TD n°5 : Actions de groupes et théorèmes de Sylow

22 et 25/10/2024

Nous traiterons dans l'ordre les exercices 1, 2, 3 et 6. Les exercices les plus délicats de la feuille sont marqués d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis juste avant le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.

Exercice 1. Lemme de Ore

Soit G un groupe fini et p le premier minimal divisant $|G|$. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.

Indication : on pourra considérer l'action de G sur l'ensemble à p éléments ${}^{G}/_{H}$.

Exercice 2. Nombre moyen de points fixes

1. Soit G un groupe fini et $(X, \bullet)$ un G-ensemble fini. En considérant $\{(g,x) \in G \times X \mid g \bullet x = x\}$, démontrer que le nombre moyen de points fixes d'un élément de G vaut le nombre d'orbites, au sens où
$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)|$$
vaut le nombre d'orbites.
2. Combien y a-t-il de colliers de 9 perles sans fermoir consitutés de 4 perles jaunes, 3 perles violettes et 2 perles transparentes ? Nous considèrerons faire pivoter nos colliers circulaires ou les retourner donnent le même collier.

Exercice 3. Des exemples de Sylows

Pour chacun des groupes suivants et chaque premier p intervenant dans son cardinal, donner un p-Sylow, l'identifier à un p-groupe classique, puis donner le nombre de p-Sylow.

1. Le groupe $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$.
2. Le groupe $\mathfrak{S}_5$.
3. ● Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

● Exercice 4. Sylow et nilpotence

Soit G un groupe fini. Démontrer que sont équivalents :

i) Le groupe G est nilpotent.
ii) Pour tout premier p, le groupe G n'a qu'un seul p-Sylow.
iii) Le groupe G est un produit de p-groupes.

Exercice 5. Groupes d'ordre p^2

Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^2.

1. Rappeler pourquoi le centre d'un p-groupe non trivial n'est pas trivial.
2. En déduire que G est abélien. Décrire les classes d'isomorphismes de groupes d'ordre p^2.

Exercice 6. Groupes d'ordre 105

Soit G un groupe d'ordre $105 = 3^1 5^1 7^1$.

1. Démontrer que G contient un unique 5-Sylow ou un unique 7-Sylow.
2. Démontrer que G contient un sous-groupe d'ordre 35.
3. ● Classer les groupes d'ordre 105.

Exercice 7. Groupes d'ordre p^3

Soit p un nombre premier impair. Le but de cet exercice est de décrire à isomorphisme près les groupes finis de cardinal p^3. Nous donnerons trois méthodes selon l'ordre maximal d'un élément.

La première question traite du cas où il existe un élément d'ordre p^3 dans notre groupe G.

1. Démontrer que le groupe G est isomorphe à
$$\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}.$$

Les questions suivantes traitent du cas où l'ordre maximal d'un élément de G est p^2.

2. Démontrer que si G est abélien, il est isomorphe à
$$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$
3. Nous supposons désormais que G n'est pas abélien. Soit x un élément d'ordre p^2. Démontrer que $G/\mathrm{Z}(G)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ puis que x n'est pas central.
4. Démontrer qu'il existe $y \notin \langle x \rangle$ tel que $x^p = y^p$ et $(\overline{x}, \overline{y})$ forment une base du quotient par le centre.
5. ● Démontrer que $[x^{-1} : y]$ est central, puis que
$$(yx^{-1})^p = [y : x^{-1}]^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$
6. ● En utilisant que p est impair, démontrer qu'il existe un élément d'ordre p qui n'appartient pas à $\langle x \rangle$ et en déduire que G est isomorphe au groupe
$$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$
où $\varphi(a) = [z \mapsto (1+p)^a z]$.

Les questions suivantes traitent du cas où l'ordre maximal d'un élément de G est p, autrement dit où G est p-élémentaire.

7. Démontrer qu'il existe un sous-groupe distingué de G isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
8. En considérant que les p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sont conjugués, conclure que G est isomorphe à l'un des deux groupes
$$\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^3 \text{ et } \mathrm{U}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

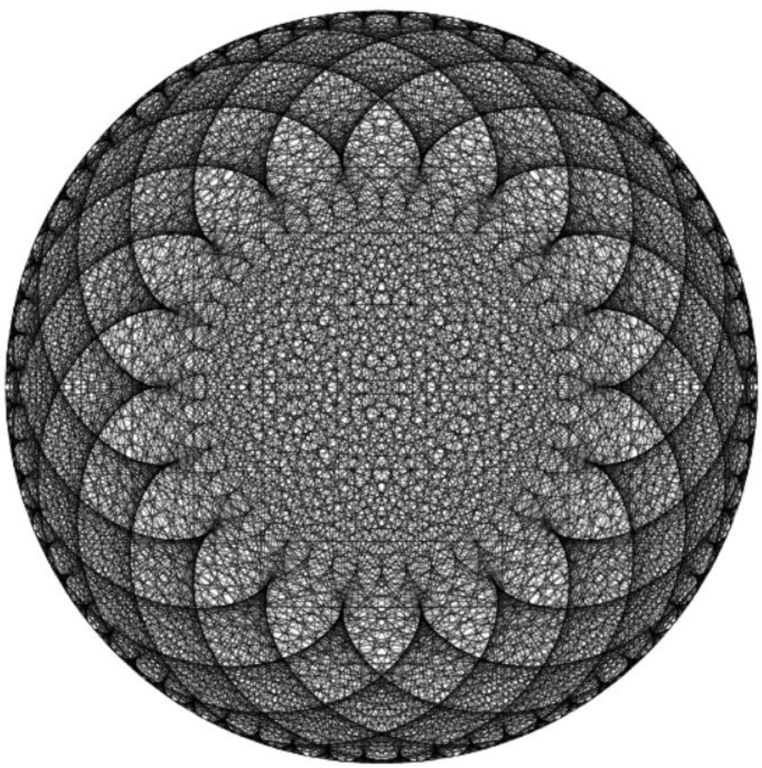

FIGURE 1 – Puissance 65^e appliquée aux racines 1554-ièmes de l'unité.