TD n°4 : Groupes linéaires et présentation des groupes

15 et 18/10/2024

Nous traiterons dans l'ordre les exercices. Les questions les plus délicates de la feuille sont marqués d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis juste avant le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.

Démonstration de la base adaptée pour les sous-groupes d'un groupe abélien libre

Exercice 1.

Pour $H < G$ un sous-groupe d'un groupe abélien, on dit que H est facteur direct s'il existe un complément de H dans G, autrement dit un sous-groupe K tel que $G = H \times K$.

1. Soit $f : \mathbb{Z}^r \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^s$. Démontrer que $r \geq s$ et que $\mathrm{Ker}(f)$ est facteur direct.
2. Soit $g : \mathbb{Z}^s \hookrightarrow \mathbb{Z}^r$. Démontrer que $r \geq s$. Donner une condition sur les facteurs invariants pour que $\mathbb{Z}^s$ soit un facteur direct.

Exercice 2. Une suite exacte

Soit k un corps et $n \geq 1$ un entier.

1. Montrer que la composée
$$\mathrm{SL}_n(k) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_n(k)$$
s'insère dans une suite exacte canonique
$$1 \to \mu_n(k) \to \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k) \to k^\times/(k^\times)^n \to 1.$$
2. En déduire une suite exacte
$$1 \to \mathrm{PSL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k) \to k^\times/(k^\times)^n \to 1.$$
3. Déduire de la première question une suite exacte
$$1 \to \mu_n(k) \to \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PSL}_n(k) \to 1.$$
Démontrer qu'elle n'est pas scindée pour $n = 2$ et $\mathrm{car}(k) \neq 2$. On pourra considérer un relèvement de la classe $\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$.
4. ● La suite est-elle scindée lorsque $\mu_n(k) \neq \{1\}$?

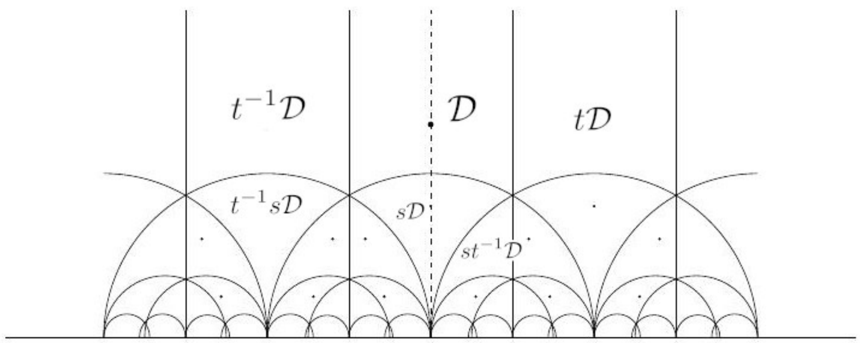
Exercice 3. Présentation de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

On définit une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ par

$$\left(\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

On définit $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H} \mid |\mathrm{Re}(z)| \leq 1/2 \text{ et } |z| \geq 1\}$. On appelle s et t les classes dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. On choisira une fois pour toute le complexe $z_0 = 2i \in \mathrm{Int}(\mathcal{D})$.

1. Démontrer que si $g\mathrm{Int}(\mathcal{D}) \cap \mathrm{Int}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ alors $g = \pm\mathrm{Id}$. Démontrer que si $g\mathrm{Int}(\mathcal{D}) \cap \mathrm{Int}(\mathcal{D})$ n'est pas réduit à un point alors $g \in \{s, t, t^{-1}\}$.
2. En déduire que $\langle s, t\rangle = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. On pourra considérer, pour une matrice g un élément de partie imaginaire maximale dans l'orbite de gz_0 par $\langle S, T\rangle$.



Notre but est à présent de démontrer que les relations s^2 et $(st)^3$ engendrent toutes les relations. Soit $g_1 \ldots g_n = 1$ avec $g_i \in \{s, t, t^{-1}\}$. On démontre par récurrence sur n que $g_1 \ldots g_n$ appartient au sous-groupe distingué engendré par s^2 et $(st)^3$.

3. Traiter les cas $n \leq 2$.
4. Conclure lorsque $1 \leq i < j \leq n$ avec $(i,j) \neq (1,n)$ tel que $g_i \ldots g_j = 1$. Conclure également lorsque deux g_i successifs valent s, lorsque $g_1 = g_n = s$, lorsque deux g_i successifs sont inverses l'un de l'autre ou que $\{g_1, g_n\} = \{t, t^{-1}\}$.
5. ● Dans le cas contraire, démontrer qu'il existe une application continue injective γ du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{H}$ telle que
$$\forall i,\ \ \gamma\left(\ \left]\frac{2i-1}{2n}, \frac{2i+1}{2n}\right[\ \right) \subset \mathrm{Int}(g_1 \ldots g_i\mathcal{D}),\ \ \gamma\left(\frac{i}{n}\right) = g_1 \ldots g_i z_0,\ \ \gamma\left(\frac{2i+1}{2n}\right) \in \mathcal{D} \cap g_{i+1}\mathcal{D}.$$
6. ● Démontrer que quitte à conjuguer notre relation, on peut se ramener à suppose que $g_1 = s$ et $g_2 = t^{\pm 1}$. On se place dans le cas où $g_2 = t$. En dessinant γ, puis en faisant un raisonnement rigoureux prouver successivement : $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset (\mathrm{Re} < 1/2)$ puis que $g_n = t$, puis que $\exists j,\ \gamma(j/n) = t^{-1}sz_0$.
7. ● En conjuguant, montrer qu'on peut se ramener à $t^{-1}sg_3 \ldots g_{n-1}s = 1$. Considérer le chemin λ obtenu comme γ avec cette nouvelle relation en partant de $t^{-1}sz_0$. Démontrer que $\lambda(2/n) = \gamma(2/n)$. En déduire que $\lambda(j/n) = t^{-1}sz_0$ et conclure.