Correction du TD n°1 : relations

Exercice 1. Description de quotients

Dans chacun des cas suivants, déterminer *(plus ou moins succinctement selon le cas)* quant la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble X est une relation d'équivalence et donner une description élégante du quotient *(au sens où l'on peut donner une description plus agréable des classes)* le cas échéant.

1. Pour un ensemble X et la relation d'égalité $=$.
2. Pour un ensemble X et la relation totale $\mathcal{R} = X \times X$.
3. Pour une application $f : X \to W$ et la relation définie sur X par
$$\mathcal{R}_f = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}.$$
4. Pour une application injective $f : Y \hookrightarrow X$ et une relation d'équivalence $\mathcal{S}$ sur Y et la relation définie par
$$x \mathcal{R} x' \Leftrightarrow \exists (y, y') \in \mathcal{S},\ f(y) = x,\ f(y') = x'.$$
Il sera possible d'utiliser le quotient ${}^{Y}/_{\mathcal{S}}$ dans la description.
5. Pour $X = \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ et la relation
$$n \mathcal{R} m \Leftrightarrow \frac{\ln(n)}{\ln(m)} \in \mathbb{Q},$$
puis donner un système de représentants.

Correction de l'exercice 1

1. C'est une relation d'équivalence. Chaque élément étant en relation exactement avec lui-même, nous pouvons décrire
$${}^{X}/_{=} = \{\{x\} \mid x \in X\}$$
et la projection canonique s'écrit
$$\pi : X \to {}^{X}/_{=}, \quad x \mapsto \{x\}.$$
Cette description par singleton peut paraître un peu lourde, mais la définition du cours, qui présente de nombreux avantages, nous y contraint. L'exercice 7 discute d'une manière d'identifier cet ensemble à X, de manière adéquate avec les structures en jeu.
2. C'est une relation d'équivalence. Chaque élément est en relation avec tous les autres. Nous pouvons décrire
$${}^{X}/_{\mathcal{R}} = \{X\}$$
et la projection canonique est la seule application possible vers un singleton, envoyant tout élément x sur X.
3. La relation $\mathcal{R}_f$ est toujours d'équivalence. Deux éléments sont en relation si et seulement si leurs images sont identiques, i.e. s'ils appartiennent à la même fibre. Les classes d'équivalences sont ainsi certaines fibres, celles au-dessus d'éléments de l'image. Nous pouvons décrire
$${}^{X}/_{\mathcal{R}_f} = \left\{f^{-1}(\{w\}) \mid w \in \mathrm{Im}(f)\right\}$$
et la projection canonique s'écrit
$$\pi : X \to {}^{X}/_{\mathcal{R}_f}, \quad x \mapsto f^{-1}(\{f(x)\}).$$

4. La relation $\mathcal{R}$ est réflexive grâce à la condition $x = x'$ dans sa définition. La relation se reformule
$$x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow \exists y,\ x, x' \in f([y]).$$
Dès lors que $x, x' \in f([y])$ et $x', x'' \in f([y'])$ nous avons $x' \in f([y]) \cap f([y'])$. Puisque f est injective, nous en déduisons que $[y] \cap [y'] \neq \emptyset$. Les classes de $\mathcal{S}$ formant une partition de Y, nous en déduisons que $[y] = [y']$ et donc que $x\mathcal{R}x''$. La relation $\mathcal{R}$ est donc d'équivalence et se reformule
$$x\mathcal{R}x' \Leftrightarrow f^{-1}(x)\mathcal{S}f^{-1}(x')$$
et permet de décrire
$$X/\mathcal{R} = \{f([y]) \mid [y] \in Y/\mathcal{S}\} \cup \{\{x\} \mid x \notin \mathrm{Im}(f)\}\}$$
et la projection canonique comme
$$\pi : X \to Y/\mathcal{S} \cup (X\backslash \mathrm{Im}(f)),\ \ x \mapsto [f^{-1}(x)] \text{ si } x \in \mathrm{Im}(f) \text{ et } x \text{ sinon.}$$
Trouver une condition sans l'hypothèse d'injectivité paraît un peu idéaliste. En considérant par exemple l'application
$$f : \bigsqcup_{(x,x') \in X \times X} \{0_{x,x'}, 1_{x,x'}\} \to X,\quad 0_{x,x'} \mapsto x,\ 1_{x,x'} \mapsto x'$$
la relation obtenue est effectivement d'équivalence mais il suffit d'ôter l'un des termes de l'union disjointe pour qu'elle ne le soit plus.

5. Il était important d'ôter 0 pour bien définir la relation et 1 pour garantir qu'elle soit d'équivalence. Reformulons notre relation :
$$\begin{aligned} n\mathcal{R}m &\Leftrightarrow \frac{\ln(n)}{\ln(m)} = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \mathrm{pgcd}(a, b) = 1 \\ &\Leftrightarrow n^b = m^a \\ &\Leftrightarrow \exists k,\ \ n = k^a,\ m = k^b \end{aligned}$$
où la dernière ligne est obtenu en considérant les valuations [1]. En appelant $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers supérieurs à 2 qui ne sont puissance entière d'aucun autre entier, le quotient peut se décrire
$$X/\mathcal{R} = \big\{\{k^r \mid r \geq 1\} \ \big|\ k \in \mathcal{P}\big\}.$$
Nous voyons qu'un entier est puissance b-ième d'un autre si et seulement si b divise toutes ses valuations p-adiques. Par conséquent, nous pourrions même décrire les éléments de $\mathcal{P}$ comme les entiers k pour lesquels $\mathrm{pgcd}\big((\mathrm{v}_p(n))_{p\in\mathbb{P}}\big) = 1$. Par exemple 2, 3, $6 = 2 \times 3$ et $72 = 2^3 \times 3^2$ fournissent des éléments de $\mathcal{P}$.

Exercice 2. Restriction et extension

1. Soit X un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Soit $Y \subseteq X$ un sous-ensemble. Démontrer que $\mathcal{R} \cap (Y \times Y)$ est une relation d'équivalence sur Y. Décrire ses classes en fonction de celles de $\mathcal{R}$.
2. Toute relation d'équivalence sur Y peut-elle être obtenue ainsi ?
3. Soient A et B deux ensembles munis d'une relation d'équivalence chacun $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$. Démontrer que la relation [2] $\mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_B$ est une relation d'équivalence sur $A \sqcup B$. Décrire ses classes en fonction de celles de $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$.
4. Toute relation d'équivalence sur $A \sqcup B$ peut-elle être obtenue ainsi ?

1. Les valuations p-adiques de n^b sont divisibles par b. Ainsi, les valuations de m^a le sont aussi et puisque $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, on en déduit que les valuations de m aussi. Nous en déduisons que m possède une racine b-ième que l'on appelle k. Il reste à vérifier l'autre identité.
2. Nous sous-entendons les inclusions $A \times A \subset (A \sqcup B) \times (A \sqcup B)$ et son analogue pour B.

Correction de l'exercice 2

Nous rédigeons cet exercice en utilisant la correspondance entre relations d'équivalence et partitions qui à une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble X associe la partition formée des classes d'équivalences.

1. Puisque toutes les propriétés d'une relation d'équivalence utilisent des quantifications $\forall$, il en découle que $\mathcal{R} \cap (Y \times Y)$ vérifie encore les mêmes propriétés.

   Nous pouvons toutefois rédiger un peu différemment en utilisant la correspondance, ce qui nous fournira automatiquement les classes. La partition $P_{\mathcal{R}} = (X_i)_{i \in I}$ de X associée à $\mathcal{R}$ fournit une partition $P' = (X_i \cap Y)_{i \in J}$ de Y où $J = \{i \in I \,|\, X_i \cap Y \neq \emptyset\}$. Nous pouvons voir qu'il s'agit d'une partition en écrivant
$$Y = X \cap Y = \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) \cap Y = \bigsqcup_{i \in I} X_i \cap Y.$$
   Il nous reste simplement à vérifier que la relation d'équivalence sur Y fournie par P' correspond à $\mathcal{R} \cap (Y \times Y)$. La relation donnée par P' s'écrit
$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in J} (X_i \cap Y) \times (X_i \cap Y) &= \bigcup_{i \in J} (X_i \times X_i) \cap (Y \times Y) \\ &= \bigcup_{i \in I} (X_i \times X_i) \cap (Y \times Y) \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} X_i \times X_i \right) \cap (Y \times Y) \\ &= \mathcal{R} \cap (Y \times Y) \end{aligned}$$
   Nous pouvons résumer cette démonstration comme suit : il nous a suffit de vérifier pas à pas que la composée
$$\{\text{relations d'équivalence sur } X\} \cong \{\text{partitions de } X\} \xrightarrow[\cdot \cap Y]{} \{\text{partitions de } Y\} \cong \{\text{relations d'équivalence sur } Y\}$$
   envoyait $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R} \cap (Y \times Y)$.

   Je reconnais que cette démonstration paraît lourde. Elle permet toutefois de résoudre de manière expéditive la question suivante. Et elle me permet surtout d'illustrer que l'on peut (et doit souvent) circuler entre les différentes visions d'un même objet pour trouver la preuve la plus simple et, plus important, qui nous convient le mieux. Vous serez peut-être plus convaincu·e·s lorsque j'aurais rédigé ainsi la troisième question.
2. Cette question se clarifie si l'on adopte le point de vue des partitions. Toute partition $P = (Y_j)_{j \in J}$ de Y s'obtient à partir de la concaténation de P et de l'élément $X \backslash Y$.
3. Comme pour la première question, deux rédactions sont possibles. La première, que je ne détaille par consiste à démontrer les propriétés de relation d'équivalence sur $\mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_B$. Il faut, pour chacune des trois, remarquer que la formule est la conjonction des deux formules pour les éléments (resp. les couples d'éléments pour la symétrie et la transitivité) de A et de B.

   Disons que $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_j)_{j \in J}$ sont les deux partitions associées à $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{R}_B$. Nous définissons la partitions P de $A \sqcup B$ comme la concaténation de ces deux partitions. Reste à vérifier que la relation d'équivalence associée à P est bien $\mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_B$. Cette relation est donnée par :
$$\begin{aligned} \bigcup_{k \in I \sqcup J} C_k \times C_k &= \left(\bigcup_{i \in I} A_i \times A_i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j \times B_j \right) \\ &= \mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_B. \end{aligned}$$
4. Ceci se voit à nouveau aisément avec les partitions. Dès que A et B sont non vides, la partition formée d'une seule classe ne peut être obtenue comme union de partitions de A et de B.

Exercice 3. Relation d'équivalence engendrée

Soit X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur X.

1. Montrer qu'il existe une relation d'équivalence $\widetilde{\mathcal{R}}$ contenant $\mathcal{R}$ et minimum pour ces deux propriétés lorsque l'on munit $\mathcal{P}(X \times X)$ de l'inclusion.
2. Donner une description explicite de $\widetilde{\mathcal{R}}$.
3. Décrire ${}^{\mathbb{Z}}/_{\widetilde{\mathcal{R}}}$ lorsque
$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{P},\ \ n = pm.$$
4. Décrire ${}^{X}/_{\widetilde{\mathcal{R}}}$ dans le cadre général de la question 4 de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 3

1. Considérons E l'ensemble des relations d'équivalence contenant $\mathcal{R}$. L'ensemble E est non vide puisqu'il contient la relation totale. Une intersection quelconque de relations d'équivalences étant d'équivalences, la relation
$$\widetilde{\mathcal{R}} = \bigcap_{\mathcal{S} \in E} \mathcal{S}$$
est une relation d'équivalence contenant $\mathcal{R}$ (autrement dit, elle appartient à E). C'est donc l'élément minimum de E.
2. Moralement, nous allons établir une définition qui force la réflexivité, la symétrie et la transitivité. Posons $\mathcal{R}'$ la relation définie par
$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow \exists n \geq 1,\ \exists x_1 = x, x_1, \ldots, x_n = y,\ \forall i < n,\ \ x_i\mathcal{R}x_{i+1} \text{ ou } x_{i+1}\mathcal{R}x_i.$$
La réflexivité de $\mathcal{R}'$ provient du cas $n = 1$. Pour la symétrie et la transivité, il faut de "retourner" ou "concaténer" les suites d'éléments.

   D'un autre côté, supposons que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence contenant $\mathcal{R}$ et que $x\mathcal{R}'y$, avec $(x_1, \ldots, x_n)$ qui le souligne. La symétrie de $\mathcal{S}$ donne que $x_i\mathcal{S}x_{i+1}$ pour chaque $i < n$. Nous en déduisons ensuite que $x = x_1\mathcal{S}x_n = y$ par transitivité. Ainsi, la relation $\mathcal{R}'$ est bien minimum.
3. Tout entier positif est produit de nombres premiers. Nous en déduisons que tout entier $n \geq 1$ vérifie que $n\widetilde{\mathcal{R}}1$. Par transitivité, tous les entiers $n \geq 1$ sont en relation. Nous démontrons que la même manière, que tous les entiers $n \leq -1$ sont en relation. La relation $\mathcal{R}$ préservant le signe, et l'éventuelle nullité, nous en déduisons que
$${}^{\mathbb{Z}}/_{\widetilde{\mathcal{R}}} = \{\mathbb{Z}_{<0}, \{0\}, \mathbb{Z}_{>0}\}\,.$$

Exercice 4. Construction de $\mathbb{R}$

Considérons $\mathbb{Q}$ construit, avec son addition et son ordre. Posons $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties non vides et bornées supérieurement de $\mathbb{Q}$, ce qui peut se définir en utilisant uniquement $\mathbb{Q}$. Définissons $\mathcal{S}$ la relation définie sur $\mathbb{E}$ par
$$X\mathcal{S}Y \Leftrightarrow \big(\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, \exists y \in Y,\ \ x - \varepsilon \leq y\big) \text{ et } \big(\forall y \in Y, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, \exists x \in X,\ \ y - \varepsilon \leq x\big).$$

1. Démontrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

Pour les questions suivantes, et pour vous donner une intuition, vous pouvez associer mentalement à la classe $[X]$ le réel $\sup X$. Comme nous construisons les réels, cela n'est pour l'instant qu'une intuition.

2. Démontrer que la valeur de vérité de la formule
$$\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, \exists y \in Y,\ \ x - \varepsilon \leq y$$
ne dépend que de la classe de X et de Y, puis que la relation
$$[X] \leq [Y] \Leftrightarrow \big(\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, \exists y \in Y,\ \ x - \varepsilon \leq y\big)$$
définit effectivement une relation d'ordre sur ${}^{\mathcal{E}}/_{\mathcal{S}}$.

3. Démontrer la propriété de la borne supérieur sur ${}^{\mathcal{E}}/_{\mathcal{S}}$: toute partie bornée admet une borne supérieure.
4. Démontrer fastidieusement que l'addition définie sur $\mathcal{E}$ par
$$X + Y = \{x + y \,|\, (x, y) \in X \times Y\}$$
est correctement définie, fournit une structure de monoïde sur $\mathcal{E}$, puis démontrer que l'élément $[X+Y]$ ne dépend que de $[X]$ et $[Y]$ et que la loi déduite sur ${}^{\mathcal{E}}/_{\mathcal{S}}$ fournit une structure de groupe.

Une autre construction comme quotient des suites de Cauchy sur $\mathbb{Q}$ par les suites tendant vers 0, permettrait d'obtenir plus aisément cette loi, grâce à la théorie des groupes quotients.

Correction de l'exercice 4

1. Sans difficulté, pourvu que vous ayez un jeu de quatificateurs solide.
2. Il suffit de démontrer que si la formule est vérifiée pour le couple (X, Y), elle est vérifiée pour (X', Y') quels que soient $X' \in [X]$ et $Y' \in [Y]$. Soit $x' \in X'$ et $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$. Puisque $X'\mathcal{S}X$, il existe $x \in X$ tel que $x' - \varepsilon \leq x$. La véracité de la formule pour le couple (X, Y), il existe un $y \in Y$ tel que $x - \varepsilon \leq y$. Enfin, puisque $Y\mathcal{S}Y'$, il existe $y' \in Y'$ tel que $y - \varepsilon \leq y'$. En combinant les trois inégalités, nous obtenons
$$x' - 3\varepsilon \leq y'.$$
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$, nous concluons.

   Démontrons qu'il s'agit d'une relation d'ordre. La réflexivité est évidente (prendre $y = x$ dans la formule). La transitivité était déjà nécessaire pour démontrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence. Enfin, l'antisymétrie vient naturellement en considérant que la formule correspondant à ($[X] \leq [Y]$ et $[Y] \leq [X]$) correspond exactement à la formule $X\mathcal{S}Y$, donc à $[X] = [Y]$.
3. Prenons $([X_i])_{i\in I}$ une famille bornée de ${}^{\mathcal{E}}/_{\mathcal{S}}$. Nous allons démontrer que $[\cup X_i]$ fournit effectiviement une borne supérieure à la famille. Il faut d'abord s'assurer que $\cup X_i$ est effectivement bornée dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 5. Congruence de Touchard

Pour tout entier naturel n, nous définissons le nombre de Bell B_n comme le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.

1. Calculer B_n pour $n \leq 3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier. En considérant l'application induite sur les partitions par la bijection de $[\![1, n + p]\!]$ donnée par l'identité sur $[\![1, n]\!]$ et par permutation circulaire de $[\![n + 1, n + p]\!]$, démonter la congruence
$$B_{n+p} \equiv B_n + B_{n+1} \mod p.$$
3. Démontrer que la congruence $|X| \equiv |\mathrm{Fix}(X)| \mod p$ tient également pour une application f d'un ensemble fini X vers lui-même qui vérifie $f^{\circ p^m} = \mathrm{Id}_X$ pour un certain entier $m \geq 1$.
4. Démontrer plus généralement que pour tout entier $m \geq 1$, nous avons
$$B_{n+p^m} \equiv mB_n + B_{n+1} \mod p.$$

Indications pour l'exercice 5

1. Calculez. Les réponses sont $B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5$.
2. En identifiant $[\![n + 1, n + p]\!]$ à ${}^{\mathbb{Z}}/_{p\mathbb{Z}}$ les calculs sont plus aisés. Appelons f l'application de décalage. Pour toute partition $P = \{I_j \,|\, j \in J\}$, démontrer que $f^{\circ k}(I_j) \cap I_j \neq \emptyset \implies f^{\circ k}(I_j) = I_j$. Distinguer selon si la partie I_0 contenant l'élément nul de ${}^{\mathbb{Z}}/_{p\mathbb{Z}}$ intersecte $[\![1, n]\!]$ ou non. Dans le cas contraire, on pourra utiliser Bézout pour démontrer que $I_0 \in \{\{0\}, {}^{\mathbb{Z}}/_{p\mathbb{Z}}$.

3. Quelles valeurs les cardinaux des orbites peuvent-ils prendre ?
4. Effectuez un raisonnement similaire au cas précédent. Il peut être agréable d'utiliser un peu de structure des groupes monogènes et de montrer dans le cas où I_0 n'intersecte pas $[\![1,n]\!]$ qu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$.

Exercice 6. Retour sur la propriété universelle du quotient, premier épisode

La propriété universelle d'un ensemble quotient a été démontrée dans votre cours (Proposition 2.1 de la version actuelle). Elle y est énoncée d'une manière qui vous permettra au mieux de la manipuler, mais dissimule une partie théorique importante, que vous croiserez de nouveau en abordant les groupes produits, les groupes quotients, etc. Les deux exercices qui suivent ont pour but de souligner la philosophie qui sous-tend la construction de l'ensemble quotient. Ce premier exercice étoffe le concept de propriété universel et habitue à la manipulation de l'ensemble quotient via sa propriété universelle. Le suivant s'attaque à une vision davantage catégorique de l'ensemble quotient.

Soit X un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. Nous appelons $\pi_{\mathcal{R}}$ la projection de X sur $X/\mathcal{R}$. Pour toute paire d'ensemble (Y,Z), nous définissons $\mathcal{F}(Y,Z)$ l'ensemble des fonctions de Y dans Z. Pour tout ensemble Y, nous définissons $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X,Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y constantes sur chaque classe d'équivalence. On remarquera que $\pi_{\mathcal{R}}$ appartient à $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X, X/\mathrm{R})$.

1. Soit Y un ensemble. Montrer que l'application

$$\begin{aligned}\pi_Y : \mathcal{F}\big(X/\mathcal{R}, Y\big) &\longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X,Y)\\ f &\mapsto f\circ\pi_{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

   est bien définie et fournit une bijection.
2. Vérifier que pour tout application $f : Y \to Z$, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}\big(X/\mathcal{R},Y\big) & \xrightarrow{\pi_Y} & \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X,Y)\\ \big\downarrow{\scriptstyle f\circ\cdot} & & \big\downarrow{\scriptstyle f\circ\cdot}\\ \mathcal{F}\big(X/\mathcal{R},Z\big) & \xrightarrow{\pi_Z} & \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(X,Z)\end{array}$$

   au sens où pour toute application $g\in\mathcal{F}(X/\mathcal{R},Y)$, nous avons l'égalité $f\circ\pi_Y(g)=\pi_Z(f\circ g)$. On dira alors que les applications π_Y sont *naturelles* en Y.
3. Soit $\mathcal{S}$ une relation d'équivalence sur X telle que $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{S}$. Montrer que la relation $\mathcal{S}/\mathcal{R}$ définie sur $X/\mathcal{R}$ par

$$[x_1]_{\mathcal{R}}\, \mathcal{S}/\mathcal{R}\, [x_2]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow x_1\mathcal{S}x_2$$

   est définie de manière non ambiguë et fournit une relation d'équivalence. Construire en utilisant les propriétés universelles des quotients une bijection

$$X/\mathcal{S}\cong (X/\mathcal{R})/(\mathcal{S}/\mathcal{R}).$$

Correction de l'exercice 6

Nous laissons de côté la correction des deux premières questions, qui reviennent à écrire des détails présents dans le cours, ou purement calculatoires. En revanche, nous rédigeons la troisième question avec soin, pour illustrer comment utiliser de manière efficace la propriété universelle du quotient.

1. Je profite de cette correction pour exprimer sous forme d'un diagramme cette propriété. L'inverse de π_Y exprime que pour toute application $\tilde f$ qui est $\mathcal{R}$-invariante, le diagramme suivant se complète par une unique foncion f qui le rend commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{R}}"'] & Y \\
X/\mathcal{R} \arrow[ur, dotted, "\exists! f"'] &
\end{tikzcd}$$

3. Puisque $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, l'application $\pi_{\mathcal{S}} : X \to X/\mathcal{S}$ est constante sur les classes de $\mathcal{R}$ ce qui permet par *propriété universelle du quotient* de la factoriser en

$$\pi_{1,1} : X/\mathcal{R} \to X/\mathcal{S}, \ \ [x]_{\mathcal{R}} \mapsto [x]_{\mathcal{S}}.$$

Il faut bien comprendre ici que la propriété universelle du quotient nous donne *automatiquement* que l'application ainsi définie est correctement définie. Par définition de la relation $\mathcal{S}/\mathcal{R}$, cette application est constante sur les classes $\mathcal{S}/\mathcal{R}$. La propriété universelle du quotient permet donc de factoriser l'application $\pi_{1,1}$ en

$$\pi_1 : \to X/\mathcal{S}, \ \ [[x]_{\mathcal{R}}]_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \mapsto [x]_{\mathcal{S}}.$$

Nous pourrions résumer cette construction par le diagramme suivant où les triangles commutent :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_{\mathcal{S}}"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{R}}"] & X/\mathcal{S} \\
X/\mathcal{R} \arrow[ur, dotted, "\pi_{1,1}"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}"] & \\
(X/\mathcal{R})/(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \arrow[uur, dotted, "\pi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Toujours par définition de la relation quotient, la composée

$$\pi_{2,1} : X \to (X/\mathcal{R})/(\mathcal{S}/\mathcal{R})$$

donnée par $\pi_{2,1} = \pi_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \circ \pi_{\mathcal{R}}$ est constante sur les classes de $\mathcal{S}$. La propriété universelle du quotient fournit automatiquement la bonne définition de l'application

$$\pi_2 : X/\mathcal{S} \to (X/\mathcal{R})/(\mathcal{S}/\mathcal{R}), \ \ [x]_{\mathcal{S}} \mapsto [[x]_{\mathcal{R}}]_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}.$$

Les deux applications construites sont évidemment inverses l'une de l'autre.

À nouveau ceci se résume par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_{\mathcal{R}}"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{S}}"] & X/\mathcal{R} \arrow[r, "\pi_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}"] & (X/\mathcal{R})/(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \\
X/\mathcal{S} \arrow[urr, dotted, "\pi_2"] & &
\end{tikzcd}$$

Exercice 9. Cardinaux comparables

Soient X et Y deux ensembles. Montrer qu'il existe une injection de X dans Y ou une injection de Y dans X. On pourra considérer l'ensemble des couples (I, f) où $I \subseteq X$ et $f : I \to Y$ est un injection, muni d'une relation d'ordre adéquate.

Correction de l'exercice 9

Nous posons le bon ensemble sur lequel appliquer le lemme de Zorn, comme suggéré. Définissons donc

$$\mathcal{E} = \{(I, f) \,|\, I \subseteq X, \ f : I \hookrightarrow Y\}$$

que nous munissons de l'ordre (le vérifier) défini par

$$(I, f) \leq (J, g) \text{ ssi } I \subseteq J \text{ et } g \text{ étend } f.$$

Prenons $\{(I_j, f_j) \,|\, j \in J\}$ une chaîne de $\mathcal{E}$, l'application

$$f \,:\, \bigcup_{j \in J} I_j \to Y, \;\; x \mapsto f_k(x) \text{ si } x \in I_k$$

est bien définie puisque c'est une chaîne. De plus, comme deux éléments de $\cup I_j$ appartiennent à un même I_k, l'injectivité est préservée. Nous avons créé un majorant de la chaîne.

En appliquant le lemme de Zorn, il existe donc un élément maximal (I, f) dans $\mathcal{E}$. Si $I = X$, nous avons créé une injection de X dans Y. Dans le cas contraire, l'image de f doit être Y, sans quoi nous pourrions étendre f en envoyant n'importe quel élément de $X \backslash I$ sur n'importe quel élément de $Y \backslash f(I)$. L'application f est alors une bijection, et son inverse, composée avec l'inclusion de I dans X, fournit une injection de Y dans X.

Remarque. Dans l'exercice 8, seules les questions 2 et 3 utilisent l'axiome du choix, et seulement dans sa version "dénombrable dépendant".

L'exercice 9 utilise l'axiome du choix.

L'exercice 10 n'utilise pas l'axiome du choix.

La première question de l'exercice 11 utilise l'axiome du choix, mais pas la deuxième.