TD n°1 : Relations et cardinaux

19 et 22/09/23

Nous avancerons dans l'ordre sur les exercices 1, 2, 6, 9 puis 3. Après ces exercices, vous pouvez naviguer librement parmi les exercices restants ou parmi ceux de votre polycopié.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis et vendredis, notamment juste avant le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à **nataniel.marquis@dma.ens.fr****.**

1 Relations d'équivalence

Exercice 1. Description de quotients

Dans chacun des cas suivants, démontrer *(plus ou moins succinctement selon le cas)* que la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble X est une relation d'équivalence et donner une description élégante du quotient *(au sens où l'on peut donner une description plus agréable des classes)* le cas échéant.

1. Pour un ensemble X et la relation d'égalité $=$.
2. Pour un ensemble X et la relation totale $\mathcal{R} = X \times X$.
3. Pour une application $f : X \to W$ et la relation définie sur X par
$$\mathcal{R}_f = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}.$$
4. Pour une application injective $f : Y \hookrightarrow X$ et une relation d'équivalence $\mathcal{S}$ sur Y et la relation définie par
$$x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow (\exists (y, y') \in \mathcal{S},\ f(y) = x,\ f(y') = x') \text{ ou } x = x'.$$
Il sera possible d'utiliser le quotient ${}^{Y}/_{\mathcal{S}}$ dans la description.
5. Pour $X = \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ et la relation
$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow \frac{\ln(n)}{\ln(m)} \in \mathbb{Q},$$
puis donner un système de représentants.

Exercice 2. Restriction et extension

On essaiera autant que faire se peut se rédiger cet exercice de manière complète mais concise en utilisant le point de vue partition sur les relations d'équivalence.

1. Soit X un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Soit $Y \subseteq X$ un sous-ensemble. Démontrer que $\mathcal{R} \cap (Y \times Y)$ est une relation d'équivalence sur Y. Décrire ses classes en fonction de celles de $\mathcal{R}$.
2. Toute relation d'équivalence sur Y peut-elle être obtenue ainsi ?
3. Soient A et B deux ensembles munis d'une relation d'équivalence chacun $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$. Démontrer que la relation [1] $\mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_B$ est une relation d'équivalence sur $A \sqcup B$. Décrire ses classes en fonction de celles de $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$.
4. Toute relation d'équivalence sur $A \sqcup B$ peut-elle être obtenue ainsi ?

1. Nous sous-entendons les inclusions $A \times A \subset (A \sqcup B) \times (A \sqcup B)$ et son analogue pour B.

Exercice 3. Relation d'équivalence engendrée

Soit X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur X.

1. Démontrer qu'il existe une relation $\widetilde{\mathcal{R}}$ qui est d'équivalence, contient $\mathcal{R}$ et minimum pour ces deux propriétés lorsque l'on munit $\mathcal{P}(X \times X)$ de l'inclusion.
2. Donner une description explicite de $\widetilde{\mathcal{R}}$.
3. Décrire ${}^{\mathbb{Z}}/_{\widetilde{\mathcal{R}}}$ lorsque
$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{P},\ \ n = pm.$$

Exercice 4. Construction de $\mathbb{R}$

Considérons $\mathbb{Q}$ construit, avec son addition et son ordre. Posons $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties non vides et bornées supérieurement de $\mathbb{Q}$, ce qui peut se définir en utilisant uniquement $\mathbb{Q}$. Définissons $\mathcal{S}$ la relation définie sur $\mathbb{E}$ par

$$X\mathcal{S}Y \Leftrightarrow \big(\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, \exists y \in Y,\ \ x - \varepsilon \leq y\big) \text{ et } \big(\forall y \in Y, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, \exists x \in X,\ \ y - \varepsilon \leq x\big).$$

1. Démontrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

Pour les questions suivantes, et pour vous donner une intuition, vous pouvez associer mentalement à la classe $[X]$ le réel $\sup X$. Comme nous construisons les réels, cela n'est pour l'instant qu'une intuition.

2. Démontrer que la valeur de vérité de la formule
$$\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, \exists y \in Y,\ \ x - \varepsilon \leq y$$
ne dépend que de la classe de X et de Y, puis que la relation
$$[X] \leq [Y] \Leftrightarrow \big(\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, \exists y \in Y,\ \ x - \varepsilon \leq y\big)$$
définit effectivement une relation d'ordre sur ${}^{\mathcal{E}}/_{\mathcal{S}}$.
3. Démontrer la propriété de la borne supérieur sur ${}^{\mathcal{E}}/_{\mathcal{S}}$: toute partie bornée admet une borne supérieure.
4. Démontrer fastidieusement que l'addition définie sur $\mathcal{E}$ par
$$X + Y = \{x + y \,|\, (x, y) \in X \times Y\}$$
est correctement définie, fournit une structure de monoïde sur $\mathcal{E}$, puis démontrer que l'élément $[X+Y]$ ne dépend que de $[X]$ et $[Y]$ et que la loi déduite sur ${}^{\mathcal{E}}/_{\mathcal{S}}$ fournit une structure de groupe.

Une autre construction comme quotient des suites de Cauchy sur $\mathbb{Q}$ par les suites tendant vers 0, permettrait d'obtenir plus aisément cette loi, grâce à la théorie des groupes quotients.

Exercice 5. Congruence de Touchard

Pour tout entier naturel n, nous définissons le n-ième nombre de Bell comme le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$, et nous le notons B_n.

1. Calculer B_n pour $n \leq 3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier. Démonter la congruence
$$B_{n+p} \equiv B_n + B_{n+1} \mod p.$$
On pourra considérer la bijection de $[\![1, n+p]\!]$ donnée par l'identité sur $[\![1, n]\!]$ et par permutation circulaire de $[\![n+1, n+p]\!]$, puis l'application qu'elle induit sur l'ensemble des partitions.

3. Démontrer que la congruence $|X| \equiv |\mathrm{Fix}(X)| \mod p$ tient également pour une application f d'un ensemble fini X vers lui-même qui vérifie $f^{\circ p^m} = \mathrm{Id}_X$ pour un certain entier $m \geq 1$.
4. Démontrer plus généralement que pour tout entier $m \geq 1$, nous avons

$$B_{n+p^m} \equiv mB_n + B_{n+1} \mod p.$$

Exercice 6. Retour sur la propriété universelle du quotient, premier épisode

La propriété universelle d'un ensemble quotient a été démontrée dans votre cours (Proposition 2.1 de la version actuelle). Elle y est énoncée d'une manière qui vous permettra au mieux de la manipuler, mais dissimule une partie théorique importante, que vous croiserez de nouveau en abordant les groupes produits, les groupes quotients, etc. Les deux exercices qui suivent ont pour but de souligner la philosophie qui sous-tend la construction de l'ensemble quotient. Ce premier exercice étoffe le concept de propriété universelle et habitue à la manipulation de l'ensemble quotient via sa propriété universelle. Le suivant s'attaque à une vision davantage catégorique de l'ensemble quotient.

Soit X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. Nous appelons $\pi_{\mathcal{R}}$ la projection de X sur $X/\mathcal{R}$. Pour toute paire d'ensemble (Y, Z), nous définissons $\mathcal{F}(Y, Z)$ l'ensemble des fonctions de Y dans Z. Pour tout ensemble Y, nous définissons $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y constantes sur chaque classe d'équivalence. On remarquera que $\pi_{\mathcal{R}}$ appartient à $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X, X/\mathrm{R})$.

1. Soit Y un ensemble. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \pi_Y : \mathcal{F}\big(X/\mathcal{R}, Y\big) &\longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X, Y) \\ f &\mapsto f \circ \pi_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

est bien définie et fournit une bijection.

2. Vérifier que pour toute application $f : Y \to Z$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}\big(X/\mathcal{R}, Y\big) \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "f\circ\cdot"] & \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X, Y) \arrow[d, "f\circ\cdot"] \\ \mathcal{F}\big(X/\mathcal{R}, Z\big) \arrow[r, "\pi_Z"] & \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X, Z) \end{tikzcd}$$

au sens où pour toute application $g \in \mathcal{F}(X/\mathcal{R}, Y)$, nous avons l'égalité $f \circ \pi_Y(g) = \pi_Z(f \circ g)$. On dira alors que les applications π_Y sont *naturelles* en Y.

3. Soit $\mathcal{S}$ une relation d'équivalence sur X telle que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Montrer que la relation $\mathcal{S}/\mathcal{R}$ définie sur $X/\mathcal{R}$ par

$$[x_1]_{\mathcal{R}}\, \mathcal{S}/\mathcal{R}\, [x_2]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow x_1 \mathcal{S} x_2$$

est définie de manière non ambiguë et fournit une relation d'équivalence. Construire en utilisant les propriétés universelles des quotients une bijection

$$X/\mathcal{S} \cong (X/\mathcal{R})/(\mathcal{S}/\mathcal{R}).$$

Exercice 7. Retour sur la propriété universelle du quotient, deuxième épisode

Bien que nous l'avons défini explicitement, le couple $(X/\mathcal{R}, \pi)$ est philosophiquement créé pour vérifier les deux propriétés précédentes, que nous rassemblons sous le terme vague de *propriété universelle du quotient*. Si le cours de Gaëtan Chenevier permet de définir ce couple sans équivocité, la question suivante s'intéresse à l'unicité du couple défini par les propriétés précédentes.

1. Soit (Q, p) un couple formé d'un ensemble Q et d'une application $p \in \mathcal{F}(X, Q)$. Nous supposons que chaque application

$$p_Y : \mathcal{F}(Q, Y) \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X, Y)$$
$$f \mapsto f \circ p$$

est bien définie et bijective. Montrer que $p \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X, Q)$ et qu'il existe une unique bijection $\iota : Q \to {}^X/_{\mathcal{R}}$ telle que $\pi = \iota \circ p$.

2. Prenons s une section de π. Montrer que le couple $(\mathrm{Im}(s), s \circ \pi)$ vérifie les hypothèses de la question précédente.

Nous aurions pu définir *un* ensemble quotient comme un système de représentant. Nous aurions obtenu la même propriété universelle qui permettait de le manipuler. Remarquons toutefois que cette construction utilisait l'axiome du choix. L'idée de définir un objet par propriété universelle peut déborder du cadre d'une relation d'équivalence. Nous proposons de faire un lien avec l'exercice 3.

3. Nous étendons la définitions de $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X, Y)$ à une relation quelconque sur X par

$$\mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X, Y) = \left\{ f \in \mathcal{F}(X, Y) \,\middle|\, \forall (x, x') \in \mathcal{R},\ f(x) = f(x') \right\}.$$

Montrer que pour tout ensemble Y, l'application

$$\pi_Y : \mathcal{F}\big({}^X/_{\widetilde{\mathcal{R}}}, Y\big) \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X, Y)$$
$$f \mapsto f \circ \pi$$

est bien définie et fournit une bijection. L'ensemble ${}^X/_{\widetilde{\mathcal{R}}}$ correspond donc philosophiquement au quotient de X par la relation $\mathcal{R}$.

2 Axiome du choix ?

Dans cette section, il est intéressant de réfléchir pour chaque question si l'utilisation de l'axiome du choix ou du lemme de Zorn est utile. Bien entendu, il se difficile de prouver qu'elle est nécessaire sans faire de théorie des modèles, mais essayez tout de même de vous poser la question de sa nécessité. Nous évitons autant que possible d'utiliser des notations de cardinalité non introduites, mais la philosophie derrière une bijection (resp. une injection) restera une égalité des cardinaux (resp. une comparaison des cardinaux).

Exercice 8. Caractérisation de l'infini

On dit qu'un ensemble X est infini s'il n'admet pas de surjection depuis l'un des $[\![1, n]\!]$.

1. Monter qu'un ensemble X possédant une injection depuis $\mathbb{N}$ est infini.
2. Montrer qu'un ensemble infini admet une injection depuis $\mathbb{N}$.
3. En déduire qu'un ensemble infini possède une bijection avec l'une de ses parties strictes.

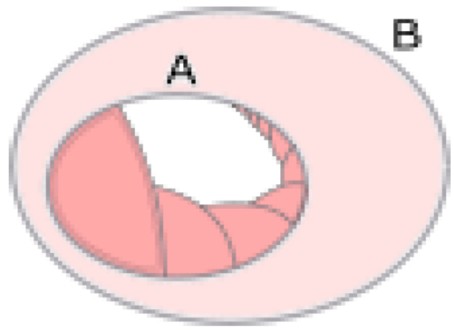
Exercice 9. Cardinaux comparables

Soient X et Y deux ensembles. Montrer qu'il existe une injection de X dans Y ou une injection de Y dans X. On pourra considérer l'ensemble des couples (I, f) où $I \subseteq X$ et $f : I \to Y$ est un injection, muni d'une relation d'ordre adéquate.

Exercice 10. Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein

Soient A et B deux ensembles. Nous cherchons à démontrer que l'existence d'une injection $A \hookrightarrow B$ et celle d'une injection $B \hookrightarrow A$ impliquent l'existe d'une bijection entre A et B.

1. Se ramener au cas où $A \subseteq B$ et où il existe une injection $i : B \hookrightarrow A$.
2. Montrer que les $i^n(B \backslash A)$, pour $n \geq 1$, sont deux à deux disjoints.
3. Conclure, en s'inspirant de la figure suivante pour visualiser comment définir la bijection.



Exercice 11. Absorption de $\aleph_0$

Soit A un ensemble infini. Nous voulons démontrer que A et $A \times \mathbb{N}$ sont en bijection.

1. Démontrer qu'il existe une partition de A en ensembles en bijection avec $\mathbb{N}$.
2. Démontrer qu'il existe un ensemble B tel que $B \times \mathbb{N}$ et A sont en bijection. Conclure.

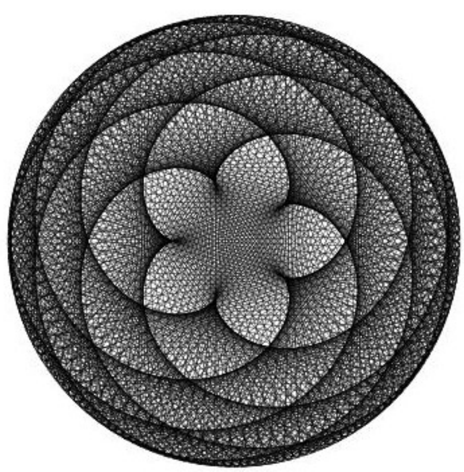


FIGURE 1 – Puissance $644^{\text{iéme}}$ appliquée aux racines 1103-ièmes de l'unité.