TD n°12 : Représentations
22/12/2023 et 9/1/2024

Nous traiterons dans l'ordre les exercices 1 sans les deux dernières questions, puis les exercices 3 et 4. Vous pouvez naviguer librement parmi les exercices restants ou parmi ceux de votre polycopié. Les exercices les plus délicats de la feuille sont marqués d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis et vendredis juste avant le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à <u>nataniel.marquis@dma.ens.fr</u>.

Exercice 1. Représentation de permutation d'une action

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal supérieur à 3. Cet exercice considère la représentation de permutation $\mathbb{C}X$.

1. Vérifier que l'on a une décomposition comme $\mathbb{C}[G]$-module
$$\mathbb{C}X = \mathbb{C}\left(\sum_{x\in X} x\right) \oplus H$$
où le premier terme est isomorphe à la représentation triviale et où
$$H = \left\{ \sum_{x\in X} \lambda_x x \;\middle|\; \sum_{x\in X} \lambda_x = 0 \right\}.$$
Vérifier également que H est engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les $(x - x')_{(x,x')\in X\times X}$.
2. Soit Y un G-ensemble fini. Démontrer que le vecteur
$$v = \sum_{y\in Y} \lambda_y y$$
appartient aux points de $\mathbb{C}Y$ fixes sous G si et seulement si la fonction $y \mapsto \lambda_y$ est G-invariante, i.e. constante sur les orbites.

Le reste de l'exercice est consacré à démontrer que H est irréductible si et seulement si l'action de G sur X est 2-transitive.

Dans un premier temps, supposons que l'action est 2-transitive.

3. Calculer pour tout $x \in X$ l'espace des invariants H^{G_x}.
4. Démontrer que H est irréductible.

<u>Indication :</u> pour une sous-représentation non nulle H', on pourra considérer un vecteur non nul $v \in H'$ et prendre x tel que la coordonnée de v sur x est non nulle. Essayez ensuite de créer un élément dans $H' \cap H^{G_x}$.

Supposons à présent que l'action n'est pas 2-transitive. Considérons l'action diagonale de G sur $X \times X$ et la représentation de permutation $\mathbb{C}(X \times X)$ associée.

5. Supposons que l'action de G sur X n'est pas 2-transitive. Trouver un sous-espace de dimension 3 du $\mathbb{C}(X \times X)$ sur lequel G agisse trivialement.

Pour parachever la preuve, il reste à démontrer que si H est irréductible, alors la dimension des points fixes de $\mathbb{C}(X \times X)$ sous l'action de G vaut 2. Nous commençons par énoncer un résultat un peu plus général sur les représentations de permutation.

6. Soit X, Y deux G-ensembles finis. Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme de $\mathbb{C}[G]$-modules
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X, \mathbb{C}Y) \to \mathbb{C}(X \times Y), \ \ T \mapsto \sum_{(x,y) \in X \times Y} t_{x,y}(x,y) \ \text{ où } T(x) = \sum_{y \in Y} t_{x,y} y.$$
7. ● Conclure.

<u>Indication :</u> on pourra se demander comme s'expriment les invariants par G du $\mathbb{C}[G]$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X, \mathbb{C}X)$.

8. ● On suppose que X est de cardinal pair. Adapter le raisonnement pour remplacer $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.
9. ● On suppose que G agit transitivement sur X. Adapter le raisonnement pour remplacer $\mathbb{C}$ par un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 2$ dans lequel $|G| \neq 0$.

Exercice 2. Dual et irréductibilité

Soit k un corps et G un groupe. Soit V un $k[G]$-module de dimension finie comme k-espace vectoriel.

1. Exhiber un isomorphisme canonique de $k[G]$-modules entre $(V^\vee)^\vee$ et V.
2. Démontrer que V est irréductible si et seulement si $V^\vee$ est irréductible.

Exercice 3. Action du centre

Soit G un groupe et V un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie.

1. Supposons V irréductible. Montrer que l'action de $\mathrm{Z}(G)$ se fait par homothéties, i.e. que pour tout $z \in Z(G)$, l'élément $z \cdot -$ de $\mathrm{GL}(V)$ est contenue dans $\mathbb{C}^\times \mathrm{Id}_V$.
2. Soit H un sous-groupe d'indice fini de G. On suppose que le $\mathbb{C}[H]$-sous-module sous-jacent à V est semi-simple. Démontrer que V est semi-simple.
3. Supposons que $Z(G)$ agit par homothéties et qu'il est d'indice fini dans G. Démontrer que V est semi-simple.

Exercice 4. Représentations d'un p-groupe sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit G un p-groupe fini. Démontrer que le seul $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[G]$-module de dimension finie et irréductible est de dimension 1 et trivial.

Exercice 5. Torsion par un automorphisme

Soit G un groupe, V un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie et $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

1. Démontrer que $(g, v) \mapsto \varphi(g) \cdot v$ définit une structure de représentation $\mathbb{C}$-linéaire de G sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel sous-jacent à V. Par la suite, nous notons V^φ cette représentation. Vérifier que la classe d'isomorphisme de $\mathbb{C}[G]$-module de V^φ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de $\mathbb{C}[G]$ de V. Ainsi, si $W \in \mathrm{Irr}(G)$ est une classe de représentations $\mathbb{C}$-linéaires irréductibles de G, la classe W^φ est correctement définie.

2. Démontrer que si φ est intérieur alors les $\mathbb{C}[G]$-modules V et V^{φ} sont isomorphes.
3. Démontrer que V est irréductible si et seulement si V^{φ} est irréductible.

Remarque : les trois questions précédentes sont correctes sans hypothèse sur le corps, nous pouvons même rajouter que V est semi-simple si et seulement si V^{φ} l'est. Si vous avez utilisé la théorie des caractères, sachez que d'autres preuves existent sur un corps quelconque. Si vous avez fait des preuves générales, je vous conseille d'essayer une rédaction éclair par les caractères.

Nous considérons à présent un groupe G et V un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie. Le groupe G vient avec une suite exacte :

$$1 \to N \to G \to Q \to 1.$$

où le groupe N est fini. Il existe en particulier un morphisme $\Phi\,;\, G \to \mathrm{Aut}(I)$ induit par la conjugaison.

4. Démontrer qu'il existe un sous-ensemble $\mathcal{I}$ de $\mathrm{Irr}(N)$ et pour tout $W \in \mathcal{I}$ un sous-$\mathbb{C}[N]$-module $V[W]$ de V tel que
$$\forall W \in \mathcal{I}, \exists n_W \geq 1,\ V[W] \cong W^{\oplus n_W} \text{ comme } \mathbb{C}[N]\text{−module},$$
$$V = \bigoplus_{W \in \mathcal{I}} V[W].$$
Le sous-ensemble $\mathcal{I}$ et les $V[W]$ sont-ils uniques ?
5. ● Montrer que $(g, W) \mapsto W^{\Phi(g)}$ fournit une action de G sur $\mathrm{Irr}(N)$, de noyau contenant N, puis que $\mathcal{I}$ est stable par G.
6. ● Nous supposons V irréductible comme $\mathbb{C}[G]$-module. Démontrer que l'action de G sur $\mathcal{I}$ est transitive.

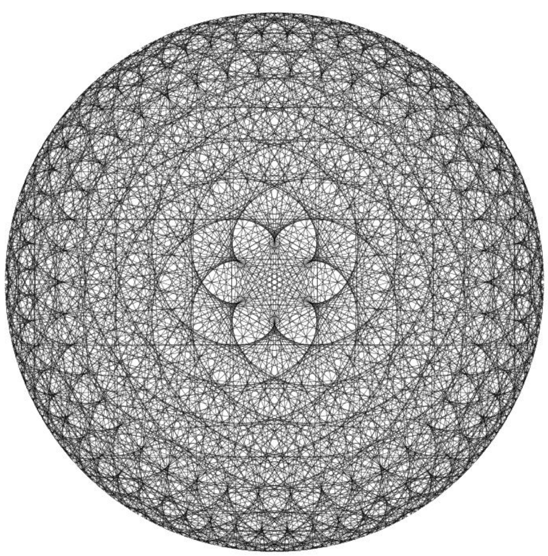

Figure 1 – Puissance 355^e appliquée aux racines 1002-ièmes de l'unité.