TD n°3 : Groupes abéliens de type fini, résolubles ou nilpotents

8 et 11/10/2024

Exercice 1. Vrai/Faux

Soit G un groupe abélien de type fini. Les affirmations suivantes examinent ce que donnent les notions de famille libre et de famille génératrice. Pour chacune des affirmations suivantes, démontrer qu'elle est vraie ou trouver un contre-exemple. Attention, minimale ou maximale concernera toujours l'ordre de l'inclusion et non le cardinal.

1. Une famille génératrice minimale est libre.
2. Si G est sans torsion, une famille génératrice minimale est libre.
3. Si G est sans torsion, il existe une famille génératrice et libre.
4. Une famille libre maximale est génératrice.
5. Le cardinal des familles génératrices minimales est borné par une constante indépendante de la famille.
6. Le cardinal des familles libres est borné par une constante indépendante de la famille.
7. Soit $N \geq 1$. À isomorphisme près, il n'existe qu'un nombre fini de groupes abéliens de type fini G avec $|\mathrm{Aut}(G)| \leq N$.

Correction de l'exercice 1 :

1. FAUX. Prenons la famille $(2, 3)$ dans $\mathbb{Z}$. Nous avons effectivement $\langle 2, 3\rangle = 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ sans que 2 ni 3 n'engendre $\mathbb{Z}$. Le même exemple fonctionne même dans le groupe fin $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. FAUX. La même famille dans $\mathbb{Z}$ n'est pas libre puisque $3 * 2 - 2 * 3 = 0$.
3. VRAI. Si G est sans torsion, abélien et de type fini, le théorème de structure des groupes abéliens de type fini affirme que G est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ pour un certain n. Les éléments correspondants à la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ fournissent une famille génératrice et libre.
4. FAUX. Regardons la famille (2) dans $\mathbb{Z}$. Elle est libre, maximale puisque pour tout entier n, la relation $n * 2 - 2 * n = 0$ fournit une relation de liaison sur $(2, n)$. C'est encore moins vrai dans un groupe fini non trivial, où une famille libre est vide.
5. FAUX. Toujours dans $\mathbb{Z}$, soit $(p_1, \dots, p_n)$ les premiers nombres premiers. La famille $(\prod_{j\neq i} p_j)_i$ est génératrice puisque ses éléments sont globalement premiers entre eux. Mais dès que nous enlevons le i-ième terme, le sous-groupe engendré est contenu dans $p_i\mathbb{Z}$. Ceci exhibe des familles génératrices minimales de tout cardinal.
6. VRAI. Une famille libre de cardinal n équivaut à une injection de groupes $\mathbb{Z}^n \hookrightarrow G$. Puisque son image intersecte trivialement la partie de torsion de G, nous en déduisons une injection
$$\mathbb{Z}^n \hookrightarrow G/G_{\mathrm{tors}} \cong \mathbb{Z}^r$$
pour un certain entier r ne dépendant que de G. Nous pouvons ensuite utiliser la dernière question de l'exercice 4 du présent TD pour conclure que $n \geq r$. Un argument plus simple est possible : injectons $\mathbb{Z}^r$ dans $\mathbb{Q}^n$. Une relation sur $\mathbb{Q}$ entre les images de la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ fournit, quitte à la multiplier par un entier assez grand, une relation sur la base canonique. Par contraposée, la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ est envoyée sur une famille $\mathbb{Q}$-libre ; elle est de cardinal inférieur à r.
7. VRAI. Soit G un groupe abélien fini avec moins de N automorphismes. Puisque $\varphi(n)$ diverge quand n diverge, disons que $\varphi(m) \geq N$ pour $m \geq M$. Alors, si $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ apparaît dans l'écriture de G par théorème de structure des groupes abéliens finis, on peut agir dessus par automorphismes ce qui fournit une injection $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G)$. Ainsi, seuls des facteurs pour $m < M$ peuvent apparaître. Si l'on a k exemplaires du même facteur, nous avons $\mathfrak{S}_k$ qui se plonge dans $\mathrm{Aut}(G)$ en permutant lesdits facteurs. Ainsi, chaque facteur apparaît moins de N fois. Cela donne un nombre fini de groupes à isomorphismes près.

Exercice 3. Matrices triangulaires supérieures

Soit k un corps de caractéristique différente de 2 et $n \geq 2$. On considère le groupe $T_n(k)$ des matrices inversibles triangulaires supérieures. On appellera $E_{i,j}$ la matrice avec des coefficients nuls, sauf sur la diagonale et en (i,j) où ils valent 1.

1. Démontrer que $\mathrm{D}(T_n(k))$ est le sous-groupe des matrices unipotentes (de diagonale 1).
2. Démontrer que $T_n(k)$ est résoluble d'ordre inférieur à $1 + \lceil \log_2(n) \rceil$.
3. En démontrant que $[E_{i,i+2^m}, E_{i+2^m,i+2^{m+1}}] = E_{i,i+2^{m+1}}$, démontrer que l'ordre de résolubilité est exactement $1 + \lceil \log_2(n) \rceil$.

Correction de l'exercice 3 :

1. L'application de $T_n(k)$ vers $(k^\times)^n$ qui donne la diagonale est un morphisme de groupes. Ainsi, le groupe dérivé est contenu dans son noyau, i.e. dans les matrices unipotentes. Pour $n = 2$, on vérifie que
$$\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right] = E_{1,1}.$$
En faisant des calculs par blocs, on en déduit que chaque $E_{i,j}$ est dans le groupe dérivé. Un pivot démontre qu'il engendrent les matrices unipotentes.
2. Soit $U_{n,\geq d}(k)$ l'ensemble des matrices unipotentes dont le coefficient (i,j) est nul si $j - i < d$. On démontre en regardant l'expression explicite du calcul matriciel que $[U_{n,\geq d}(k), U_{n,\geq d}(k)] \subset U_{n,\geq 2d}(k)$. Puisque les matrices unipotentes sont $U_{n,\geq 1}(k)$ et $U_{n,\geq d}(k) = \{\mathrm{Id}\}$ si $d \geq n$, il en découle que
$$\mathrm{D}^{1+\lceil \log_2(n) \rceil}(T_n(k)) = \mathrm{D}^{\lceil \log_2(n) \rceil}(U_{n,\geq 1}(k)) \subset U_{n,\geq 2^{\lceil \log_2(n) \rceil}}(k) = \{\mathrm{Id}\}.$$
3. C'est un calcul. On prouve ainsi par récurrence que $E_{1,1+2^m} \in \mathrm{D}^{1+m}(T_n(k))$ qui est donc non trivial tant que $2^m \leq n$. Cela termine de démontrer l'ordre de résolubilité.

Exercice 4. Un calcul

Soient G un groupe, $g \in G$ d'ordre fini n, et $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ tels que g^i et g^j sont conjugués.

1. On suppose $j - i = \pm 1$. Montrer que g est un commutateur dans G.
2. On suppose que $\gcd(j - i, n) = 1$. Montrer $g \in \mathrm{D}(G)$.

Correction de l'exercice 4 :

1. Écrivons $g^j = hg^ih^{-1}$. Alors,
$$[h, g^i] = g^j g^{-i} = g^{\pm 1}.$$
Il en découle que $g = [h, g^i]$ ou $g = [g^i, h]$.
2. Dans ce cas, $[h, g^i] = g^{j-i}$ est un générateur du groupe cyclique $\langle g \rangle$. Il existe alors une puissance de $[h, g^i]$ qui vaut g. Cette puissance est encore dans le sous-groupe $\mathrm{D}(G)$.

Exercice 6. Éléments d'ordre fini dans un groupe nilpotent

Soit G un groupe nilpotent de classe n.

1. Démontrer que si $n \neq 1$, alors $G/\mathrm{C}_{n-1}(G)$ est nilpotent de classe $n - 1$.
2. Soit X une partie génératrice de G et $r \geq 1$ un entier tels que $x^r = 1$ pour tout $x \in X$. Démontrer que
$$\forall y \in \mathrm{C}_{n-1}(G),\ \ y^r = 1.$$

3. Soit $Z \subseteq G$ et $r \geq 1$ un entier tels que $z^r = 1$ pour tout $z \in Z$. Montrer que tout élément de $\langle Z \rangle$ est d'ordre divisant r^n.
4. En déduire que les éléments d'ordre fini forment un sous-groupe nilpotent de classe inférieure à n.

Correction de l'exercice 6 :

1. Par récurrence sur k, nous obtenons que la projection canonique induit une surjection de $\mathrm{C}_k(G)$ sur $\mathrm{C}_k(G/\mathrm{C}_{n-1}(G))$. Par conséquent $\mathrm{C}_{n-1}(G/\mathrm{C}_{n-1}(G))$ est trivial. En revanche, comme la suite $\mathrm{C}_k(G)$ est strictement décroissante pour l'inclusion avant de stagner, nous avons $\mathrm{C}_{n-2}(G) \subsetneq \mathrm{C}_{n-1}(G)$, ce qui se traduit en $\mathrm{C}_{n-2}(G/\mathrm{C}_{n-1}(G))$ non trivial. Le quotient est bien nilpotent d'ordre $n-1$.
2. On le démontre par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le groupe est abélien et le résultat découle du fait que deux éléments d'ordre divisant r on un produit d'ordre divisant r dans un groupe abélien. Pour l'hérédité, on applique l'hypothèse de récurrence à la famille des $x\mathrm{C}_{n-1}(G)$ qui engendrent $G/\mathrm{C}_{n-1}(G)$. On en déduit que tous les éléments de $z \in \mathrm{C}_{n-2}(G)$ vérifient $z^r \in \mathrm{C}_{n-1}(G)$. Maintenant, $\mathrm{C}_{n-1}(G)$ est abélien, engendré par les $[g, z]$ pour $z \in \mathrm{C}_{n-2}(G)$. Or,
$$[g, z^2] = [g, z]^2[[g, z]^{-1}, z]$$
Ce dernier appartient à $\mathrm{C}_n(G)$ et est donc nul. Par récurrence immédiate, nous en déduisons que $[g, z]^r = [g, z^r] \in \mathrm{C}_n(G)$ par hypothèse de récurrence.
3. Montrons le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le groupe est abélien, c'est comme à la question précédente. Pour l'hérédité, appelons $H = \langle Z \rangle$. On applique l'hypothèse de récurrence à $H/\mathrm{C}_{n-1}(H)$ qui est nilpotent d'ordre plus petit que $n-1$: H l'est, puis appliquer la question 1) grâce à la question 1. Cela implique que
$$\forall z\mathrm{C}_{n-1}(H) \in H/\mathrm{C}_{n-1}(H), \ \ z^{r^{n-1}}\mathrm{C}_{n-1}(H) = \mathrm{C}_{n-1}(H).$$
Autrement dit
$$\forall z \in H, \ \ z^{r^{n-1}} \in \mathrm{C}_{n-1}(H).$$
En appliquant la question 2, on conclut que $z^{r^n} = 1$.
4. Il suffit de prouver qu'ils forment un sous-groupe. Soient g_1, g_2 deux éléments d'ordre fini. Soit r que leurs deux ordres divisent. En appliquant la question qui précède à $Z = \{g_1, g_2\}$, on prouve que g_1g_2 est d'ordre divisant r^n.