TD n°4 : Groupes linéaires et présentation des groupes

15 et 18/10/2024

Exercice 1.

Pour $H < G$ un sous-groupe d'un groupe abélien, on dit que H est facteur direct s'il existe un complément de H dans G, autrement dit un sous-groupe K tel que $G = H \times K$.

1. Soit $f : \mathbb{Z}^r \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^s$. Démontrer que $r \geq s$ et que $\mathrm{Ker}(f)$ est facteur direct.
2. Soit $g : \mathbb{Z}^s \hookrightarrow \mathbb{Z}^r$. Démontrer que $r \geq s$. Donner une condition sur les facteurs invariants pour que $\mathrm{Im}(\mathbb{Z}^s)$ soit un facteur direct.

Correction de l'exercice 1 :

1. On regarde la forme normale de Schmidt : si $r < s$ il y a forcément une ligne de zéros et f ne peut être surjective. De plus, si on choisit des antécédents y_i par f de la base canonique de $\mathbb{Z}^s$, c'est encore une famille libre. Il fournissent un complément de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Le cours montre déjà qu'un sous-groupe d'un groupe libre de rang fini est libre de rang inférieur. De plus, si les facteurs invariants ne sont pas tous égaux à 1, le quotient $\mathbb{Z}^r/\mathrm{Im}(\mathbb{Z}^s)$ contient des éléments de torsions et on ne peut trouver de complément. Si tous les facteurs invariants sont 1, la forme normal de Schmidt affirme que l'image d'une base de $\mathbb{Z}^s$ se complète en une base de $\mathbb{Z}^r$, d'où l'existence d'un complément.

Exercice 2. Une suite exacte

Soit k un corps et $n \geq 1$ un entier.

1. Montrer que la composée
$$\mathrm{SL}_n(k) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_n(k)$$
s'insère dans une suite exacte canonique
$$1 \to \mu_n(k) \to \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k) \to k^\times/(k^\times)^n \to 1.$$
2. En déduire une suite exacte
$$1 \to \mathrm{PSL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k) \to k^\times/(k^\times)^n \to 1.$$
3. Déduire de la première question une suite exacte
$$1 \to \mu_n(k) \to \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PSL}_n(k) \to 1.$$
Démontrer qu'elle n'est pas scindée pour $n = 2$ et $\mathrm{car}(k) \neq 2$. On pourra considérer un relèvement de la classe $\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$.
4. ● La suite est-elle scindée lorsque $\mu_n(k) \neq \{1\}$?

Correction de l'exercice 2 :

1. Le déterminant est un morphisme de groupes surjectif det : $\mathrm{GL}_n(k) \twoheadrightarrow k^\times$. L'image des homothéties est exactement $(k^\times)^n$ puisque $\det(\lambda \mathrm{Id}_n) = \lambda^n$. Le déterminant se factorise donc en un morphisme
$$\mathrm{PGL}_n(k) \twoheadrightarrow k^\times/(k^\times)^n.$$
Montrons que son noyau est exactement l'image de $\mathrm{SL}_n(k)$ par la composée annoncée. Tout élément de l'image est dans la classe d'une matrice de déterminant 1 et possède donc un déterminant égal à $[1]$. Réciproquement si $[g]$ est dans le noyau, ceci signifique que $\det(g) = \lambda^n$ pour un certain inversible λ. Nous en déduisons que $[g] = [\lambda^{-1}g]$ est dans l'image de $\mathrm{SL}_n(k)$. Enfin, une matrice est dans le noyau de la composée annoncée si et seulement si c'est une homothétie de déterminant 1, autrement dit si et seulement si elle est dans l'image de
$$\mu_n(k) \hookrightarrow \mathrm{SL}_n(k), \ \ \lambda \mapsto \lambda \mathrm{Id}_n.$$
2. Les matrices $\lambda\mathrm{Id}$ dans $\mathrm{SL}_n(k)$ sont celles pour $\lambda \in \mu_n(k)$. Ainsi $\mathrm{SL}_n(k)/\mu_n(k)\mathrm{Id} = \mathrm{PSL}_n(k)$. Cela permet de tronquer le début de la suite exacte.
3. On peut tronquer la suite exacte de la première question en remplaçant $\mathrm{PGL}_n(k)$ par l'image de $\mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ qui est par définition $\mathrm{PSL}_n(k)$. Comme $\mathrm{car}(k) \neq 2$, nous avons
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\mathrm{Id} \neq \mathrm{Id}.$$
La matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est d'ordre 4 et sa classe dans $\mathrm{PSL}_n(k)$ est d'ordre 2. Si on avait un scindage, cette classe serait envoyée sur un élément de la classe. Ces élément sont précisément $\pm\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ qui sont d'ordre 4. Une telle section ne peut donc exister.

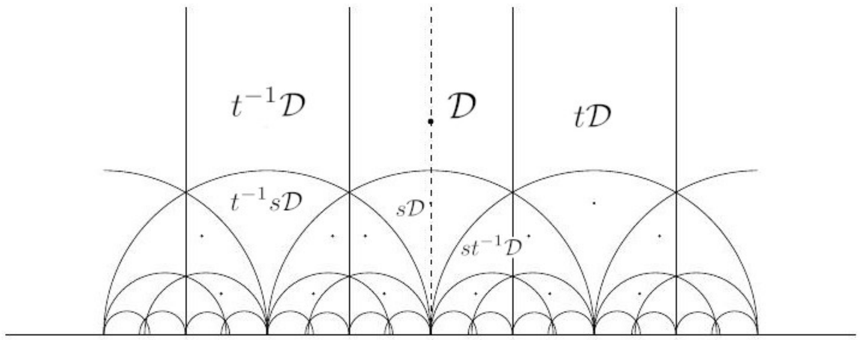
Exercice 3. Présentation de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

On définit une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ par
$$\left(\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$
On définit $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H} \,|\, |\mathrm{Re}(z)| \leq 1/2 \text{ et } |z| \geq 1\}$. On appelle s et t les classes dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. On choisira une fois pour toute le complexe $z_0 = 2i \in \mathrm{Int}(\mathcal{D})$.

1. Démontrer que si $g\mathrm{Int}(\mathcal{D}) \cap \mathrm{Int}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ alors $g = \pm\mathrm{Id}$. Démontrer que si $g\mathrm{Int}(\mathcal{D}) \cap \mathrm{Int}(\mathcal{D})$ n'est pas réduit à un point alors $g \in \{s, t, t^{-1}\}$.
2. En déduire que $\langle s, t\rangle = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. On pourra considérer, pour une matrice g un élément de partie imaginaire maximale dans l'orbite de gz_0 par $\langle S, T\rangle$.

Notre but est à présent de démontrer que les relations s^2 et $(st)^3$ engendrent toutes les relations. Soit $g_1 \dots g_n = 1$ avec $g_i \in \{s, t, t^{-1}\}$. On démontre par récurrence sur n que $g_1 \dots g_n$ appartient au sous-groupe distingué engendré par s^2 et $(st)^3$.

3. Traiter les cas $n \leq 2$.
4. Conclure lorsque $1 \leq i < j \leq n$ avec $(i, j) \neq (1, n)$ tel que $g_i \dots g_j = 1$. Conclure également lorsque deux g_i successifs valent s, lorsque $g_1 = g_n = s$, lorsque deux g_i successifs sont inverses l'un de l'autre ou que $\{g_1, g_n\} = \{t, t^{-1}\}$.
5. ● Dans le cas contraire, démontrer qu'il existe une application continue injective γ du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{H}$ telle que
$$\forall i, \ \ \gamma\left(\left]\frac{2i-1}{2n}, \frac{2i+1}{2n}\right[\right) \subset \mathrm{Int}(g_1 \dots g_i \mathcal{D}), \ \ \gamma\left(\frac{i}{n}\right) = g_1 \dots g_i z_0, \ \ \gamma\left(\frac{2i+1}{2n}\right) \in \mathcal{D} \cap g_{i+1}\mathcal{D}.$$



6. ● Démontrer que quitte à conjuguer notre relation, on peut se ramener à suppose que $g_1 = s$ et $g_2 = t^{\pm 1}$. On se place dans le cas où $g_2 = t$. En dessinant γ, puis en faisant un raisonnement rigoureux prouver successivement : $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset (\mathrm{Re} < 1/2)$ puis que $g_n = t$, puis que $\exists j,\ \gamma(j/n) = t^{-1}sz_0$.
7. ● En conjuguant, montrer qu'on peut se ramener à $t^{-1}sg_3 \dots g_{n-1}s = 1$. Considérer le chemin λ obtenu comme γ avec cette nouvelle relation en partant de $t^{-1}sz_0$. Démontrer que $\lambda(2/n) = \gamma(2/n)$. En déduire que $\lambda(j/n) = t^{-1}sz_0$ et conclure.

Correction de l'exercice 3 :

1. Soit $z \in \mathrm{Int}(\mathcal{D})$ tel que $gz \in \mathrm{Int}(\mathcal{D})$. Quitte à considérer gz et g^{-1}, on peut supposer que $|\mathrm{Im}(gz)| \geq |\mathrm{Im}(z)|$. Un calcul donne
$$\mathrm{Im}(gz) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$
soit $|cz+d| \leq 1$. En regardant la partie imaginaire on obtient $|c|\mathrm{Im}(z)$. Et comme $\mathrm{Im}(z) \geq \sqrt{3}2$, d'où $|c| \leq 2/\sqrt{3}$. En considérant que c est un entier trois cas s'offrent.

   Soit $c = 0$ et alors en regardant le déterminant, g agit comme une translation par un entier. Elle agit donc comme l'identité puisque $|\mathrm{Re}(gz)| \leq 1/2$.

   Sinon $c = \pm 1$ alors $|z \pm d| \leq 1$ d'où, en regardant la partie réelle $d = 0$. Ainsi, $|z| \leq 1$ ce qui est impossible.

   Nous renvoyons à ce développement d'agrégation pour les autres calculs.
2. Comme $|c(gz_0)+d| \geq 1$ sauf pour un nombre fini de couples (c,d), seul un nombre fini d'éléments dans l'orbite sont de partie imaginaire supérieure (reprendre le calcul de la partie imaginaire). Appelons z l'élément de partie imaginaire maximale dans l'orbite. Si z n'est pas dans $\cup_{n\in\mathbb{Z}} t^n\mathrm{Int}(\mathcal{D})$ alors il existe m tel que $|\mathrm{Re}(t^n z)| \leq 1/2$ alors $|z| < 1$. Son $\mathrm{Im}(st^n z) > \mathrm{Im}(z)$. Absurde. Ainsi, un élément de l'orbite appartient à $\mathrm{Int}(\mathcal{D})$. Il existe donc $h \in \langle s,t\rangle$ tel que $hgz_0 \in \mathrm{Int}(\mathcal{D})$. La première question implique que $h = \pm g$.
3. Le seul cas possible est $n = 2$. En regardant le domaine $g_1g_2\mathcal{D}$, la seule possibilité est s^2.
4. Quitte à conjuguer par $g_{i-1}^{-1}...g_1^{-1}$ ce qui ne change pas l'appartenance au sous-groupe distingué, peut supposer que $i = 1$. Alors, notre mot trivial se décompose en deux mots triviaux de taille plus petite. Par simplification ou conjugaison, les cas restant se réduisent également à des mots de taille plus petite.
5. En parcourant à la bonne vitesse les segments $[z_0, sz_0]$, $[z_0, tz_0]$ et $[z_0, t^{-1}z_0]$ on peut traiter regarder entre 0 et $1/n$. En appliquant les éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ à ces chemins et en les recollant, on obtient le chemin désiré.

6. Dans la relation, il doit exister au moins un s et un $t^{\pm 1}$. Il existe donc un $st^{\pm 1}$ ou un $t^{\pm 1}s$ dans le relation. En prenant la relation inverse, ce qui ne change pas l'appartenance au sous-groupe distingué, on peut supposer que $st^{\pm 1}$ existe. Quitte à conjuguer comme à la question 4, on peut supposer que c'est $st^{\pm 1}$. Suppsons qu'il existe x avec $|\mathrm{Re}(\gamma(x))| \geq 1/2$. En appliquant le TVI sur $[2/n, x]$, on trouve y tel que $\mathrm{Re}(\gamma(y)) = 0$. Ceci est impossible puisque γ est injectif et que tout le "chemin dans $\mathrm{Re} = 0$" est déjà pris entre sur $[0, 1/n]$. En regardant le chemin sur $[-1/n, 0]$, on voit qu'il doit partir sur la gauche, i.e. $g_n = t$. Ainsi, $\mathrm{Re}(\gamma(-1/n)) = -1$, par TVI à nouveau, il existe un autre moment où $\mathrm{Re} = -1$. Le seul point possible c'est $s^{-1}tz_0$.
7. On conjugue par $t^{-1}st^{-1}s$, on obtient $t^{-1}sg_3 \dots g_{n-1}tstst$ et la relation $(st)^3 = 1$ montrer que l'on peut trouver la relation indiquée sans modifier l'appartenance au sous-groupe distingué.

   L'égalité vient de ce que $\gamma(2/n) = stz_0$. De plus, $\lambda(2/n) = t^{-1}st^{-1}sz_0 = stz_0$. On en conclut que $\lambda(j/n) = \gamma(j/n)$. On peut donc appliquer la question 4 à λ.