Correction du TD n°5 : Actions de groupes et théorèmes de Sylow

22 et 25/10/2024

Exercice 1. Lemme de Ore

Soit G un groupe fini et p le premier minimal divisant $|G|$. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.

Indication : on pourra considérer l'action de G sur l'ensemble à p éléments G/H.

Correction de l'exercice 1 :

Soit H un sous-groupe d'indice p. On considère l'action canonique de G sur les classes à gauche G/H. Appelons K le noyau de cette action. C'est un sous-groupe distingué de G contenu dans le stabilisateur de H, qui vaut H. Nous déduisons de $K \subseteq H$ que $p|[G : K]$. Puisque le groupe quotient G/K s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$. L'indice de $[G : K]$ divise $p!$. Enfin, par définition de p, l'indice ne contient que des facteurs premiers supérieurs ou égaux à p. Il en découle que $[G : K] = p$ donc que $K = H$. Le sous-groupe H est par conséquent distingué.

***Remarque :** vous pouvez essayer de régler le cas $p = 2$ sans action de groupe.*

Exercice 2. Nombre moyen de points fixes

1. Soit G un groupe fini et $(X, \bullet)$ un G-ensemble fini. En considérant $\{(g, x) \in G \times X \mid g \bullet x = x\}$, démontrer que le nombre moyen de points fixes d'un élément de G vaut le nombre d'orbites, au sens où
$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$
vaut le nombre d'orbites.
2. Combien y a-t-il de colliers de 9 perles sans fermoir consitutés de 4 perles jaunes, 3 perles violettes et 2 perles transparentes ? Nous considèrerons faire pivoter nos colliers circulaires ou les retourner donnent le même collier.

Correction de l'exercice 2 :

1. On calcul $|\{(g, x) \in G \times X \mid g \bullet x = x\}|$ en sommant d'abord sur G
$$|\{(g, x) \in G \times X \mid g \bullet x = x\}| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$
puis en sommant sur X
$$\begin{aligned} |\{(g, x) \in G \times X \mid g \bullet x = x\}| &= \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)| \\ &= \sum_{O \text{ orbite}} \sum_{x \in O} |\mathrm{Stab}(x)| \\ &= \sum_{O \text{ orbite}} |\mathrm{Stab}(x)| \times |O| \\ &= \text{nombre d'orbites} \times |G| \end{aligned}$$

Pour passer à la troisième ligne, on utilise que les stabilisateurs d'éléments d'une même orbite sont conjugués. Le passage à la quatrième ligne résulte de l'équation aux classes.

2. On considère l'ensemble des couleurs $\{J, V, T\}$. Sur l'ensemble

$$\left\{ f \in \{J, V, T\}^{\mu_9} \,\middle|\, |f^{-1}(J)| = 4,\, |f^{-1}(V)| = 3,\, |f^{-1}(T) = 2 \right\}$$

des "colliers ordonnés", on fait agit les isométries de l'ennéagone μ_9 par permutation des sommets. Le nombres de colliers recherché est le nombre d'orbites. Cet ensemble est de cardinal $\binom{9}{4\,3\,2} = 1260$.

En utilisant la première question, on cherche le nombre de colliers fixes par chaque isométrie. L'identité, qui les fixe tous. Les deux rotations d'ordre 3 : si un collier est fixé par une de ces rotations, comme les orbites de μ_9 sous cette rotation est formé de classes de cardinal 3 qui doivent avoir même couleur, il n'y a pas de points fixes. De même la rotation d'ordre 9 ne fixe aucun collier. Les 9 isométries restantes sont des symétries par rapport à la droite passant par l'une des racines de μ_9. Pour qu'un collier soit fixe, la perle sur ladite droite doit être violette et les autres reparties de manière symétrique de part et d'autre, ce qui fait $\binom{4}{2\,1\,1} = 12$ possibilités. Nous avons donc

$$\frac{1}{18}\,(1260 + 9 \times 12) = 76 \text{ colliers.}$$

Exercice 3. Des exemples de Sylows

Pour chacun des groupes suivants et chaque premier p intervenant dans son cardinal, donner un p-Sylow, l'identifier à un p-groupe classique, puis donner le nombre de p-Sylow.

1. Le groupe $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$.
2. Le groupe $\mathfrak{S}_5$.
3. ● Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

Correction de l'exercice 1 :

1. Le cardinal s'écrit $28 = 4 * 7$. Le théorème des restes chinois donne un isomorphisme

$$\mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Ceci illustre qu'un 2-Sylow (donc tous) isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et ledit Sylow est distingué donc unique par abélianité que $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$: c'est $7\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$. Un 7-Sylow (donc tous) est isomorphe à $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, et ledit Sylow est distingué donc unique par abélianité que $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$: c'est $4\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$.

2. Le cardinal de $\mathfrak{S}_5$ s'écrit $120 = 8 * 3 * 5$.

Un 5-Sylow est de cardinal 5 ; c'est le sous-groupe engendré par un 5-cycle. Il y en a $4*3*2/4 = 6$ et ils sont isomorphes à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Un 3-Sylow est de cardinal 3 ; c'est le sous-groupe engendré par un 3-cycle. Il y en a $5*4*3/3*2 = 10$ et ils sont isomorphes à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Un 2-Sylow est de cardinal 8 et contient chaque type cyclique qui donne des permutations d'ordre 2-primaire puisque les 2-Sylow sont conjugués et contiennent tous les 2-sous-groupes. Un 2-Sylow contient ainsi un 4-cycle et une transposition qui normalise le sous-groupe engendré. Supposons que mon 2-Sylow contienne $(1\,2\,3\,4)$. Le normalisateur du sous-groupe engendré commute au carré $(1\,3)(2\,4)$. Les seules tranpositions qui peuvent normaliser sont ainsi $(1\,3)$ et $(2\,4)$ et donnent le même 2-Sylow. Le seul sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans notre 2-Sylow est celui engendré par le 4-cycle. Ainsi, un 2-Sylow est la partie 2-primaire du normalisateur du sous-groupe engendré par un 4-cycle. Il y en a donc $5*4*3*2/4*2 = 15$ et ils sont isomorphes à D_8.

3. Le cardinal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ s'écrit $(25-1)(25-5) = 480$. Pour obtenir celui du groupe spécial, on divise par $|(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times|$. Ce qui donne $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})| = 120 = 2^3 3^1 5^1$.
   Un élément d'ordre 5 est donné par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Pour calculer le nombre de 5-Sylow, il faut calculer combien de matrices g vérifie
   $$g\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)g^{-1} \in \langle\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$
   Elles s'écrivent $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$, ce qui donne 6 classes de conjugaison (elles correspondent au nombre de droites).
   N'hésitez pas à me demander pour une correction concernant les autres sous-groupes, qui sont plus difficiles à trouver.

Exercice 6. Groupes d'ordre 105

Soit G un groupe d'ordre $105 = 3^1 5^1 7^1$.

1. Démontrer que G contient un unique 5-Sylow ou un unique 7-Sylow.
2. Démontrer que G contient un sous-groupe d'ordre 35.
3. ● Classer les groupes d'ordre 105.

Correction de l'exercice 6 :

1. Si ce n'était pas le cas, les théorèmes de Sylow disent que $\mathrm{n}_5(G) = 21$ et $\mathrm{n}_7(G) = 15$. On compte les éléments d'ordre 1, d'ordre 5 (il y en a 4 par Sylow puisqu'ils sont disjoints) et d'ordre 7 (il y en a 6 par Sylow). Cela donne
   $$1 + 4 * 21 + 6 * 15 > 105$$
   ce qui est absurde.
2. Supposons qu'il existe un unique 5-Sylow S. Soit g d'ordre 7. L'action par conjugaison de $\langle g \rangle$ sur S fournit un morphisme de $\langle g \rangle$ dans $\mathrm{Aut}(S)$ qui est trivial puisque les cardinaux sont premiers entre eux (respectivement 7 et 4). Ainsi g commute à tous les éléments de S et $S\langle g \rangle$ est un sous-groupe d'ordre 35.
3. Je donne les idées grossières. Envoyez-moi un mail si vous voulez plus de détails. Comme le sous-groupe d'ordre 35 est d'indice 3, le lemme d'Ore affirme qu'il et distingué. De plus comme $5 \nmid 7 - 1$, le sous-groupe d'ordre 35 est cyclique. On choisit un élément d'ordre 3 par Cauchy. Notre groupe est isomorphe à un produit semi-direct
   $$\mathbb{Z}/35\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$
   et il y a deux classes d'isomorphismes de tels produits semi-directs.