TD n°5 : Actions de groupes et groupe symétrique

20 et 24/10/2023

Nous traiterons dans l'ordre les exercices 1, 2, 3, et 9. Vous pouvez naviguer librement parmi les exercices restants ou parmi ceux de votre polycopié. Les exercices ou question plus délicates de la feuille sont marqués d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis et vendredis juste avant le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.

Définition 1. Soit G un groupe. Dans ce TD, un G-ensemble sera un couple $(X, \bullet)$ où X est un ensemble non vide et $\bullet : G \times X \to X$ est une application qui vérifie les deux axiomes d'action de groupe.

Définition 2. Soit X un G-ensemble. L'action de G sera dite fidèle si le morphisme de groupes $m^\bullet : G \to \mathfrak{S}_X$ est injectif.

Exercice 1. Échauffement ?

Petit pot pourri de questions pour commencer.

1. L'action de μ_3 sur $\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 2\}$ par multiplication est-elle fidèle ?
   Et celle de $\mathbb{Z}$ sur ${}^{\mathbb{Z}}/_{3\mathbb{Z}}$ telle que $n \bullet (k + 3\mathbb{Z}) = 2^n k + 3\mathbb{Z}$?
   Et l'action canonique de $\mathfrak{S}_3$ sur $\{1, 2, 3\}$?
2. Quel est le groupe engendré par $(1\,2\,3\,4\,5)$ et $(1\,2)$ dans $\mathfrak{S}_5$? Par $(1\,2\,3\,4\,5)$ et $(1\,2\,3)$ dans $\mathfrak{S}_5$?
3. Démontrer que pour $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.
4. Soit G un groupe fini et $(X, \bullet)$ un G-ensemble fini. Démontrer que si l'action est transitive alors $|X|$ divise $|G|$.
5. Soit G un groupe fini et $(X, \bullet)$ un G-ensemble fini. Démontrer que si l'action est fidèle alors $|G|$ divise $|X|!$.

1 Action de groupe

Exercice 2. Lemme de Ore

Soit G un groupe fini et p le premier minimal divisant $|G|$. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.

<u>*Indication :*</u> *on pourra considérer l'action de G sur l'ensemble à p éléments ${}^{G}/_{H}$.*

Exercice 3. Morphismes de G-ensembles

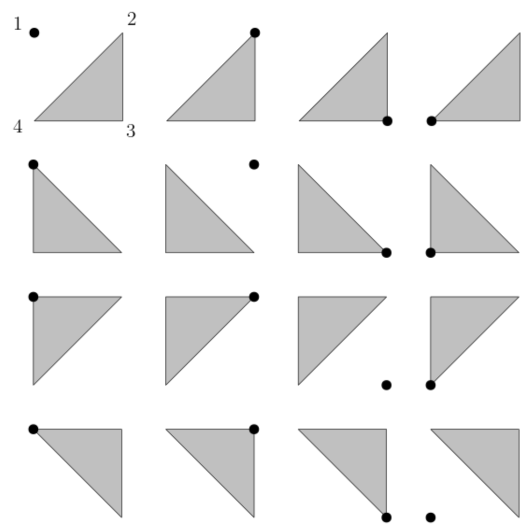
Cet exercice vise à comprendre un peu mieux la notion de morphismes de G-ensembles. Soit G un groupe. Un morphisme entre deux G-ensembles $(X, \bullet)$ et $(Y, \star)$ est une application $f : X \to Y$ telle que

$$\forall (g, x) \in G \times X, \ \ f(g \bullet x) = g \star f(x).$$

1. Démontrer que pour tout élément $x \in X$, nous avons $G_x \subseteq G_{f(x)}$.
2. Démontrer que l'image d'une orbite de X est égale[1] à une orbite de Y.

Ceci nous permet de restreindre la compréhension des morphismes de G-ensembles à celle des morphismes entre G-ensembles transitifs. Nous rappelons que les classes d'isomorphismes de tels G-ensembles sont paramétrées par les classes de conjugaison de sous-groupes de G, un sous-groupe H correspondant à l'ensemble des classes à gauche ${}^{G}/_{H}$ muni de la multiplication à gauche.

3. Nous fixons H et K deux sous-groupes de G. Démontrer que s'il existe un morphisme ${}^{G}/_{H} \to {}^{G}/_{K}$ alors l'un des conjugués de H est contenu dans K.
4. Exhiber une bijection entre les automorphismes de ${}^{G}/_{H}$ et le quotient ${}^{\mathrm{N}_G(H)}/_{H}$.
5. Pour utiliser ces résultats un peu théoriques, il convient de considérer un exemple concret. Considérons l'ensemble T&P des couples formés d'une partie à trois éléments et d'un élément de $\{1, 2, 3, 4\}$ que nous représentons comme suit.



Les permutations des éléments $1, 2$ et 3 fournissent une action de $\mathfrak{S}_3$ sur T&P. Démontrer qu'elle possède 6 automorphismes.

Exercice 4. Nombre moyen de points fixes

1. Soit G un groupe fini et $(X, \bullet)$ un G-ensemble fini. En considérant $\{(g, x) \in G \times X \,|\, g \bullet x = x\}$, démontrer que le nombre moyen de points fixes d'un élément de G vaut le nombre d'orbites, au sens où
$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$
vaut le nombre d'orbites.
2. Combien y a-t-il de colliers de 9 perles sans fermoir consitutés de 4 perles jaunes, 3 perles violettes et 2 perles rouges ? Nous considèrerons faire pivoter nos colliers circulaires ou les retourner donnent le même collier.

1. Elle n'est pas seulement contenue dans une orbite de Y.

Exercice 5. Il a beaucoup de classes de conjugaison

Soit $n \geq 1$. Démontrer qu'il n'existe un nombre fini de classes d'isomorphismes de groupes finis avec exactement n classes de conjugaison.

2 Groupe symétrique

Exercice 6. Autour de la signature

Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme non trivial $\mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$. En déduire que $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que tout morphisme $\mathfrak{A}_n \to \{\pm 1\}$ est trivial. En déduire que $\mathfrak{A}_4$ ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 7. Sous-groupes $(n-2)$-transitifs

Notre but dans cet exercice est de caractériser les sous-groupes $(n-2)$-transitifs de $\mathfrak{S}_n$.

1. Soit $k \geq 1$. Soit G un groupe et $(X, \bullet)$ un G-ensemble de cardinal supérieur à $k+1$. Démontrer que l'action est $(k+1)$-transitive si et seulement si elle est transitive et que pour tout $x \in X$, l'action de G_x sur $X \backslash \{x\}$ est k-transitive.
2. Soit G un groupe fini agissant k-transitivement sur un ensemble fini X. Démontrer que $|X|(|X| - 1) \ldots (|X| - k + 1)$ divise $|G|$.
3. En déduire que les seuls sous-groupes $(n-2)$-transitifs [2] de $\mathfrak{S}_n$ pour son action sur $\{1, \ldots, n\}$ sont $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 8. Classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$

Rappelons que les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ correspondent aux partitions de n, la classe correspondant à une partition étant les permutations qui ont ce type.

1. Quelles classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$ sont-elles constituées d'éléments de $\mathfrak{A}_5$?
2. Démontrer qu'une classe de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ contenue dans $\mathfrak{A}_n$ est union d'au plus deux classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_n$. Donner ensuite les classes de conjugaisons de $\mathfrak{A}_5$.
3. ● Donner une condition nécessaire et suffisante sur un élément de $\mathfrak{A}_n$ pour que sa classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ vale sa classe de conjugaison dans $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 9. Action transitive de $\mathfrak{S}_4$ sur 6 éléments

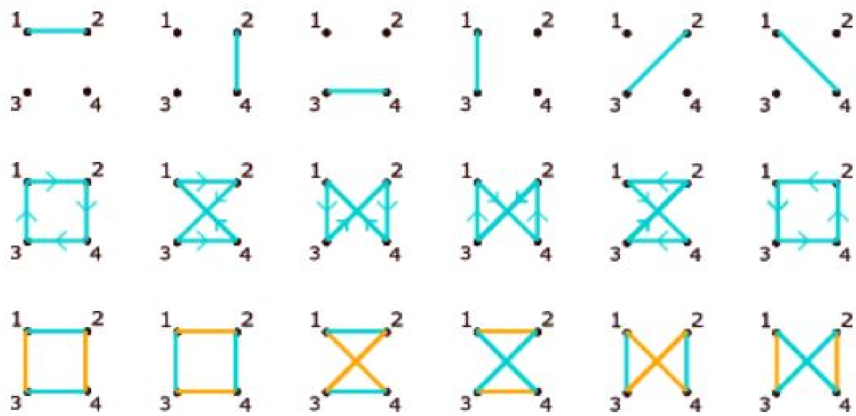
Le but de cet exercice est de classer à isomorphisme près les actions transitives de $\mathfrak{S}_4$ sur 6 éléments.

1. Nous définissons A comme l'ensemble des 4-cycles de $\mathfrak{S}_4$ sur lesquels $\mathfrak{S}_4$ agit par conjugaison. Démontrer que le $\mathfrak{S}_4$-ensemble A est transitif à 6 éléments, que le stabilisateur du cycle c est $\langle c \rangle$ puis que l'action est fidèle.

2. Au sens où l'action canonique que $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, \ldots, n\}$ se restreint à ce sous-groupe en une action $(n-2)$-transitive.

2. Nous définissons B comme l'ensemble des parties de cardinal 2 de $\{1,2,3,4\}$ et nous faisons agit $\mathfrak{S}_4$ dessus. Démontrer que le $\mathfrak{S}_4$-ensemble B est transitif à 6 éléments, décrire le stabilisateur de $\{i,j\}$ puis démontrer que l'action est fidèle.
3. Trouver une action transitive de $\mathfrak{S}_3$ sur un ensemble à 6 éléments dont tous les stabilisateurs sont triviaux. En déduire une action transitive de $\mathfrak{S}_4$ sur un ensemble à 6 éléments pour laquelle tous les stabilisateurs valent K_4 (en particulier son noyau vaut K_4).
4. Démontrer qu'un sous-groupe d'ordre 4 de $\mathfrak{S}_4$ est égal au stabilisateur d'un élément de A, au stabilisateur d'un élément de B ou à K_4. En déduire un classement des actions transitives de $\mathfrak{S}_4$ sur un ensemble à 6 éléments à isomorphisme près.

Nous donnons une représentation graphique des éléments des trois actions pour se les représenter.



5. ● Existe-t-il d'autres sous-groupes transitifs d'indice 30 dans $\mathfrak{S}_6$ que ceux obtenus grâce aux actions des deux premiers types ?

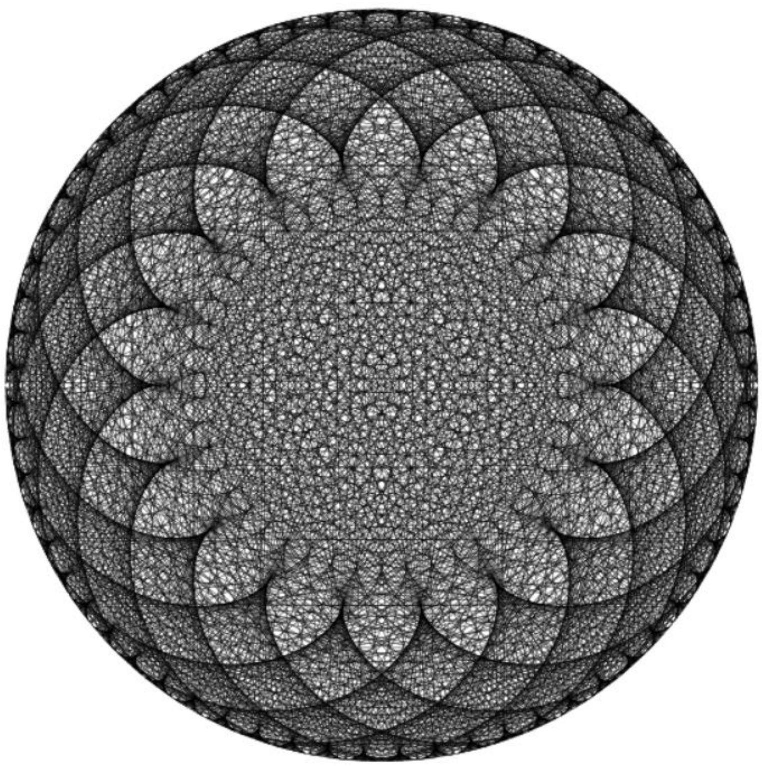


FIGURE 1 – Puissance 65^e appliquée aux racines 1554-ièmes de l'unité.