TD n°11 : Modules

15 et 19/12/2023

Nous traiterons dans l'ordre les exercices 2, 1 puis 3 et 4. Vous pouvez naviguer librement parmi les exercices restants ou parmi ceux de votre polycopié. Les exercices les plus délicats de la feuille sont marqués d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (J'y serai à coups sûrs le jeudi de 14h à 15h 30 et vous avez des chances de m'y trouver les mercredis, jeudi et vendredis. N'hésitez pas !).

Exercice 1. Autour de $\mathrm{SL}_n(A)$

Soit A un anneau commutatif euclidien et $n \geq 0$.

1. En reprenant la preuve de la structure des A-modules de type fini avec grand soin, démontrer que $\mathrm{SL}_n(A)$ est engendré par les transvections.
2. Démontrer que pour tout entier $N \geq 2$, l'anneau $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est euclidien.
3. En déduire que pour tout entier $N \geq 2$, l'application de réduction modulo N suivante est surjective :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

Exercice 2. Sous-espaces stables

Soit k un corps infini et $n \geq 0$. Soit V un k-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(V)$. Démontrer que V ne possède qu'un nombre fini de sous-k-espaces vectoriels stables par V si et seulement si le polynôme minimal de u est de degré n.

Indication : on pourra s'intéresser au lien entre le polynôme minimal de u et les facteurs invariants de V pour sa structure de $k[X]$-module donnée par u.

Exercice 3. Idéaux équivalents

Soit A un anneau commutatif intègre. Deux idéaux I et J de A sont dits équivalents s'il existe $(a, b) \in (A\backslash\{0\})^2$ tels que $aI = bJ$.

1. Démontrer que la relation "être équivalents" est une relation d'équivalence. Démontrer que A est principal si et seulement si tous ses idéaux non nuls sont équivalents.
2. Démontrer que deux idéaux sont équivalents si et seulement s'ils sont isomorphes comme A-modules.
3. Soit K le corps des fractions de A et V un K-espace vectoriel de dimension 1. Démontrer que tout sous-A-module de type fini de V est isomorphe à un idéal de A.

Exercice 4. Matrices de carré $d\mathrm{Id}_2$

Soit $d \in \mathbb{Z}$ qui n'est pas un carré. Notons $\mathrm{S}_2(d)$ l'ensemble des matrices $S \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $S^2 = d\mathrm{Id}_2$.

1. Donner un exemple d'une telle matrice.
2. Démontrer qu'un idéal non nul de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ contient un entier et en déduire que c'est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 2.
3. Soit M un $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$-module de groupe sous-jacent libre de rang 2. Démontrer que M est un isomorphe à un sous-$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$-module de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
4. À partir des questions précédentes, exhiber des bijections entre :
   — Les classes de conjugaisons d'éléments de $\mathrm{S}_2(d)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
   — Les classes d'isomorphismes de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$-modules, de groupe abélien sous-jacent libre de rang 2.
   — Les classes d'équivalence[1] d'idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
5. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que d est un carré modulo n et que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est principal. Démontrer que n ou $-n$ s'écrivent $a^2 - db^2$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
6. Réfléchir quand est-ce que l'on peut garantir le résultat pour n et $-n$ simultanément.

Exercice 5. Mieux qu'une relation de Bézout

Soit A un anneau commutatif de Bézout et $n \geq 1$. Prenons $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille d'éléments de A globalement premiers entre eux. Démontrer qu'il existe une matrice de $\mathrm{SL}_n(A)$ ayant $(a_1 \; \ldots \; a_n)$ comme première ligne.

Exercice 6. Modules libres sur un anneau principal

Soit A un anneau commutatif principal. Démontrer que tout sous-module N d'un module libre M est libre.

<u>Indication :</u> en considérant une base $(m_i)_{i\in I}$, considérer les bases de $N \cap (\oplus_J m_j A)$ pour des sous-ensembles de J tels que l'intersection est finie.

Exercice 7. Réduction de Jordan sur un corps quelconque

Soit k un corps. Pour tout polynôme unitaire P de degré d, on appelle M_P la matrice compagnon du polynôme P : c'est une matrice carrée de taille d qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

où $P = X^d + sum_{0\leq i<d} a_i X^i$. Pour tout entier n, on appelle N_n la matrice carrée de taille n qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour toute paire (P, n), on appelle $M_{P,n}$ la matrice carrée de taille $n \deg(P)$ qui s'écrit par blocs :

1. Voir l'exercice précédent.

$$\begin{pmatrix} M_P & N_{\deg(P)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_P & N_{\deg(P)} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & M_P & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & N_{\deg P} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & M_P \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que le polynôme minimal de M_P est précisément P.
2. Soit M un matrice carrée de taille n. Démontrer qu'il existe une unique famille $((\mu_i, n_i))_{i \leq r}$ où les μ_i sont des polynômes irréductibles sur k et les $n_i \geq 1$, unique à permutation près, telle que $n = \sum n_i \deg(\mu_i)$ et que M est semblable à la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} M_{\mu_1, n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M_{\mu_r, n_r} \end{pmatrix}.$$

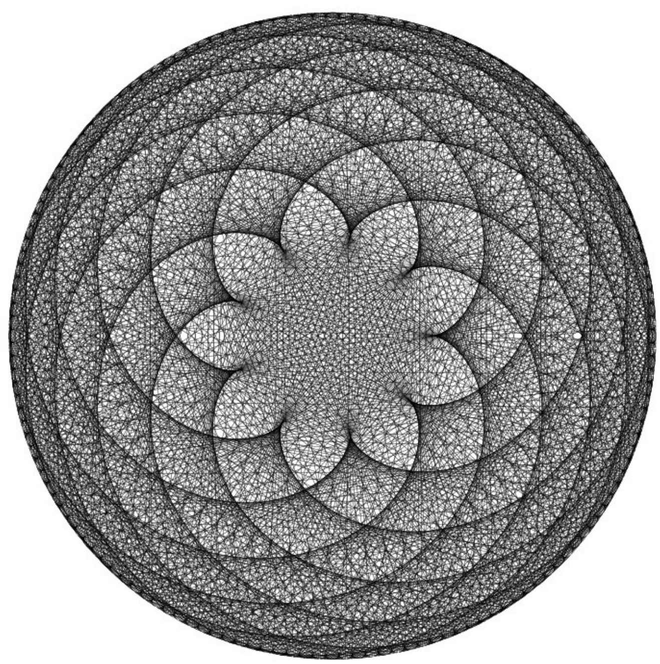

FIGURE 1 – Puissance 153^e appliquée aux racines 1511-ièmes de l'unité.