TD n°12 : Formes quadratiques (et révision)

14 et 17/01/2025

Nous traiterons les exercices dans l'ordre. Les questions les plus délicates sont marquées d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis juste après le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.

Exercice 1. Quelques réductions

Une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n est toujours équivalente à $b(X,Y) = x_1y_1 + \ldots + x_sy_s - x_{s+1}y_{s+1} - \ldots - x_ry_r$. On appelle r le rang et $(s, r-s)$ la signature. Donner le rang et la signature pour les forme bilinéaires associées aux formes quadratiques suivantes :

1. La forme $f((x,y,z)) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. La forme $g((x,y)) = 4xy$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. La forme $\mathrm{Tr}(A)^2$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
4. La forme $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans le cas de $\mathbb{F}_p$, pour $p \neq 2$, nous nous intéressons à la dimension 2.

5. Combien y a-t-il de carrés dans $\mathbb{F}_p$?
6. En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{F}_p^\times$, l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ a une solution.
7. ● En déduire qu'il n'y a que deux classes d'équivalence de formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur $\mathbb{F}_p^2$. À quelle classe un plan hyperbolique appartient-il ?

Exercice 2. Isométrie avec un grand espace fixe

Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit b une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un K-espace vectoriel V. Soit H un hyperplan de V et $u \in \mathrm{O}(b)$ tel que $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$.

1. Supposons que $b_{|(H\times H)}$ est non dégénérée. Démontrer que $H \oplus H^\perp = V$. Démontrer que l'on est dans exactement l'un des deux cas : u est l'identité ou u est la symétrie orthogonale par rapport à H.
2. Supposons que $b_{|(H\times H)}$ est dégénérée. En déduire que tout élément de $V\backslash H$ n'appartient pas à $H^\perp$. Démontrer que u est l'identité.

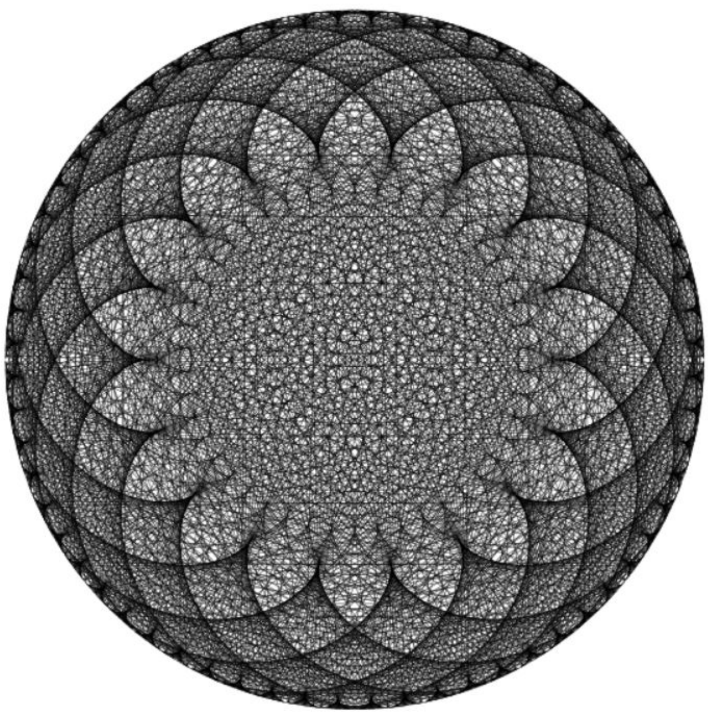

Figure 1 – Puissance 65^e appliquée aux racines 1554-ièmes de l'unité.