TD n°11 : Intégralité et caractères

7 et 10/01/2025

Nous traiterons les exercices dans l'ordre. Les questions les plus délicates sont marquées d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis juste après le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.

Exercice 1. Étude du groupe dihédral

Soit D_8 le groupe dihédral à 8 éléments, qu'il sera très opportun de voir comme le groupe d'isométries du carré $\mathrm{Conv}(1, i, -1, -i)$ dans cet exercice.

1. En se rappelant que l'on connaît les classes de conjugaison dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, démontrer qu'il existe cinq classes de conjugaison de D_8 et les expliciter.
2. Donner une représentation de dimension 1 évidente. Donnez-en une autre qui vient du point de vue matriciel, on l'appelle det.
3. Trouver une autre représentation de dimension 1 en considérant l'action sur les deux axes du plan, que l'on appelle ε. En déduire un quatrième caractère de dimension 1.
4. Trouver la dimension de la représentation manquante. Grâce à l'inclusion dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, la trouver explicitement. On l'appelle ρ.
5. Construire la table de caractères de D_8.

On remarque que l'on a construit par produit tensoriel le quatrième caractère de dimension 1.

6. Démontrer que

$$\rho \otimes \rho \cong 1 \oplus \det \oplus \varepsilon \oplus \det \varepsilon.$$

Exercice 2. Mieux que $\dim V \mid \#G$

Soit G un groupe fini et V une représentation irréductible (donc de dimension finie) sur $\mathbb{C}$. Nous cherchons à démontrer que $\dim V \mid [G : \mathrm{Z}(G)]$. Pour ce faire, on considère pour tout $n \geq 1$ la représentation $V^{\boxtimes n}$ de G^n.

1. Retrouver que $V^{\boxtimes n}$ est une représentation irréductible de G^n de dimension $(\dim V)^n$.
2. ● Soit $\mathrm{Z}^n(G) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathrm{Z}(G)^n \mid z_1 \dots z_n = 1\}$. Démontrer que $\mathrm{Z}^n(G) \subset \mathrm{Ker}(V^{\boxtimes n})$.
3. En déduire que

$$\forall n \geq 1, \ \ (\dim V)^n \mid \frac{\#G^n}{\#\mathrm{Z}(G)^{n-1}}.$$

En déduire que $\dim V \mid [G : \mathrm{Z}(G)]$.

Exercice 3. Théorèmes de Burnside

Cet exercice vise à démontrer deux théorèmes importants de Burnside, qui sont des théorèmes de structure des groupes finis mais dont la preuve utilise finement l'intégralité des caractères.

Nous utiliserons les résultats de l'exercice 1 TD 11 de la feuille de familiarisation, sur les entiers algébriques.

1. ● Soit G un groupe fini. Pour $g \in G$, on note $c(g)$ le cardinal de sa classe de conjugaison. Esquisser la preuve du fait suivant (Théorème de Frobenius) :

$$\forall \chi \text{ irréductible}, \quad \frac{c(g)\chi(g)}{\chi(1)}.$$

2. En déduire, dans le cas où $\gcd(\chi(1), c(g)) = 1$ que $\chi(g)/\chi(1)$ est un entier algébrique.
3. En déduire, dans le cas où $\gcd(\chi(1), c(g)) = 1$, que $\chi(g) = 0$ ou g agit comme une homothétie pour la représentation associée à χ.
4. ● Démontrer un autre résultat indépendant. Soit $k \geq 2$ et $g \in G \backslash \{1\}$. Montrer qu'il existe un caractère irréductible non trivial χ tel que $\chi(1)\chi(g)/k$ n'est pas un entier algébrique.
   <u>Indication :</u> on pourra considérer la représentation régulière.

Nous pouvons à présent passer à la démonstration du théorème de Burnside suivant :
Soit G un groupe fini possédant une classe de conjugaison d'ordre p^n avec p premier et $n \geq 1$. Alors G n'est pas simple.

5. Soit g dans ladite classe de conjugaison et χ comme à la question précédente pour $k = p$. Démontrer que $\chi(g) \neq 0$ et que $p \nmid \chi(1)$.
6. En déduire que g agit comme une homothétie pour la représentation associée à χ.
7. En déduire que $g\mathrm{Ker}(\chi)$ appartient à $\mathrm{Z}(G/\mathrm{Ker}(\chi))$.
8. Conclure.

Il en découle un corollaire sur la résolubilité de certains groupes.

9. ● Soit G un groupe fini d'ordre $p^n q^m$ où p et q sont premiers. Démontrer que G est résoluble.
   <u>Indication :</u> on pourra procéder par récurrence et séparer le cas où le centre est non trivial.

Figure 1 – Puissance 186^e appliquée aux racines 3146-ièmes de l'unité.