# TD n°3 : Groupes abéliens de type fini, résolubles ou nilpotents

**8 et 11/10/2024**

Nous traiterons dans l'ordre les exercices 1, 3, 4 et 5. Les exercices les plus délicats de la feuille sont marqués d'un .

**Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis juste avant le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.**

## Exercice 1. Vrai/Faux

Soit $G$ un groupe abélien de type fini. Les affirmations suivantes examinent ce que donnent les notions de famille libre et de famille génératrice. Pour chacune des affirmations suivantes, démontrer qu'elle est vraie ou trouver un contre-exemple. Attention, minimale ou maximale concernera toujours l'ordre de l'inclusion et non le cardinal.

1. Une famille génératrice minimale est libre.
2. Si $G$ est sans torsion, une famille génératrice minimale est libre.
3. Si $G$ est sans torsion, il existe une famille génératrice et libre.
4. Une famille libre maximale est génératrice.
5. Le cardinal des familles génératrices minimales est borné par une constante indépendante de la famille.
6. Le cardinal des familles libres est borné par une constante indépendante de la famille.
7. Soit $N \geq 1$. À isomorphisme près, il n'existe qu'un nombre fini de groupes abéliens de type fini $G$ avec $|\mathrm{Aut}(G)| \leq N$.

## Exercice 2. Générateurs de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$

Démontrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est engendré par les $E_{i,j}$ : la matrice avec des coefficients nuls, sauf sur la diagonale et en $(i, j)$ où ils valent 1.

## Exercice 3. Matrices triangulaires supérieures

Soit $k$ un corps de caractéristique différente de 2 et $n \geq 2$. On considère le groupe $T_n(k)$ des matrices inversibles triangulaires supérieures. On appellera $E_{i,j}$ la matrice avec des coefficients nuls, sauf sur la diagonale et en $(i, j)$ où ils valent 1.

1. Démontrer que $\mathrm{D}(T_n(k))$ est le sous-groupe des matrices unipotentes (de diagonale 1).
2. Démontrer que $T_n(k)$ est nilpotent d'ordre inférieur à $1 + \lceil \log_2(n) \rceil$.
3. En démontrant que $[E_{i,i+2^m}, E_{i+2^m,i+2^{m+1}}] = E_{i,i+2^{m+1}}$, démontrer que l'ordre de nilpotence est exactement $1 + \lceil \log_2(n) \rceil$.

## Exercice 4. Un calcul

Soient $G$ un groupe, $g \in G$ d'ordre fini $n$, et $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $g^i$ et $g^j$ sont conjugués.

1. On suppose $j - i = \pm 1$. Montrer que $g$ est un commutateur dans $G$.
2. On suppose que $\gcd(j-i, n) = 1$. Montrer $g \in \mathrm{D}(G)$.

## Exercice 5. Une réciproque étrange

Soit $G$ un groupe résoluble de type fini. Démontrer qu'il est fini si et seulement si tous les éléments sont d'ordre fini.

*Indication : pour $g_1, \dots g_k$ des générateurs de $G$ d'ordres $\omega_1, \dots, \omega_k$, on pourra démontrer que $\mathrm{D}(G)$ est engendré par $\{g_1^{n_1} \dots g_k^{n_k}[g_i, g_j]g_k^{-n_k} \dots g_1^{-n_1} \mid \forall a,\ 0 \leq n_a < \omega_a\}$.*

## Exercice 6. Éléments d'ordre fini dans un groupe nilpotent

Soit $G$ un groupe nilpotent de classe $n$.

1. Démontrer que si $n \neq 1$, alors $G/\mathrm{C}_{n-1}(G)$ est nilpotent de classe $n-1$.
2. Soit $X$ une partie génératrice de $G$ et $r \geq 1$ un entier tels que $x^r = 1$ pour tout $x \in X$. Démontrer que
$$\forall y \in \mathrm{C}_{n-1}(G),\ \ y^r = 1.$$
3. Soit $Z \subseteq G$ et $r \geq 1$ un entier tels que $z^r = 1$ pour tout $z \in Z$. Montrer que tout élément de $\langle Z \rangle$ est d'ordre divisant $r^n$.
4. En déduire que les éléments d'ordre fini forment un sous-groupe nilpotent de classe inférieure à $n$.

## Exercice 7. Sous-groupe de Frattini

1. Montrer que $Q$ ne possède pas de sous-groupe strict maximal pour l'inclusion.

Soit $G$ un groupe de type fini. On définit le sous-groupe de Frattini de $G$, noté $\phi(G)$, comme l'intersection des sous-groupes stricts maximaux de $G$.

2. Montrer que $G$ admet au moins un sous-groupe strict maximal en utilisant le lemme de Zorn. On pourra se contenter du cas d'un groupe fini si ce dernier lemme vous est inconnu.
3. Montrer que $\phi(G)$ est un sous-groupe caractéristique de $G$.

On note $\pi : G \to G/\phi(G)$ la projection canonique.

4. Soit $S \subset G$. Montrer que $S$ engendre $G$ si et seulement si $\pi(S)$ engendre $G/\phi(G)$. En déduire que
$$\phi(G) = \left\{ g \in G \,\middle|\, \forall S \subset G,\ \ \langle S, g \rangle = G \text{ ssi } \langle S \rangle = G \right\}.$$
5. Montrer que si $G$ est fini, alors $\phi(G)$ est nilpotent.
6. On suppose $G$ fini. Montrer que si $G$ est nilpotent, alors $\mathrm{D}(G) \subset \phi(G)$.
7. On suppose que $G$ est un $p$-groupe. Démontrer que $\phi(G) = \mathrm{D}(G)G^p$.

.

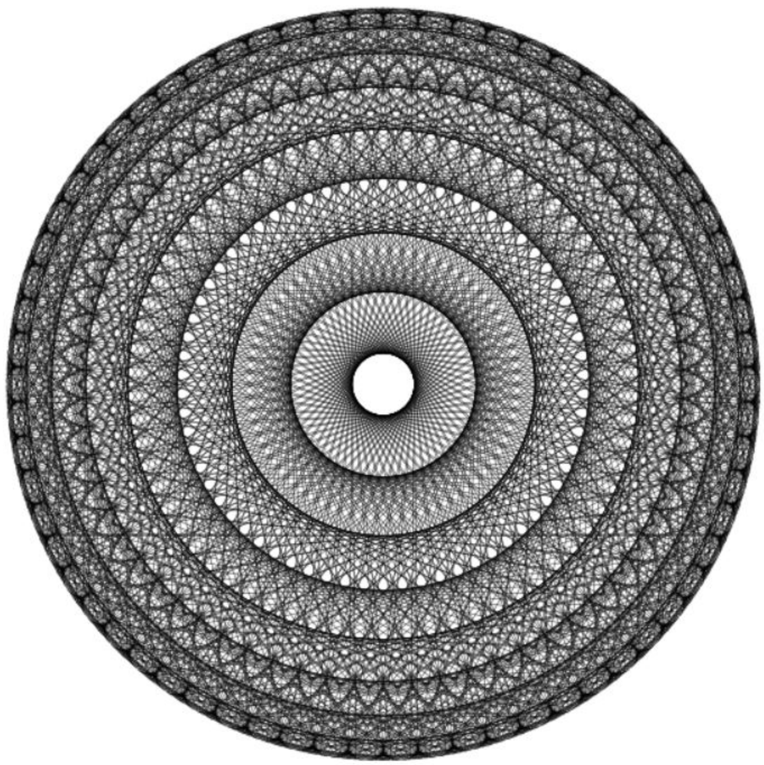

FIGURE 1 – Puissance $67^{\text{iéme}}$ appliquée aux racines 1254-ièmes.