TD n°13 : Caractères

12-13/1/2023

Nous traiterons les exercices dans l'ordre. Vous pouvez naviguer librement parmi les exercices restants ou parmi ceux de votre polycopié. Les exercices les plus délicats de la feuille sont marqués d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (J'y serai à coups sûrs le jeudi de 14h à 15h 30 et vous avez des chances de m'y trouver les mercredis, jeudi et vendredis. N'hésitez pas !).

Exercice 1. Quelques tables de caractères

Déterminer la table de caractères des groupes finies suivants. On essaiera dans chaque cas de donner une représentation irréductible qui a ce caractère, soit directement par le morphisme vers $\mathrm{GL}(V)$ sous-jacent, soit en la réalisant concrètement.

1. Pour un entier $n \geq 2$, le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Le groupe dihédral D_8.
3. Pour un premier p, le sous-groupes des bijections de $\mathbb{F}_p$ formé des transformations affines donné par

$$\mathrm{Aff}_p = \left\{ x \mapsto ax + b \,|\, a \in \mathbb{F}_p^\times,\, b \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

Exercice 2. Représentations de permutation d'un action (édition caractères)

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X de cardinal supérieur à 2. Cet exercice considère la représentation de permutation $\mathbb{C}X$. Nous notons également χ_X le caractère associé. On rappelle qu'il existe une décomposition comme $\mathbb{C}[G]$-module

$$\mathbb{C}X = \mathbb{C}\left(\sum_{x\in X} x\right) \oplus H$$

où le premier terme est isomorphe à la représentation triviale et où

$$H = \left\{ \sum_{x\in X} \lambda_x x \,\middle|\, \sum_{x\in X} \lambda_x = 0 \right\}.$$

1. Soit Y un G-ensemble fini. Démontrer que le nombre d'orbites est égal à $\langle \chi_Y, 1\rangle$. Nous pourrons réutiliser la question 4 de l'exercice correspondant au dernier TD.
2. En déduire que l'action de G sur X est 2-transitive si et seulement si $\langle \chi_{(X\times X)}, 1\rangle = 2$.
3. Démontrer que χ_X est réel, puis que $\chi_{(X\times X)} = \chi_X^2$.
4. Conclure que $\langle \chi_{(X\times X)}, 1\rangle = 2$ si et seulement si $\mathbb{C}X$ est somme de deux représentations irréductibles non isomorphes, i.e. si et seulement si H est irréductible non triviale.

Exercice 3. Représentation de conjugaison

Soit G un groupe fini.

1. On fait agit G sur G par conjugaison et on note V la représentation de permutation associée. Déterminer χ_V.
2. En déduire que la somme de chaque ligne de la table des caractères de G est un entier naturel.

Exercice 4. Asymptotique de l'apparition des représentations

Soit G un groupe fini. Pour tout $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie V, nous notons Z_V l'ensemble des éléments de G qui agissent sur V par homothéties et ω_V le caractère

$$\omega_V \,:\, Z_V \to \mathbb{C}^\times$$

tel que $\forall z \in Z_V \;\; \rho_V(z) = \omega_V(z)\mathrm{Id}_V$.

1. Soit U, V deux $\mathbb{C}[G]$-modules de dimension finie. Démontrer que la série entière

$$f = \sum_{n\geq 0} \frac{\langle \chi_U, \chi_V^n \rangle}{\dim U (\dim V)^n} x^n$$

a un rayon de convergence supérieur à 1, puis que

$$f = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \frac{\chi_U(g)/\dim U}{1 - \left(\overline{\chi_V(g)}/\dim V\right) x}.$$

2. Supposons que U est irréductible. Démontrer que $\langle \chi_U,\, \chi_V \rangle = 0$ si Z_V n'agit pas sur U comme $\omega_V \mathrm{Id}_U$.
3. Supposons dès à présent que U est irréductible et que V est fidèle.
   i) Montrer que Z_V agit sur U par homothéties. On note ω_U le caractère associé.
   ii) Démontrer que f a un pôle simple en 1.
   iii) ● Notons $\mathcal{E} = \{n \geq 0 \,|\, \omega_V^n = \omega_U\}$. Démontrer que

$$\langle \chi_U,\, \chi_V^n \rangle = 0 \text{ sur le complémentaire de } \mathcal{E}$$

$$\langle \chi_U,\, \chi_V^n \rangle \sim (\dim V)^n \frac{|Z_V| \dim U}{|G|}.$$

4. ● Interpréter.

Exercice 5. Induites

Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe de G et soit V un $\mathbb{C}[H]$-module de dimension finie. On pose

$$\mathrm{Ind}_H^G(V) = \{f \,:\, G \to V \,|\, \forall x \in G,\, \forall h \in H,\; f(hx) = h \cdot_V f(x)\}$$

avec action de G donnée par $g \cdot f \,:\, x \mapsto f(xg)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ est une représentation de G. Quelle est sa dimension ?
2. On note $\mathbf{1}$ la représentation triviale du sous-groupe $\{e\}$ de G. Déterminer la représentation $\mathrm{Ind}_{\{e\}}^G(\mathbf{1})$.
3. Démontrer que si V n'est pas irréductibles, alors $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ non plus.

4. (Réciprocité de Frobenius) Soit W un $\mathbb{C}[G]$-module de dimension finie. Montrer :
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}\left(W, \mathrm{Ind}_H^G(V)\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}\left(W_{|H}, V\right).$$
5. En déduire que, si V et W sont irréductibles, la multiplicité de W dans $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ est égale à la multiplicité de V dans $W_{|H}$.
6. Déterminer le caractère de $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ en fonction de celui de V et retrouver la question précédente.

Exercice 6. Autour de la restriction

Nous voulons à présent utiliser les induites pour démontrer un résultat sur la restriction de représentations. Les questions suivantes introduisent des outils pour traiter la dernière question de l'exercice. On fixe dans les questions qui suivent un sous-groupe distingué H d'un groupe fini G.

1. Faire l'exercice 5 du TD n°12.
2. Démontrer que la condition "pour toute représentation irréductible π de G, la représentation $\pi_{|H}$ est isotypique" est équivalente au fait que l'action de G sur les classes de conjugaison de H est triviale.
3. On suppose dans cette question que pour toute représentation irréductible π de G, la représentation $\pi_{|H}$ est irréductible. Démontrer que $\mathrm{Irr}(G) \to \mathrm{Irr}(H)$ est surjective.
4. Toujours sous les hypothèses de la question précédente, démontrer que H contient le groupe dérivé de G.
   Indication : on pourra commencer par démontrer qu'un sous-groupe distingué de G est une intersection de noyau de représentation irréductibles de G, puis que ces représentations sont des caractères.

FIGURE 1 – Puissance 355^e appliquée aux racines 1002-ièmes de l'unité.