TD n°12 : Représentations

22/12/2023 et 9/1/2024

Exercice 1. Représentation de permutation d'une action

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal supérieur à 3. Cet exercice considère la représentation de permutation $\mathbb{C}X$.

1. Vérifier que l'on a une décomposition comme $\mathbb{C}[G]$-module

$$\mathbb{C}X = \mathbb{C}\left(\sum_{x\in X} x\right) \oplus H$$

où le premier terme est isomorphe à la représentation triviale et où

$$H = \left\{ \sum_{x\in X} \lambda_x x \,\middle|\, \sum_{x\in X} \lambda_x = 0 \right\}.$$

Vérifier également que H est engendré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les $(x - x')_{(x,x')\in X\times X}$.

2. Soit Y un G-ensemble fini. Démontrer que le vecteur

$$v = \sum_{y\in Y} \lambda_y y$$

appartient aux points de $\mathbb{C}Y$ fixes sous G si et seulement si la fonction $y \mapsto \lambda_y$ est G-invariante, i.e. constante sur les orbites.

Le reste de l'exercice est consacré à démontrer que H est irréductible si et seulement si l'action de G sur X est 2-transitive.

Dans un premier temps, supposons que l'action est 2-transitive.

3. Calculer pour tout $x \in X$ l'espace des invariants H^{G_x}.
4. Démontrer que H est irréductible.

<u>Indication :</u> pour une sous-représentation non nulle H', on pourra considérer un vecteur non nul $v \in H'$ et prendre x tel que la coordonnée de v sur x est non nulle. Essayez ensuite de créer un élément dans $H' \cap H^{G_x}$.

Supposons à présent que l'action n'est pas 2-transitive. Considérons l'action diagonale de G sur $X \times X$ et la représentation de permutation $\mathbb{C}(X \times X)$ associée.

5. Supposons que l'action de G sur X n'est pas 2-transitive. Trouver un sous-espace de dimension 3 du $\mathbb{C}(X \times X)$ sur lequel G agisse trivialement.

Pour parachever la preuve, il reste à démontrer que si H est irréductible, alors la dimension des points fixes de $\mathbb{C}(X \times X)$ sous l'action de G vaut 2. Nous commençons par énoncer un résultat un peu plus général sur les représentations de permutation.

6. Soit X, Y deux G-ensembles finis. Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme de $\mathbb{C}[G]$-modules

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X, \mathbb{C}Y) \to \mathbb{C}(X \times Y),\ \ T \mapsto \sum_{(x,y)\in X\times Y} t_{x,y}(x,y) \ \text{ où } T(x) = \sum_{y\in Y} t_{x,y} y.$$

7. Conclure.

Indication : on pourra se demander comme s'expriment les invariants par G du $\mathbb{C}[G]$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X, \mathbb{C}X)$.

8. On suppose que X est de cardinal pair. Adapter le raisonnement pour remplacer $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.
9. On suppose que G agit transitivement sur X. Adapter le raisonnement pour remplacer $\mathbb{C}$ par un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 2$ dans lequel $|G| \neq 0$.

Correction de l'exercice 1 :

1. Puisque ceci a déjà été fait dans le cours, je me contente de donner la formule de la décomposition sur la somme directe et laisse à la charge du lecteur ou de la lectrice le soin de vérifier le caractère linéaire d'une telle décomposition.

$$\mathbb{C}X \to \left(\mathbb{C}\left(\sum_{x\in X} x\right)\right) \times H,\ \sum_{x\in X} \lambda_x x \mapsto \left(\frac{\sum_{x\in X} \lambda x}{|X|}\left(\sum_{x\in X} x\right), \sum_{x\in X}\left(\lambda_x - \frac{\sum_{x'\in X} \lambda'_x}{|X|}\right) x\right).$$

De plus, si nous choisissons $x_0 \in X$, alors tout élément de H s'écrit

$$\sum_{x\in X} \lambda_x x = \sum_{x\in X} \lambda_x x - \left(\sum_{x\in X} \lambda_x\right) x_0 = \sum_{x\in X} \lambda_x (x - x_0).$$

2. Il faut écrire que

$$g\left(\sum_{y\in Y} \lambda_y y\right) = \sum_{y\in Y} \lambda_y gy = \sum_{y\in Y} \lambda_{g^{-1}y} y$$

puis identifier.

3. Soit $v = \sum_{x\in X} \lambda_x x$ dans H^{G_x}. Nous utilisons la question précédente pour le G_x-ensemble X. Par 2-transitivité de l'action de G, le G_x-ensemble possède deux orbites : $\{x\}$ et $X\backslash\{x\}$. Ceci implique que $v \in H^{G_x}$ s'écrit $v = \lambda x + \mu \sum_{x'\neq x} x'$. En ajoutant le fait que $v \in H$, on obtient que

$$\mathbb{C}\left(x + \frac{1}{|X|-1}\left(\sum_{x'\in X\backslash\{x\}} x'\right)\right).$$

4. Soit H' une sous-représentation non nulle et $v \in H'$ non nul. On pose x tel que la coordonnée de v sur x est non nulle. En regardant la moyenne

$$v' = \frac{1}{|G_x|}\sum_{g\in G_x} g\cdot v,$$

on obtient un vecteur toujours dans H', toujours de coordonnée non nulle sur x, et invariant par G_x. Autrement dit, nous avons démontré que $H^{G_x} \subset H'$ puisque la question deux démontrait que H^{G_x} était une droite.

Puisque l'action de G est transitive, nous choisissons g tel que $g\cdot x \neq x$. La différence suivante est toujours dans H' :

$$\left(x + \frac{1}{|X|-1}\left(\sum_{x'\in X\backslash\{x\}} x'\right)\right) - g\cdot\left(x + \frac{1}{|X|-1}\left(\sum_{x'\in X\backslash\{x\}} x'\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{|X|-1}\right)(x - g\cdot x).$$

Ainsi, le sous-espace H' contient l'un des $x - x'$ pour $x \neq x'$, et les contient donc tous par 2-transitivité de l'action. Nous avons démontré que $H' = H$.

5. Si l'action n'est pas 2-transitive, de manière générale, l'action de G sur $(X \times X) \backslash \{(x,x) \mid x \in X\}$ n'est pas transitive. Prenons O_1 et O_2 deux orbites. Alors, la diagonale $\{(x,x) \mid x \in X\}$, O_1 et O_2 sont trois orbites de $X \times X$ sous G. Les vecteurs associés aux fonctions caractéristiques de ces trois orbites sont fixes sous G, et engendre un espace de dimension 3 puisque les orbites sont disjointes.
6. Il est limpide que c'est une application linéaire entre espace de même dimension, autrement dit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Pour prouver qu'il est G-équivariant, calculons

$$\begin{aligned}(g\,T)x &= g\left(T(g^{-1}\,y)\right)\\ &= g\left(\sum_{y\in Y} t_{g^{-1}x,y}y\right)\\ &= \sum_{y\in Y} t_{g^{-1}x,y}gy\\ &= \sum_{y\in Y} t_{g^{-1}x,g^{-1}y}y\end{aligned}$$

Ainsi, l'image de $g\,T$ est

$$\sum_{(x,y)\in X\times Y} t_{g^{-1}x,g^{-1}y}(x,y) = \sum_{(x,y)\in X\times Y} t_{x,y}(gx,gy)$$

qui est exactement l'image de T à laquelle on aurait appliqué g.
7. En appliquant la question précédente à $X = Y$ et passons aux invariants ce qui donne

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}X)^G = (\mathbb{C}(X\times X))^G.$$

Le terme de droite correspond exactement à la dimension des vecteurs fixes. Le terme de gauche, quant à lui, vaut exactement les endomorphismes de $\mathbb{C}[G]$-modules de $\mathbb{C}X$. En effet, dire qu'un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire f est fixe signifie que

$$\forall g \in G,\ \ g\,f = g\circ f\circ g^{-1} = f$$

ce qui se reformule en post-composant par g comme

$$\forall g \in G,\ \ g\circ f = f\circ g.$$

Si H est irréductible, la représentation $\mathbb{C}X$ s'écrit en irréductibles $1 \oplus H$ avec H non isomorphe à 1 puisque $\dim H = |X| - 1 > 1$. Nous en déduisons que les endomorphismes de $\mathbb{C}[G]$-modules de $\mathbb{C}X$ sont exactement les endomorphismes par blocs valant une homothéties sur 1 et sur H, i.e. de dimension 2.
8. La seule chose à modifier par rapport au cas complexe reste de garantir un lemme de Schur pour la question 7. Il est valable sur $\mathbb{R}$ pour des représentations irréductibles de dimension impaire (nous avons toujours une valeur propre réelle pour un endomorphisme linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire).
9. Schur ne pose pas problème, ce sont plutôt les calculs des premières questions qui peuvent s'avérer impossibles dans notre corps. Pour les questions 1. et 4., considérer que p ne divise ni $|G|$, ni $|X|$ puisque l'action est transitive. Pour les questions 3. et 4., on n'a en réalité par besoin de diviser par $|X| - 1$.

Exercice 3. Action du centre

Soit G un groupe et V un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie.

1. Supposons V irréductible. Montrer que l'action de $\mathrm{Z}(G)$ se fait par homothéties, i.e. que pour tout $z \in Z(G)$, l'élément $z \cdot -$ de $\mathrm{GL}(V)$ est contenue dans $\mathbb{C}^\times \mathrm{Id}_V$.
2. Soit H un sous-groupe d'indice fini de G. On suppose que le $\mathbb{C}[H]$-sous-module sous-jacent à V est semi-simple. Démontrer que V est semi-simple.
3. Supposons que $Z(G)$ agit par homothéties et qu'il est d'indice fini dans G. Démontrer que V est semi-simple.

Correction de l'exercice 3 :

1. L'élément $z \cdot -$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[G]$-modules. En effet, c'est un endomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel et pour tout $g \in G$, l'appartenance de z au centre entraîne que
$$\forall v \in V, \;\; z \cdot (g \cdot v) = (zg) \cdot v = (gz) \cdot v = g \cdot (z \cdot v).$$
Puisque V est irréductibles, ses seuls endomorphismes comme $\mathbb{C}[G]$-module sont les homothéties.
2. Nous utilisons ici des idées similaires à celle de la démonstration du théorème de Maschke. Rappelons que ce dernier repos fondamentalement sur la création d'un projecteur qui commute à l'action de G.

   Soit W un sous-$\mathbb{C}[G]$-module de V. Il faut démontrer que W possède un sous-$\mathbb{C}[G]$-module supplémentaire. En utilisant la semi-simplicité du $\mathbb{C}[H]$-module sous-jacent à V, on trouve un sous-$\mathbb{C}[H]$-module supplémentaire et la projection sur W parallèlement à ce supplémentaire fournit un projecteur sur W qui commute à l'action de H, que nous notons π. Puisque π commute à l'action de H, nous avons pour tout $h \in H$ que $h \circ \pi \circ h^{-1} = \pi$, et donc que $g \circ \pi \circ g^{-1}$ ne dépend que de gH. Il est alors correct de définir
$$\pi_G = \frac{1}{[G:H]} \sum_{gH \in G/H} g \circ \pi \circ g^{-1}.$$
La même démonstration que Maschke démontre alors que π_G est un projecteur sur W. Enfin, pour tout $k \in G$, nous avons
$$\begin{aligned}\pi_G \circ k &= \frac{1}{[G:H]} \sum_{gH \in G/H} g \circ \pi \circ (g^{-1}k) \\ &= \frac{1}{[G:H]} \sum_{gH \in G/H} k \circ (k^{-1}g) \circ \pi \circ (k^{-1}g)^{-1} \\ &= k \circ \left(\frac{1}{[G:H]} \sum_{gH \in G/H} (k^{-1}g) \circ \pi \circ (k^{-1}g)^{-1} \right) \\ &= k \circ \pi_G\end{aligned}$$
puisque $gH \mapsto k^{-1}gH$ est une bijection correctement définie des classes à gauche.
3. Si le centre agit par homothéties, n'importe quel sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de V est un sous-$\mathbb{C}[\mathrm{Z}(G)]$-module de V. Ceci entraîne que V est semi-simple comme représentation de $\mathrm{Z}(G)$, puis comme représentation de G en utilisant la question précédente.

Exercice 4. Représentations d'un p-groupe sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit G un p-groupe fini. Démontrer que le seul $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[G]$-module de dimension finie et irréductible est de dimension 1 et trivial.

Correction de l'exercice 4 :

Soit V un tel module, de dimension d. Le groupe G agit sur $V \setminus \{0\}$, qui est de cardinal $p^d - 1$. On rappelle que pour un p-groupe G et un G-ensemble X, nous avons

$$|X| \equiv |X^G| \mod p.$$

Ici, cela implique qu'un vecteur non nul de V est fixe par G, autrement dit que V possède une droite fixe. L'irréductibilité de V la force à coïncider avec cette droite fixe.