

TD n°3 : Quotients et groupes usuels
3 et 6/10/2023

Exercice 1. Centre et automorphismes intérieurs

Soit G un groupe. Nous notons $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G, gh = hg\}$ le centre de G .

1. Démontrer que l'application

$$\text{Int} : G \rightarrow \text{Aut}(G), \quad g \mapsto [h \mapsto ghg^{-1}]$$

qui à tout élément g associe la conjugaison par g est bien définie et qu'il s'agit d'un morphisme de groupes de noyau $Z(G)$.

2. Nous définissons le sous-groupe des automorphismes intérieurs comme l'image $\text{Int}(G)$. Dédurre de la question précédente que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G et qu'il existe un isomorphisme de groupes

$$\text{Int}(G) \cong G/Z(G).$$

3. Démontrer que $\text{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\text{Aut}(G)$.

Correction de l'exercice 1

1. Soit $g \in G$. La conjugaison par g est un morphisme de groupes puisque

$$\forall h, h' \in G, \quad g(hh')g^{-1} = (ghg^{-1})(gh'g^{-1}).$$

De plus, l'application Int est un morphisme de monoïdes vers $\text{End}(G)$: pour tous $g, g' \in G$ et tout $h \in G$ nous avons

$$\begin{aligned} \text{Int}(gg')(h) &= (gg')h(gg')^{-1} \\ &= g(g'hg'^{-1})g^{-1} \\ &= (\text{Int}(g) \circ \text{Int}(g'))(h) \end{aligned}$$

et e_G est envoyé sur l'identité. Il en découle que le morphisme de monoïdes arrive en réalité dans $\text{Aut}(G)$ puisque $\text{Int}(g^{-1})$ fournit un inverse de $\text{Int}(g)$.

Enfin, nous avons la suite d'équivalences suivante pour $g \in G$:

$$\begin{aligned} g \in \text{Ker}(\text{Int}) &\Leftrightarrow \text{Int}(g) = \text{Id}_G \\ &\Leftrightarrow \forall h \in G, \quad ghg^{-1} = h \\ &\Leftrightarrow \forall h \in G, \quad gh = hg \\ &\Leftrightarrow g \in Z(G) \end{aligned}$$

2. C'est une conséquence immédiate du fait que le noyau d'un morphisme de groupes est un sous-groupe distingué, puis du premier théorème d'isomorphisme (théorème 6.16 du poly).
3. Soit $g \in G$ et $\varphi \in \text{Aut}(G)$. Il nous faut calculer $\varphi \circ \text{Int}(g) \circ \varphi^{-1}$ et démontrer qu'il est intérieur. Pour tout $h \in G$ nous avons

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \text{Int}(g) \circ \varphi^{-1})(h) &= \varphi(g\varphi^{-1}(h)g^{-1}) \\
&= \varphi(g)h\varphi(g^{-1}) \\
&= \varphi(g)h\varphi(g)^{-1}
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $\varphi \circ \text{Int}(g) \circ \varphi^{-1} = \text{Int}(\varphi(g))$ et conclut.

Exercice 3. Quotient par le centre

Soit G un groupe tel que $G/Z(G)$ est monogène. Démontrer que G est abélien.

Que pouvons-nous déduire de ce résultat concernant le quotient de \mathbf{H}_8 par son centre ?

Correction de l'exercice 3

Soit $g \in G$ tel que $gZ(G)$ engendre $G/Z(G)$. Soient à présent g_1 et g_2 deux éléments de G . Par construction de g , il existe deux entiers $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ et deux éléments $(z_1, z_2) \in Z(G)^2$ tels que

$$g_i = g^{k_i} z_i \text{ pour } i = 1, 2.$$

Avec ces notations, il est possible d'écrire

$$\begin{aligned}
g_1 g_2 &= g^{k_1} z_1 g^{k_2} z_2 \\
&= g^{k_1} g^{k_2} z_2 z_1 \\
&= g^{k_1+k_2} z_2 z_1 \\
&= g^{k_2} g^{k_1} z_2 z_1 \\
&= g^{k_2} z_2 g^{k_1} z_1 \\
&= g_2 g_1
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que z_2 est dans le centre pour passer au deuxième et quatrième lignes. Ceci démontre que G est abélien.

Dans \mathbf{H}_8 , le centre vaut $\{1, -1\}$. Le quotient de \mathbf{H}_8 par son centre est donc un groupe d'ordre 4, qui ne peut être cyclique sans quoi \mathbf{H}_8 serait abélien. Nous obtenons ainsi que

$$\mathbf{H}_8/Z(\mathbf{H}_8) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

Exercice 4. Sous-groupes d'un quotient

Soit G un groupe, soit $H \triangleleft G$ l'un de ses sous-groupes distingués et $\pi : G \rightarrow G/H$ la projection associée.

1. Soit K un sous-groupe de G . Démontrer que $K \cap H \triangleleft K$ puis que π induit un isomorphisme

$$K/K \cap H \cong \pi(K).$$

Nous voulons à présent décrire les sous-groupes de G/H en fonction de ceux de G , puis les quotients correspondant à ceux des sous-groupes qui sont distingués.

2. Démontrer que l'application suivante est une bijection :

$$\{K \leq G \mid H \subseteq K\} \rightarrow \{\Delta \leq G/H\}, \quad K \mapsto \pi(K).$$

- Démontrer que cette bijection est croissante pour l'inclusion et qu'elle envoie les sous-groupes distingués de G contenant H exactement sur les sous-groupes distingués de G/H .
- Soit K un sous-groupe distingué de G contenant H . Construire un isomorphisme

$$G/K \cong (G/H)/(K/H).$$

Correction de l'exercice 4

- La conjugaison par un élément de K laisse stable H puisqu'il est distingué et K puisque c'est un sous-groupe. La conjugaison par un élément de K laisse donc stable $K \cap H$. Cela implique que $K \cap H \triangleleft K$. Considérons ensuite le morphisme de groupes $\pi|_K$. Son noyau vaut $K \cap \text{Ker}(\pi) = K \cap H$. Le premier théorème d'isomorphisme conclut alors que π induit par passage au quotient un isomorphisme

$$K/K \cap H = K/\text{Ker}(\pi|_K) \cong \text{Im}(\pi|_K) = \pi(K).$$

- Pour se faire la main, nous redémontrons à partir de zéro cet énoncé, qui est conséquence de la proposition 2.9 de votre cours établissant une correspondance entre sous-groupes de l'image d'un morphisme et sous-groupes de la source contenant le noyau. Pour tout sous-groupe Δ de G/H , le sous-ensemble $\pi^{-1}(\Delta)$ de G est un sous-groupe puisqu'il s'agit de l'image inverse d'un sous-groupe par un morphisme de groupes, et il contient $\pi^{-1}(\{H\}) = H$. Nous démontrons que cela fournit un inverse à $K \mapsto \pi(K)$. En effet, pour tout sous-groupe Δ de G/H , nous avons

$$\pi(\pi^{-1}(\Delta)) = \Delta.$$

Ce n'est en revanche pas vrai pour un sous-groupe K quelconque de G que $\pi^{-1}(\pi(K)) = K$; nous avons seulement l'inclusion $K \subseteq \pi^{-1}(\pi(K))$. Pour tout élément de $g \in \pi^{-1}(\pi(K))$, il existe un $k \in K$ tel que $\pi(g) = \pi(k)$. Ainsi, nous pouvons écrire $g = kh$ avec $h \in \text{Ker}(\pi) = H$. Lorsque $H = K$, nous avons en particulier démontré que $g \in K$, et donc que $\pi^{-1}(\pi(K)) = K$. Ceci parachève la démonstration du caractère bijectif.

- La prise d'image par π est une application croissante pour l'inclusion. Puisqu'elle est injective lorsqu'on la restreint aux sous-groupes de G contenant H , elle est strictement croissante.

Lorsque K est distingué, pour tout élément $\pi(g)$ de G/H nous avons

$$\pi(g)\pi(K)\pi(g)^{-1} = \pi(gKg^{-1}) \subseteq \pi(K)$$

grâce au caractère distingué de K . Ceci démontre que $\pi(K)$ est distingué. Réciproquement, si Δ est distingué, nous avons pour tout $g \in G$ que

$$\pi(g\pi^{-1}(\Delta)g^{-1}) \subseteq \pi(\Delta)$$

ce qui implique que

$$g\pi^{-1}(\Delta)g^{-1} \subseteq \pi^{-1}(\Delta)H.$$

Nous concluons que $\pi^{-1}(\Delta)$ est distingué en nous souvenant qu'il contient H donc que $\pi^{-1}(\Delta)H = \pi^{-1}(\Delta)$.

- Puisque $H \subseteq K$, la propriété universelle du quotient¹ nous affirme que la projection canonique $\pi_K : G \rightarrow G/K$ se factorise par π_H en

$$\overline{\pi}_K : G/H \rightarrow G/K, \quad gH \mapsto gK.$$

Le noyau de cette factorisation est $\pi_H(\text{Ker}(\pi_K)) = \pi_H(K)$. La première question nous fournit une identification de ce noyau avec K/H (nous rappelons qu'ici $H \subseteq K$). Enfin, le premier théorème d'isomorphisme appliqué au morphisme surjectif $\overline{\pi}_K$ fournit un isomorphisme

$$(G/H)/(K/H) \xrightarrow{\sim} G/K.$$

1. N'hésitez pas à relire l'exercice 6 du TD 1 pour vous remémorer pourquoi la rédaction qui suit n'omet aucun détail, en bref pourquoi la propriété universelle est une grande machinerie qui nous fournit des morphismes de groupes et nous donne même leur expression sans plus se soucier de savoir s'ils sont définis de manière non ambiguë.

Exercice 6. Sous-groupes de \mathbb{Q} , première édition

L'exercice suivant porte sur les sous-groupes de \mathbb{Q} . On note \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers, s'inspirant de Steinitz, on appelle *nombre superrationnel* toute collection $s = (s_p)_{p \in \mathbb{P}}$ telle que pour tout premier p on a $s_p \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ et que seul un nombre fini des s_p est négatif. On note \mathcal{S} l'ensemble des nombres superrationnels.² On appelle entiers supernaturels les nombres superrationnels dont toutes les "coordonnées" sont positives.

On dispose d'une application naturelle $\iota : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{S}$, associant à $r \in \mathbb{Q}_+$ l'élément $(v_p(r))_{p \in \mathbb{P}}$, où $v_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ est la valuation p -adique³. Deux rationnels r et r' ont même image si et seulement si $r = \pm r'$. Cette application envoie les entiers sur des entiers supernaturels.

On munit l'ensemble \mathcal{S} des nombres superrationnels de la relation d'ordre $s \preceq s' \Leftrightarrow s_p \leq s'_p$ pour tout $p \in \mathbb{P}$.

1. Vérifier les affirmations des paragraphes précédents. Montrer ensuite que l'on a $n|m$ dans \mathbb{N} si et seulement si $\iota(n) \preceq \iota(m)$.
2. Démontrer que tout superrationnel s'écrit de manière unique comme $s_+ - s_-$ où s_+ est un entier supernaturel, s_- est l'image d'un vrai entier par ι , et où s_+ et s_- n'ont pas de coordonnées simultanément non nulles.
3. Montrer que toute famille de (\mathcal{S}, \preceq) possède une borne supérieure.

Pour $s \in \mathcal{S}$ on note $H_s \subset \mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels r tels que s_- divise le numérateur de r et que le dénominateur de r divise s_+ . On se propose de montrer que $s \mapsto H_s$ est une bijection croissante de \mathcal{S} sur l'ensemble des sous-groupes non réduits à $\{0\}$ de \mathbb{Q} .

3. Montrer que H_s est un sous-groupe de \mathbb{Q} , et que l'on a $H_s \subset H_{s'} \Leftrightarrow s \preceq s'$. Décrire $H_{\iota(r_1)}$ pour $r_1 \in \mathbb{Q}^\times$.
4. Soit G un sous-groupe de \mathbb{Q} contenant \mathbb{Z} . En posant s_G la borne supérieure de tous les dénominateurs des éléments de G , démontrer que $G = H_{s_G}$.
5. Conclure à la bijectivité (sans l'hypothèse que G contienne \mathbb{Z}).
6. À quels nombres superrationnels les sous-groupes \mathbb{Z} et \mathbb{Q} correspondent-ils ?

Correction de l'exercice 6

1. Toutes les valuations d'un rationnel sont nulles sauf un nombre fini, ce qui prouve que ι est bien définie. De plus, l'unicité de la décomposition en facteurs premiers à multiplication par ± 1 près dans \mathbb{Q} donne la propriété voulue sur ι . Les valuations des entiers étant positives, l'application ι envoie effectivement les entiers sur des entiers supernaturels. Dire que $n|m$ si et seulement si $\iota(n) \preceq \iota(m)$ revient à dire que $n|m$ si et seulement si pour tout premier p on a $v_p(n) \leq v_p(m)$ ce qui se voit sur la décomposition en facteurs premiers.
2. Si $s = s_+ - s_-$ comme prédit, en passant aux parties positives et négatives sur chaque coordonnée nous obtenons que $s_+ = (s_p^+)_{p \in \mathbb{P}}$ et $s_- = (s_p^-)_{p \in \mathbb{P}}$. L'analyse étant terminée et démontrant l'unicité, nous fixons un superrationnel s et nous définissons s_+ et s_- par les formules ci-dessus. Tous les s_p^+ sont positifs d'où l'on tire que s_+ est un entier supernaturel. Seul un nombre fini de coordonnées de s sont négatives, d'où l'on tire que s_- est l'image de l'entier $\prod p^{s_p^-}$. Enfin, les fonctions partie positive et partie négative ne peuvent être non nulles simultanément d'où la dernière propriété.
3. Soit $(s_i)_{i \in I}$ une famille non vide de superrationnels. Un superrationnel va majorer la famille si et seulement si sa p -ième composant est supérieure à toutes les p -ièmes composantes des s_i . Nous définissons suggestivement

$$\sup_I s_i = \left(\sup_{i \in I} s_{i,p} \right)_{p \in \mathbb{P}}.$$

2. Un nombre superrationnel est parfois noté suggestivement $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{s_p}$, en omettant éventuellement les exposants nuls, par exemple on a $2^\infty 3 5^\infty / 7^2 \in \mathcal{S}$.

3. Par définition $v_p(x)$ vaut ∞ si $x \in \mathbb{Q}$ est nul, et sinon, c'est l'unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que x s'écrive sous la forme $p^m a/b$ avec a et b entiers et premiers à p .

Si $(\sup_I s_i)_p$ est négative, c'est que tous les $s_{i,p}$ sont négatifs et cela ne peut arriver que pour un nombre fini de premiers. L'élément $\sup_I s_i$ est ainsi un superrationnel dont on vérifie qu'il fournit une borne supérieure.

4. Le rationnel $0 = 0/1$ vérifie effectivement les conditions pour appartenir à H_s . Soient a/b et c/d des éléments de H_s . Appelons $e = \text{pgcd}(b, d)$. On écrit

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd} = \frac{a^{d/e} - c^{b/e}}{bd/e} = \frac{a^{d/e} - c^{b/e}}{\text{ppcm}(b, d)}.$$

Comme b et d divisent s_+ , cela prouve que pour tout premier p , $v_p(b) \leq s_p^+$ et de même pour d . Or $v_p(\text{ppcm}(b, d)) = \max(v_p(b), v_p(d))$ est aussi inférieur à s_p^+ . D'où $\text{ppcm}(b, d) | s_+$. De plus, l'entier correspondant à s_- divise a et c donc le numérateur.

Si $s \preceq s'$, alors $s_+ \preceq s'_+$ et $s'_- \preceq s_-$. Les conditions d'appartenance à $H_{s'}$ impliquent donc celles d'appartenance à H_s d'où l'inclusion. Par contraposée, supposons que $s \not\preceq s'$, donc que $s_+ \not\preceq s'_+$ ou $s_- \not\preceq s'_-$. Dans le premier cas, fixons un premier p tel que $s_p^+ > s'_p^+$. Soit v un entier tel que $s_p \geq v > s'_p$. Nous voudrions spontanément dire que p^{-v} appartient à H_s mais pas à $H_{s'}$. Mais il faut aussi considérer les parties négatives⁴. Dans ce cas, si $s_- = \iota(a)$, le rationnel a/p^v est écrit sous forme irréductible, appartient à H_s mais pas à $H_{s'}$ en considérant la p -ième coordonnée. Dans le deuxième cas, écrivons que $s'_- = \iota(a')$. Le rationnel a' appartient à $H_{s'}$ mais pas à H_s puisque $s_- \not\preceq \iota(a')$.

Soit r_1 un rationnel non nul. On vérifie que

$$H_{\iota(r_1)} = \frac{1}{r_1} \mathbb{Z}.$$

Remarque : le deuxième énoncé sur la valuation p -adique est une version améliorée de l'inégalité triangulaire pour $|\cdot|_p = e^{-v_p}$. Dans ce cas, nous disons que la valuation est ultramétrique.

4. Tout élément $r \in G$ de dénominateur b vérifie par définition que $\iota(b) \preceq s_G$. Puisque $s_G = s_{G+}$ comme borne supérieurs d'entiers, la condition sur les numérateurs est vide et $G \subseteq H_{s_G}$.

Pour la réciproque, nous commençons par démontrer que si a/n écrit sous forme irréductible est un élément de G , alors $1/n \in G$. Pour cela, considérons une relation de Bézout $ac + nd = 1$. Il est alors possible d'écrire

$$\frac{1}{n} = \frac{ac + nd}{n} = c \frac{a}{n} + d$$

qui appartient à G puisque $\mathbb{Z} \subseteq G$.

Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $r \in H_{s_G}$ que l'on écrit a/b sous forme irréductible. Pour tout premier p qui apparaît dans la décomposition de b , la définition de s_G nous affirme qu'il existe $r_p \in G$ pour lequel $p^{v_p(b)}$ divise le dénominateur. Quitte à multiplier par un entier, nous pouvons supposer que r_p possède $p^{v_p(b)}$ pour dénominateur. Le paragraphe précédent affirme alors que $1/p^{v_p(b)} \in G$. En considérant une relation de Bézout sur la famille des $(\prod_{q \neq p} q^{v_q(b)})_q$ qui sont globalement premiers entre eux, nous démontrons que $1/n \in G$ puis que $r \in G$.

5. L'injectivité de l'application $s \mapsto H_s$ a déjà été démontrée en passant à la question 3). Soit à présent G un sous-groupe non trivial de \mathbb{Q} . Prenons $r_1 \in G \setminus \{0\}$. L'ensemble $r_1^{-1}G$ est encore un sous-groupe de \mathbb{Q} et il contient à présent \mathbb{Z} . La question 4) nous permet de trouver un superrationnel s tel que $r_1^{-1}G = H_s$. À présent, pour tout rationnel non nul r , nous avons

$$\begin{aligned} r \in G &\Leftrightarrow r_1^{-1}r \in r_1^{-1}G \\ &\Leftrightarrow \iota r_1 r^{-1} \preceq s \\ &\Leftrightarrow \iota(r^{-1}) \preceq s' \end{aligned}$$

où $s'_p = s_p - v_p(r_1)$. Puisque r_1 n'a qu'un nombre fini de valuations non nulles, l'élément s' est encore un superrationnel et nous venons de démontrer que $G = H_{s'}$.

4. Par exemple, si $p \neq 2$, l'élément p^{-v} n'appartiendra jamais à $H_{2^{-1}}$ (regarder la 2-ième coordonnée)

6. Puisque les deux sous-groupes considérés contiennent \mathbb{Z} , nous pouvons appliquer directement la question 4). La borne supérieure des dénominateurs des éléments de \mathbb{Z} est 1. Celle de \mathbb{Q} est $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^\infty$ en considérant chaque $1/p^n$ pour tout premier p et tout $n \geq 1$. Ainsi, le sous-groupe \mathbb{Z} est associé au supernaturel 1 et \mathbb{Q} au supernaturel $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^\infty$.

Exercice 8. Théorème de Kronecker et conséquences

Cet exercice a pour but de démontrer et d'utiliser le théorème de Kronecker sur les sous-groupes de \mathbb{R} .

- Démontrer qu'un sous-groupe de \mathbb{R} est soit dense, soit de la forme $x\mathbb{Z}$ pour un certain réel positif x .
- Déterminer lesquels des sous-groupes denses de \mathbb{R} suivants sont isomorphes :

$$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, H_{p^\infty} \text{ pour } p \text{ premier}, \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}, \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}, \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} x_i \mathbb{Q}$$

où $(x_i)_{i \in I}$ est une \mathbb{Q} -base de \mathbb{R} et où $i_0 \in I$.

- Démontrer que pour tout irrationnel α , le sous-groupe $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} . En déduire que la suite $(\cos(n))_{n \geq 1}$ est dense dans $[-1, 1]$.
- Démontrer que le sous-groupe $2^{\mathbb{Z}}3^{\mathbb{Z}}$ de \mathbb{R}_+^\times est dense.

Correction de l'exercice 8

- Soit G un sous-groupe de \mathbb{R} . Nous éliminons immédiatement le cas du sous-groupe trivial $\{0\}$. Si G s'écrivait sous la forme $x\mathbb{Z}$ pour un certain $x \in \mathbb{R}_+$, l'élément x serait le plus petit élément de $G \cap \mathbb{R}_+^\times$. Ceci invite à considérer

$$x = \inf G \cap \mathbb{R}_+^\times.$$

Le premier cas qui se présente est celui où $x > 0$. Commençons par démontrer que $x \in G$, ce qui n'a rien d'automatique. Si ce n'est pas le cas, par définition de la borne inférieure, il existe $x_2 > x_1 > x$ avec $(x_1, x_2) \in G^2$ et $x_2 < x + x$. Il en découle que $0 < x_2 - x_1 < x$ et puisque $x_2 - x_1$ est un élément de G , ce serait absurde. Maintenant que $x \in G$, nous avons l'inclusion $x\mathbb{Z} \subseteq G$. Prenons enfin $g \in G$. Par division euclidienne, il existe un entier q et $r \in [0, x[$ tel que $g = qx + r$. Le réel appartient donc à G et par minimalité de x , il doit être nul. Ceci entraîne que $G = x\mathbb{Z}$.

Le deuxième cas qui se présente esdt celui où $x = 0$. Pour démontrer que G est dense, nous considérons un réel y et $\varepsilon > 0$. Puisque $x = 0$, il existe $g \in G$ tel que $g \in]0, 2\varepsilon[$. En posant q le quotient de la division euclidienne de y par g , le multiple qg appartient à $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ ce qui termine de démontrer la densité de G .

- Les réels $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels, ce qui entraîne que les sommes $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$ sont directes. Les deux sous-groupes sont ainsi isomorphes à \mathbb{Z}^2 .

La première étape pour distinguer ces groupes consiste à regarder des propriétés de divisibilité. Dans \mathbb{R}, \mathbb{Q} et le dernier groupe, tout élément peut être divisé par tout entier, au sens où

$$\forall n \geq 1, \forall g \in G, \exists h \in G, nh = g.$$

Cette propriété est seulement vérifiée pour les puissances de p dans H_{p^∞} puisque si $\text{pgcd}(n, p) = 1$, l'élément 1 n'est pas divisible par n . Pour les deux restants, leur écriture comme \mathbb{Z}^2 démontre que l'élément correspondant à $(1, 0)$ n'est divisible par aucun entier $n \geq 2$. Les propriétés de divisibilités sont préservées par isomorphismes. Nous venons de démontrer qu'aucun H_{p^∞} n'est isomorphe à l'un des autres sous-groupes de la liste, et que les deux sous-groupes isomorphes à \mathbb{Z}^2 ne sont pas isomorphes aux autres.

Une deuxième étape pour distinguer les trois groupes restants consiste à regarder les cardinaux : \mathbb{Q} est dénombrable quand les autres sont indénombrables (une base de \mathbb{R} doit être indénombrable sans quoi \mathbb{R} serait dénombrable). Nous avons donc distingué \mathbb{Q} des autres.

Enfin, deux \mathbb{Q} -espaces vectoriels dont des bases ont même cardinal sont isomorphes. Puisque I est infini, les ensembles I et $I \setminus \{i_0\}$ sont de même cardinaux, ce qui implique que les deux \mathbb{Q} -sous-espaces vectoriels restants sont isomorphes, a fortiori comme groupes.

3. Pour tout irrationnel α , nous avons $\mathbb{Z} \oplus \alpha\mathbb{Z}$: un élément de l'intersection s'écrit $a = \alpha b$ et si $b \neq 0$ cela fournirait une écriture rationnelle de α . Ainsi, le sous-groupe $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est isomorphe à \mathbb{Z}^2 , et non à \mathbb{Z} . L'alternative de la première question démontre alors qu'il est dense, sans quoi il serait isomorphe à \mathbb{Z} .

La fonction cosinus est paire et 2π -périodique. Ainsi, l'ensemble $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ vaut $\cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$. Puisque 2π est irrationnel⁵, le sous-groupe $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} . Nous en déduisons que son image par cosinus est dense dans $[-1, 1]$.

4. Le sous-groupe étant multiplicatif, nous voudrions nous ramener à un sous-groupe additif de \mathbb{R} , ce qui invite à passer au logarithme. Considérons le sous-groupe $\ln(2)\mathbb{Z} + \ln(3)\mathbb{Z}$. S'il s'écrivait $x\mathbb{Z}$, nous aurions deux entiers non nuls a, b tels que $\ln(2) = ax$ et $\ln(3) = bx$. Nous en déduisons que

$$b \ln(2) = a \ln(3)$$

puis en passant à l'exponentielle que

$$2^b = 3^a$$

ce qui est impossible. Le sous-groupe $\ln(2)\mathbb{Z} + \ln(3)\mathbb{Z}$ est donc dense dans \mathbb{R} . Son image par l'exponentielle est dense dans \mathbb{R}_+^\times , et cette image vaut exactement $2^{\mathbb{Z}}3^{\mathbb{Z}}$.

5. Ce n'est pas si évident ; une preuve agréable utilise les intégrales de Niven $\int_{-1}^1 \frac{x^n (a-bx)^n}{n!} \sin(x) dx$ pour $\pi = a/b$.