TD n°6 : Groupe symétrique

5 et 8/11/2024

Exercice 1. Échauffement ?

Petit pot pourri de questions pour commencer.

1. Quel est le groupe engendré par $(1\,2\,3\,4\,5)$ et $(1\,2)$ dans $\mathfrak{S}_5$? Par $(1\,2\,3\,4\,5)$ et $(1\,2\,3)$ dans $\mathfrak{S}_5$?
2. Démontrer que pour $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.
3. Pour $p = 2, 3, 5$, donner un p-Sylow, l'identifier à un p-groupe classique, puis donner le nombre de p-Sylow du groupe $\mathfrak{S}_5$.

Correction de l'exercice 1 :

1. En conjugant $(1\,2)$ par les puissances $(1\,2\,3\,4\,5)$, on obtient tous les $(i\,i+1)$ et $(1\,5)$. En conjugant à présent ces transpositions entre elles, nous obtenons toutes les permutations. Par exemple,
$$(1\,3) = (1\,2)(2\,3)(1\,2).$$
Les permutations engendrant $\mathfrak{S}_5$, il en découle que $\langle(1\,2\,3\,4\,5), (1\,2)\rangle = \mathfrak{S}_5$.
Les deux permutations étant paires, il est déjà possible d'affirmer que le groupe engendré sera contenu dans $\mathfrak{A}_5$. En conjugant $(1\,2\,3)$ par $(1\,2\,3\,4\,5)^2$, nous obtenons $(3\,4\,5)$. En conjuguant $(1\,2\,3)$ par des puissances de $(3\,4\,5)$, nous obtenons tous les 3-cycles du type $(1\,2\,a)$. Or, un 3-cycle dans $\mathfrak{S}_5$ s'écrit nécessairement $(i\,i+1\,b)$ pour un certain i. En conjugant les $(1\,2\,a)$ par des puissances de $(1\,2\,3\,4\,5)$, nous obtenons tous les 3-cycles, qui engendrent $\mathfrak{A}_5$. Par conséquent,
$$\langle(1\,2\,3\,4\,5), (1\,2\,3)\rangle = \mathfrak{A}_5.$$
2. Soit $(a\,b\,c)$ un 3-cycle. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui envoie $1, 2$ et 3 sur a, b et c. Alors $\sigma(1\,2\,3)\sigma^{-1} = (a\,b\,c)$. C'est également le cas de la conjugaison par $\sigma(4\,5)$. L'une des deux permutations σ ou $\sigma(4\,5)$ est paire ce qui conclut que $(1\,2\,3)$ et $(a\,b\,c)$ sont conjugués sous $\mathfrak{A}_n$.
3. Le cardinal de $\mathfrak{S}_5$ s'écrit $120 = 8 * 3 * 5$.
Un 5-Sylow est de cardinal 5 ; c'est le sous-groupe engendré par un 5-cycle. Il y en a ${}^{4*3*2}/_4 = 6$ et ils sont isomorphes à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
Un 3-Sylow est de cardinal 3 ; c'est le sous-groupe engendré par un 3-cycle. Il y en a ${}^{5*4*3}/_{3*2} = 10$ et ils sont isomorphes à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Un 2-Sylow est de cardinal 8 et contient chaque type cyclique qui donne des permutations d'ordre 2-primaire puisque les 2-Sylow sont conjugués et contiennent tous les 2-sous-groupes. Un 2-Sylow contient ainsi un 4-cycle et une transposition qui normalise le sous-groupe engendré. Supposons que mon 2-Sylow contienne $(1\,2\,3\,4)$. Le normalisateur du sous-groupe engendré commute au carré $(1\,3)(2\,4)$. Les seules tranpositions qui peuvent normaliser sont ainsi $(1\,3)$ et $(2\,4)$ et donnent le même 2-Sylow. Le seul sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans notre 2-Sylow est celui engendré par le 4-cycle. Ainsi, un 2-Sylow est déterminé par le sous-groupe d'ordre 4 qu'il contient : il suffi d'y ajouter une transposition dans le normalisateur dudit sous-groupe d'ordre 4. Il y en a donc ${}^{5*4*3*2}/_{4*2} = 15$ et ils sont isomorphes à D_8.

Exercice 2. Autour de la signature

Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme non trivial $\mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$. En déduire que $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que tout morphisme $\mathfrak{A}_n \to \{\pm 1\}$ est trivial. En déduire que $\mathfrak{A}_4$ ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6.

Correction de l'exercice 2 :

1. Puisque les transpositions sont conjuguées et que le but est abélien, elles ont toutes même image. Si l'image des transposition vaut 1, comme les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$, le morphisme est trivial. Sinon, il coïncide avec la signature.

   Un sous-groupe H d'indice 2 est distingué. Il produit donc un morphisme $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n/H \cong \{\pm 1\}$ non trivial dont H est le noyau. D'après la première question, ce morphisme est la signature et $H = \mathfrak{A}_n$.
2. Tout 3-cycle c vérifie $c = (c^{-1})^2$. Ainsi, l'image de tout 3-cycle par un tel morphisme est triviale. Comme les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$, un tel morphisme est trivial.

   Un sous-groupe d'ordre 6 de $\mathfrak{A}_4$ est d'indice 2, donc correspond à un morphisme non trivial vers $\{\pm 1\}$.

Exercice 4. Action exceptionnelle

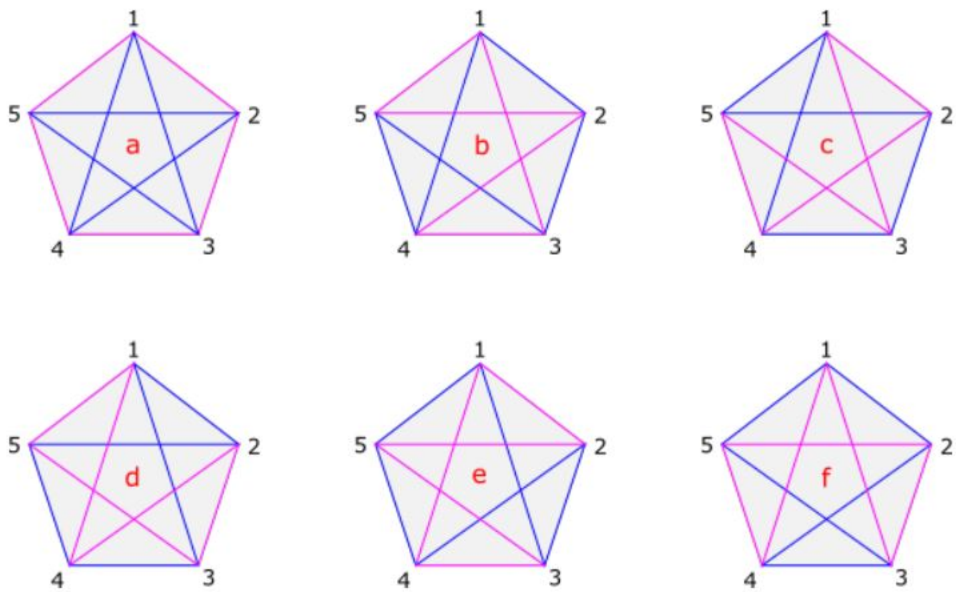
Nous cherchons à retrouver l'action "poisson et chauve-souris" de $\mathfrak{S}_5$.

1. Démontrer que les 5-Sylows de $\mathfrak{A}_5$ sont au nombre de 6.
2. En déduire une action de $\mathfrak{S}_5$ transitive sur 6 éléments.
3. Démontrer qu'une telle action est fidèle.
4. Essayer de la retrouver explicitement avec des dessins de pentacles, et sa restriction à $\mathfrak{A}_5$ avec un icosaèdre (l'énoncé de cette question est très floue, je suis d'accord).

Correction de l'exercice 3 :

1. D'après le théorème des Sylows, nous avons $n_5 | 12$ et $n_5 \equiv 1 \mod 5$. De plus, tous les 5-cycles ne sont pas puissances les un des autres, ce qui implique qu'il y a plusieurs 5-Sylows. On trouve donc 12 à partir de ces conditions.
2. On fait agir $\mathfrak{S}_5$ par conjugaison sur ses 5-Sylows. Le théorème de Sylow affirme en particulier que l'action est transitive.
3. Soit $x \in X$ muni d'une telle action. Comme $X = \mathrm{Orb}(x)$, on obtient que $6 | [\mathfrak{S}_5 : \mathrm{Stab}(x)] | [\mathfrak{S}_5 : K]$ où K est le noyau de l'action. Puisque les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_5$ sont $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathfrak{A}_5$ et $\mathfrak{S}_5$, on en déduit que K est trivial, i.e. que l'action est fidèle.
4. On fait agir $\mathfrak{S}_5$ sur les "coloriages"[1] suivants par permutation des sommets

1. Précisément les boucles passant une et une seule fois par chaque sommet



Vous voyez qu'il a un "coloriage" pentagone/pentacle et cinq "coloriages" chauve-souris/poisson. On remarque que $(3\,4\,5)$ envoie le pentagone/pentacle sur la paire d'animaux c et que $(1\,2\,3\,4\,5)$ permute les paires d'animaux. L'action est donc transitive. On vérifie en regardant son noyau qu'il contient bien un 5-cycle et une paire de transpositions : c'est donc le normalisateur d'un 5-cycle et on a identifié les actions[2].

Pour l'icosaèdre, on a que $\mathfrak{A}_5$ est le groupe d'isométries directes de l'icosaèdre. Les triplets d'arêtes formant un repère orthonormé sont au nombre de 6, et c'est sur eux que l'on agit.

2. Demandez-moi des précisions par mail si vous voulez !