &\mu : X \times X \to X \\ &\eta : * \to X \end{aligned}$$

tel que les deux diagrammes suivantes commutent

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \times \eta"] \arrow[d, "\eta \times \mathrm{Id}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[d, "\mu"] \\ X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "\mathrm{Id}_X \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{Id}_X"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ X \times X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd}$$

Les morphismes d'objets en monoïdes sont les morphismes $f : X \to Y$ qui font commuter les deux diagrammes

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "f \times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \times Y \arrow[r, "\mu_Y"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} * \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\eta_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Les categories des objets en groupes, en groupes abéliens, en anneaux, en R-modules ou en R-algèbres pour un anneau R sont définies de manière analogue en ajoutant les morphismes et diagrammes suplémentaires nécessaires. Attention au fait que pour un objet en R-modules, on se donnent une famille d'endormorphismes de X indexés par R qui représentent les multiplications par lesdits éléments de R.

Pour un objet en anneaux commutatif A de $\mathcal{C}$, nous pouvons donner une définition intrinsèque : la catégorie A-Mod des A-modules a pour objets les couples formés d'un objet en groupes abéliens M et d'un morphisme $\nu : A \times M \to M$ qui font commuter les diagrammes que l'on imagine (voir [§2, Notes sur les mathématiques condensées] pour une analyse plus complète avec notamment quelques jolis diagrammes supplémentaires).

Lemma 1.4. *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories possèdant un objet final, et tous les produits fibrés (en particulier les produits). Soit Z un objet en monoïdes de $\mathcal{C}$. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur covariant préservant l'élément final et vérifiant les hypothèses du lemme 1.2. La composée*

$$\mu_F : F(Z) \times F(Z) \xrightarrow{\sim} F(Z \times Z) \xrightarrow{F(\mu)} F(Z)$$

conjointe au morphisme $F(\eta) : * \to F(Z)$ fournit une structure de monoïde sur $F(Z)$. Pour tout morphisme $f : Z \to Z'$ d'objets en monoïdes, le morphisme $F(f)$ est un morphisme d'objets en monoïdes.

Le même énoncé est correct si l'on remplace les occurences de monoïde par groupe (resp groupe abélien) en ajoutant $F(i)$ comme morphisme inverse sur $F(Z)$, où i est l'inverse sur Z.

Le même énoncé est correct si l'on remplace les occurences de groupe abélien par anneau en prenant

$$\pi_F :, F(Z) \times F(Z) \xrightarrow{\sim} F(Z \times Z) \xrightarrow{F(\pi)} F(Z)$$

pour multiplication.

Le même énoncé est correct si l'on remplace les occurences de groupe abélien par R-module (resp. R-algèbres) en prenant $F(f_\lambda)$ pour multiplications.

Soit A un objet en anneaux de $\mathcal{C}$. Le même énoncé est correct en remplacant les occurences d'objet de $\mathcal{C}$ en groupes abéliens par $A - \mathrm{Mod}$, les occurrences d'objet de $\mathcal{D}$ en groupes abéliens par $F(A) - \mathrm{Mod}$ et en prenant

$$\nu_F : F(A) \times F(M) \xrightarrow{\sim} F(A \times M) \xrightarrow{F(\nu)} F(M)$$

pour loi externe.

Démonstration. Nous ne ferons pas toutes les vérifications mais donnons les démonstrations complètes dans le cas monoïdal. Commençons par la démonstration du neutre, autrement dit, par symétrie des rôles, de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{F(Z)}\times F(\eta)"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{F(Z)}"'] & F(Z)\times F(Z) \arrow[d, "\mu_F"] \\
 & F(Z)
\end{tikzcd}$$

Puisque $\mathrm{Id}_{F(Z)} = F(\mathrm{Id}_Z)$ nous pouvons étoffer et préciser le diagramme comme suit

$$\begin{tikzcd}
F(Z) \arrow[r, "F(\mathrm{Id}_Z)\times F(\eta)"] \arrow[dr, "F(\mathrm{Id}_Z\times\eta)"] \arrow[ddr, "F(\mathrm{Id}_Z)"'] & F(Z)\times F(Z) \arrow[d, "\wr"] \\
 & F(Z\times Z) \arrow[d, "F(\mu)"] \\
 & F(Z)
\end{tikzcd}$$

Le triangle supérieur commute grâce au lemme 1.2 et le triangle inférieur en passant via F la commutativité du diagramme analogue pour la structure d'objet en monoïdes sur Z.

Continuons avec l'associativité, autrement dit la démonstration de la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
F(Z)\times F(Z)\times F(Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{F(Z)}\times\mu_F"] \arrow[d, "\mu_F\times\mathrm{Id}_{F(Z)}"'] & F(Z)\times F(Z) \arrow[d, "\mu_F"] \\
F(Z)\times F(Z) \arrow[r, "\mu_F"] & F(Z)
\end{tikzcd}$$

Nous étoffons le diagramme de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
F(Z)\times F(Z)\times F(Z) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & F(Z\times Z)\times F(Z) \arrow[r, "F(\mu)\times\mathrm{Id}_{F(Z)}"] \arrow[d, "\wr"'] & F(Z)\times F(Z) \arrow[d, "\wr"] \\
F(Z)\times F(Z\times Z) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{F(Z)}\times F(\mu)"'] & F(Z\times Z\times Z) \arrow[r, "F(\mu\times\mathrm{Id}_Z)"] \arrow[d, "F(\mathrm{Id}_Z\times\mu)"'] & F(Z\times Z) \arrow[d, "F(\mu)"] \\
F(Z)\times F(Z) \arrow[r, "\sim"] & F(Z\times Z) \arrow[r, "F(\mu)"] & F(Z)
\end{tikzcd}$$

Le carré supérieur gauche commute et prouve que le morphisme naturel $F(Z\times Z\times Z)\to F(Z)\times F(Z)\times F(Z)$, induit par les images par F des trois projections, est un isomorphisme (comme pour le lemme précédent, nous pouvons le vérifier rigoureusement en post-composant avec les projections sur chaque facteur, et en effectuant notre prestidigitation sur diagramme). Puisque $\mathrm{Id}_{F(Z)} = F(\mathrm{Id}_Z)$, les carrés supérieur droit et inférieur gauche commutent grâce au lemme 1.2. Prouver la commutativité du diagramme d'associativité pour $F(Z)$ revient donc à prouver celle du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(Z)\times F(Z)\times F(Z) \arrow[dr, "\sim"] & & \\
& F(Z\times Z\times Z) \arrow[r, "F(\mu\times\mathrm{Id}_Z)"] \arrow[d, "F(\mathrm{Id}_Z\times\mu)"'] & F(Z\times Z) \arrow[d, "F(\mu)"] \\
& F(Z\times Z) \arrow[r, "F(\mu)"] & F(Z)
\end{tikzcd}$$

Cette dernière découle de la commutativité du diagramme d'associativité pour Z, transportée via F.

Soit à présent $f : Z \to Z'$ un morphisme d'objets en monoïdes. Nous voulons prouver que $F(f)$ est un morphisme d'objets en monoïdes, i.e. que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
F(Z)\times F(Z) \arrow[r, "\mu_F"] \arrow[d, "F(f)\times F(f)"'] & F(Z) \arrow[d, "F(f)"] \\
F(Z')\times F(Z') \arrow[r, "\mu'_F"] & F(Z')
\end{tikzcd}$$

Nous étoffons le diagramme comme suit :

$$\begin{tikzcd}
F(Z)\times F(Z) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "F(f)\times F(f)"'] & F(Z\times Z) \arrow[r, "F(\mu)"] \arrow[d, "F(f\times f)"'] & F(Z) \arrow[d, "F(f)"] \\
F(Z')\times F(Z') \arrow[r, "\sim"] & F(Z'\times Z') \arrow[r, "F(\mu')"] & F(Z')
\end{tikzcd}$$

Il se trouve que le carré de gauche commute par naturalité de la commutation au produit. Le carré de droite commute puisqu'il s'agit du diagramme soulignant que f est un morphisme d'objets en monoïdes, auquel on a appliqué F. Ceci démontre la commutativité de notre diagramme originel, i.e. que $F(f)$ est un morphisme d'objets en monoïdes.

Pour ne pas surcharger de preuves, nous laissons de côté les diagrammes additionnels pour les autres structures en supposant qu'ils fonctionnent avec des techniques similaires à celles tout juste employées. $\square$

Proposition 1.5. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possèdant un objet final, et tous les produits fibrés (en particulier les produits). Soit Z un objet en monoïdes de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{D}$ une sous-catégorie pleine de* Ens. *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur covariant vérifiant les hypothèses du lemme 1.2 et T un endomorphisme du foncteur F. La structure de monoïde sur $F(Z)$ donnée par la proposition 1.4 fait de $\mathrm{T}(Z)$ un morphisme de monoïdes.*

La même proposition est correcte en remplaçant les occurrences de monoïde par groupe, groupe abélien, anneau, R-module ou par R-algèbre.

Démonstration. Posons $\mu : Z \times Z \to Z$ la multiplication sur Z. Grâce au lemme précédent, nous pouvons écrire un grand diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F(Z)\times F(Z) \arrow[r, "\mathrm{T}(Z)\times\mathrm{T}(Z)"] \arrow[d, "\wr"'] & F(Z)\times F(Z) \arrow[d, "\wr"] \\
F(Z\times Z) \arrow[r, "\mathrm{T}(Z\times Z)"] \arrow[d, "F(\mu)"'] & F(Z\times Z) \arrow[d, "F(\mu)"] \\
F(Z) \arrow[r, "\mathrm{T}(Z)"] & F(Z)
\end{tikzcd}$$

où la composition des flèches verticales correspond exactement à la structure de groupe donnée par la proposition 1.4. L'enveloppe de ce diagramme illustre alors exactement que $\mathrm{T}(Z)$ est un morphisme d'objets en monoïdes.

Vérifions également la linéarité. Soit $\lambda \in R$, posons $f_\lambda : Z \to Z$ la multiplication par λ sur Z. Nous pouvons écrire le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(Z) & \xrightarrow{\mathrm{T}(Z)} & F(Z) \\ {\scriptstyle F(f_\lambda)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f_\lambda)} \\ F(Z) & \xrightarrow{\mathrm{T}(Z)} & F(Z) \end{array}$$

où la flèche verticale correspond exactement à la multiplication par λ sur $F(Z)$ donnée par la proposition 1.4. Le diagramme illustre alors exactement ce que nous voulions démontrer. Nous pourrions avoir l'impression d'oublier complètement la compatibilité des structures de groupe abélien et des multiplications par des éléments de R. En réalité, ces compatibilités ne sont pas importantes pour les morphismes de R-modules. $\square$

2 Quotients par une relation d'équivalence dans un topos

Pour deux ensembles X_1 et X_2 munis d'action de deux groupes G_1 et G_2. Le produit $X_1 \times X_2$ est muni d'une action de $G_1 \times G_2$ et le quotient ${}^{(X_1 \times X_2)}/_{(G_1 \times G_2)}$ s'identifie au produit ${}^{X_1}/_{G_1} \times {}^{X_2}/_{G_2}$. Un cadre raisonnable pour généraliser cet énoncé est celui d'un topos. Si les constructions de l'action produit et l'existence d'un morphisme de comparaison aurait un sens pour des actions d'objets en groupes dans une catégorie quelconque, nous ne l'écrivons ici que dans le cas d'un topos, pour lequel le morphisme de comparaison sera in fine un isomorphisme.

Definition 2.1. Soit X un objet de $\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$. Une relation d'équivalence sur X est un sous-faisceau $\mathcal{R} \subset X \times X$ qui contient la diagonale, est symétrique [1] et transitive [2]. Une telle relation d'équivalence équivaut à la donnée fonctorielle d'une relation d'équivalence sur $X(S)$ pour tout objet S de $\mathcal{C}$, avec condition de recollement.

Un morphisme de faisceau $f : X \to Y$ sera dit $\mathcal{R}$-invariant si les deux composées suivantes coïncident

$$\mathcal{R} \hookrightarrow X \times X \xrightarrow[f \times f]{} Y \times Y \rightrightarrows Y.$$

Proposition 2.2. *Pour tout faisceau X sur $\mathcal{C}$ et toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur X, le foncteur contravariant*

$$\mathrm{Sh}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ens}, \quad Y \mapsto \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(\mathcal{C})}(X, Y) \mid f \text{ est } \mathcal{R}\text{−équivariante} \right\}$$

est représentable par un objet que l'on note ${}^{X}/_{\mathcal{R}}$.

Démonstration. Nous nous contentons d'énoncer que la définition

$${}^{X}/_{\mathcal{R}} = \left(S \mapsto {}^{X(S)}/_{\mathcal{R}(S)} \right)^{\sharp},$$

où le dièse signifie la faisceautisation, fournit effectivement un représentant. $\square$

Lorsque G est un objet en groupe de $\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$, une action de G sur X est un morphisme $\bullet : G \times X \to X$ qui fait commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_G \times \mathrm{Id}_X"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_X"'] & G \times X \arrow[d, "\bullet"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "\mu \times \mathrm{Id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_G \times \bullet"'] & G \times X \arrow[d, "\bullet"] \\ G \times X \arrow[r, "\bullet"] & X \end{tikzcd}$$

Une telle action de groupe fournit une relation d'équivalence sur X, incarnée par l'image du morphisme $G \times X \to X \times X$ obtenu à partir de $\bullet$ et de la projection sur X. Nous notons ${}^{X}/_{G}$ le quotient associé en omettant la trace de l'action elle-même.

Proposition 2.3. *Soit X un objet de $\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$. Soit X_1 (resp. X_2) un objet de $\mathrm{Sh}(\mathcal{C})$, G_1 (resp. G_2) un objet en groupe avec action sur X_1 (resp. G_2). Soit $f_1 : X_1 \to X$ (resp. $f_2 : X_2 \to X$) un morphisme G_1-invariant (resp. G_2-invariant).*

Le diagramme suivant commute

1. Ceci signifie que l'image de $\mathcal{R}$ par l'inversion des coordonnées sur $X \times X$ vaut encore $\mathcal{R}$.
2. Ceci signifique que l'image de $\mathcal{R} \times_X \mathcal{R}$ dans $(X \times X) \times_{p_2, X, p_1} (X \times X) \cong X \times X$ s'identifie à un sous-faisceau de $\mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd}
(G_1 \times G_2) \times (X_1 \times_X X_2) \arrow[r, "p_1 \times p_1"] \arrow[d, "p_2 \times p_2"'] & G_1 \times X_1 \arrow[r, "\bullet_1"] & X_1 \arrow[dd, "f_1"] \\
G_2 \times X_2 \arrow[d, "\bullet_2"'] & & \\
X_2 \arrow[rr, "f_2"] & & X
\end{tikzcd}$$

où p_i désignent toujours la i-ième projections et $\bullet_j$ l'action sur X_j. La propriété universelle fournit un morphisme $(G_1 \times G_2) \times (X_1 \times_X X_2) \to (X_1 \times_X X_2)$ qui est une action de groupe. De plus, il existe un morphisme naturel

$$(X_1 \times_X X_2)/(G_1 \times G_2) \to \left(X_1/G_1\right) \times_X \left(X_2/G_2\right)$$

qui est un isomorphisme

Démonstration. Pour prouver que le premier diagramme commute, il faut le raffiner comme suit :

$$\begin{tikzcd}
(G_1 \times G_2) \times (X_1 \times_X X_2) \arrow[rr, "p_1 \times p_1"] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, "p_2 \times p_2"'] & & G_1 \times X_1 \arrow[r, "\bullet_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X_1 \arrow[ddd, "f_1"] \\
& X_1 \times_X X_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X_1 \arrow[ddr, "f_1"] & \\
G_2 \times X_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\bullet_2"'] & X_2 \arrow[drr, "f_2"] & & \\
X_2 \arrow[rrr, "f_2"] & & & X
\end{tikzcd}$$

où les quadrilatères ayant pour coin les X_i commutent puisque f_i est équivariant, et où les autres commutent simplement par identités sur les produits, produits fibrés et leurs projections.

Contentons-nous de démontrer que le premier diagramme d'action de groupe commute. Puisque son but est un produit fibré, il suffit de démontrer qu'il commute après post-compositon par les deux projections, i.e. par exemple que la diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times_X X_2 \arrow[r, "e_{(G_1 \times G_2)} \times \mathrm{Id}_{(X_1 \times_X X_2)}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{(X_1 \times_X X_2)}"'] & (G_1 \times G_2) \times (X_1 \times_X X_2) \arrow[d, "\bullet_{(1 \times_X 2)}"] & \\
& X_1 \times_X X_2 \arrow[dr, "p_1"] & \\
& & X_1
\end{tikzcd}$$

On raffine le diagramme comme suit

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times_X X_2 \arrow[r, "e_{(G_1 \times G_2)} \times \mathrm{Id}_{(X_1 \times_X X_2)}"] \arrow[ddr, "\mathrm{Id}_{(X_1 \times_X X_2)}"'] & (G_1 \times G_2) \times (X_1 \times_X X_2) \arrow[dr, "p_1 \times p_1"] \arrow[dd, "\bullet_{(1 \times_X 2)}"] & \\
& & G_1 \times X_1 \arrow[dd, "\bullet_1"] \\
& X_1 \times_X X_2 \arrow[dr, "p_1"] & \\
& & X_1
\end{tikzcd}$$

et le parallélépipède de droite commute par définition de l'action. Il suffit donc que l'enveloppe du diagramme commute. On ne garde qu'elle est on raffine comme suit :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times_X X_2 \arrow[rr, "e_{(G_1 \times G_2)} \times \mathrm{Id}_{(X_1 \times_X X_2)}"] \arrow[dr, "p_1"] \arrow[ddrr, "p_1"'] & & (G_1 \times G_2) \times (X_1 \times_X X_2) \arrow[d, "p_1 \times p_1"] \\
& X_1 \arrow[r, "e_{G_1} \times \mathrm{Id}_{X_1}"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{X_1}"'] & G_1 \times X_1 \arrow[d, "\bullet_1"] \\
& & X_1
\end{tikzcd}$$

La partie supérieure commute par identités sur les produits et les projections, la partie inférieure commute grâce au diagramme pour $\bullet_1$.

Pour construire le morphisme, démontrons que la composée des deux projections $\pi : X_1 \times_X X_2 \to X_1 \twoheadrightarrow {}^{X_1}/_{G_1}$ passe au quotient par l'action de $G_1 \times G_2$. Ceci équivaut à la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(G_1 \times G_2) \times (X_1 \times_X X_2) \arrow[r, "\bullet"] \arrow[d, "p"'] & X_1 \times_X X_2 \arrow[d, "\pi"] \\
X_1 \times_X X_2 \arrow[r, "\pi"] & {}^{X_1}/_{G_1}
\end{tikzcd}$$

Nous l'étoffons comme suit :

$$\begin{tikzcd}
(G_1 \times G_2) \times (X_1 \times_X X_2) \arrow[rr, "\bullet"] \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "p_1 \times p_1"] & & X_1 \times_X X_2 \arrow[d, "p_1"] \\
& G_1 \times X_1 \arrow[r, "\bullet_1"] \arrow[d, "p"] & X_1 \arrow[d, two heads] \\
X_1 \times_X X_2 \arrow[r, "p_1"] & X_1 \arrow[r, two heads] & {}^{X_1}/_{G_1}
\end{tikzcd}$$

où p sont les projections évidentes sur le deuxième facteur. Le quadrilatère du haut commute par définition de l'action $\bullet$; le quadrilatère de gauche commute de manière automatique et le carré du bas commute parce que $X_1 \twoheadrightarrow {}^{X_1}/_{G_1}$ est G_1-invariant. Nous laissons au lecteur ou à la lectrice le soin de vérifier que les deux morphismes ${}^{(X_1 \times X_2)}/_{(G_1 \times G_2)} \to {}^{X_i}/_{G_i}$ obtenus se rassemblent en un morphisme vers le produit fibré sur X. Le morphisme obtenu est un isomorphisme sur les sections des préfaisceaux, mais les préfaisceaux en jeu sont des faisceaux par commutation de la faisceautisation aux limites finies. $\square$