TD n°7 : Symétries et groupes orthogonaux

17 et 21/11/2023

Nous traiterons dans l'ordre les exercices 2,3, 6 et 7. Vous pouvez naviguer librement parmi les exercices restants ou parmi ceux de votre polycopié. Les exercices les plus délicats de la feuille sont marqués d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis et vendredis juste avant le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.

1. Groupes orthogonaux

Exercice 1. Nombre moyen de points fixes

1. Soit G un groupe fini et $(X, \bullet)$ un G-ensemble fini. En considérant $\{(g, x) \in G \times X \mid g \bullet x = x\}$, démontrer que le nombre moyen de points fixes d'un élément de G vaut le nombre d'orbites, au sens où
$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$
vaut le nombre d'orbites.
2. Combien y a-t-il de colliers de 9 perles sans fermoir consitués de 4 perles jaunes, 3 perles violettes et 2 perles rouges ? Nous considèrerons faire pivoter nos colliers circulaires ou les retourner donnent le même collier.

Exercice 2. Une lichette de polytopes

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et T un ensemble fini non vide de points de V. Nous appelons $\mathcal{P}$ l'enveloppe convexe de T (c'est la définition d'un polytope). Les isométries du polytope $\mathcal{P}$ sont définies comme $\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) = \{g \in \mathrm{O}(V) \mid g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\}$.

1. Un point x de $\mathcal{P}$ est appelé sommet [1] s'il ne s'exprime pas comme combinaison convexe d'autres points de $\mathcal{P}$, i.e.
$$\forall y, z \in \mathcal{P},\ x \in]y, z[\Rightarrow y = x = z.$$
On appelle S l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}$. Démontrer que $S \subseteq T$, puis que $\mathcal{P}$ est l'enveloppe convexe de S.
2. Démontrer que $\mathrm{Iso}(\mathcal{P})$ envoie les sommets sur des sommets.
3. Démontrer qu'un élément $g \in \mathrm{O}(V)$ qui stabilise T est un élément de $\mathrm{Iso}(\mathcal{P})$.

1. La définition formelle qui suit est équivalente à la définition d'une face de dimension nulle.

Exercice 3. Symétries de l'isocaèdre

Cet exercice vise à comprendre le cas le plus délicat du classement des sous-groupes finis de SO(3).

Résumons les arguments que nous supposons déjà donnés : un élément non trivial de SO(3) possède exactement deux points fixes ; soit G un sous-groupe fini de SO(3) et X l'ensemble des points fixes de ses éléments non triviaux sur la sphère unité. La formule de Burnside-Frobenius permet de donner des conditions arithmétiques très fortes sur cet ensemble. Cet exercice se place dans le cas où G est de cardinal 60 et où le G-ensemble X possède trois orbites de tailles respectives 30, 20 et 12. On cherche à démontrer que dans ce cas, G est le groupe d'isométries directes d'un icosaèdre, qui est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$ grâce au cours.

Appelons suggestivement S la troisième orbite, celle à 12 éléments, et choisissons $x \in S$.

1. Calculer $|G_x|$. En déduire que G_x est cyclique d'ordre 5 formés de rotations orthogonales d'ordre 5 et d'axe $\mathbb{R}x$.
2. Démontrer que $S = \{x, -x\} \cup P_x \cup P'_x$, où P_x et P'_x sont de cardinal 5, contenus dans des plans affines d'orthogonal $\mathbb{R}x$. Démontrer que les orbites P_x et P'_x sont des pentagones réguliers.
3. En considérant que le choix de x est arbitraire, déduire de la question précédente que $S = -S$, puis que pour tout $x \in S$ on a $P'_x = -P_x$.
4. Démontrer P_x est dans un plan affine d'orthogonal $\mathbb{R}x$ qui est différent du plan $(\mathbb{R}x)^\perp$.

À ce stade, on définit $\mathcal{I}$ comme l'enveloppe convexe de S et nous voudrions montrer qu'il s'agit d'un icosaèdre. Le dessin suivant illustre la situation et convainc que $\mathcal{I}$ est un polyèdre à 12 sommets et 20 faces triangulaires (sur le dessin, les deux pyramides bleues à base pentagonale sont censées être isométriques et symétriques par rapport à l'origine).

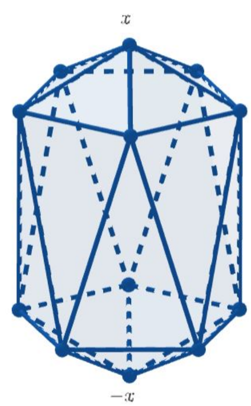

FIGURE 1 – La situation avec deux pentagones symétriques dont tous les points sont permutés par G_x.

5. En considérant que le choix de x est arbitraire, démontrer que toutes les faces de $\mathcal{I}$ sont des triangles équilatéraux et isométriques. Ce dernier point démontre que $\mathcal{I}$ est un icosaèdre.
6. Démontrer que G est exactement le groupe d'isométries directes de $\mathcal{I}$.

   <u>*Indication :*</u> *on pourra utiliser l'exercice précédent.*
7. Identifier les deux autres orbites à 30 et 20 éléments.

Nous obtenons ainsi un icosaèdre, illustré par le dessin suivant :

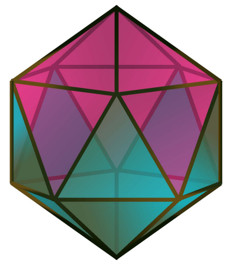

Figure 2 – Un icosaèdre.

Exercice 4. Simplicité de SO(3)

On se propose de montrer que le groupe SO(3) est simple.

1. Soit g dans SO(3) une rotation d'angle[2] θ. Montrer $\mathrm{Tr}(g) = 1 + 2\cos(\theta)$.
2. Montrer que deux éléments de SO(3) sont conjugués si, et seulement si, ils ont même trace.
3. Quels sont les $g \in \mathrm{SO}(3)$ avec $\mathrm{Tr}(g) = 3$?

On fixe H un sous-groupe distingué de SO(3).

1. On suppose $\mathrm{Tr}(H) \supset]x, 3]$ pour un certain $x < 3$. Montrer $H = \mathrm{SO}(3)$.
2. Conclure en considérant l'application $\mathrm{SO}(3) \times H \to \mathbb{R}$, $(g, h) \mapsto \mathrm{Tr}([g, h])$. On pourra utiliser la topologie du groupe SO(3).

2. Quaternions et géométrie

Exercice 5. Introduction aux quaternions

Cet exercice propose une rapide introduction au groupe et à l'algèbre des quaternions. On considère les quatres matrices

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{I} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

1. Démontrer que $(\mathbf{1}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ est libre sur $\mathbb{C}$, que $\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = -\mathbf{1}$ et que $\mathbf{IJ} = \mathbf{K}$.

2. On rappelle que si $g \neq 1$, g a une unique droite fixe, et définit une rotation du plan orthogonal : c'est de l'angle de cette rotation dont on parle. On convient qu'il est nul pour $g = 1$.

2. Vérifier les identités suivantes :

$$\mathrm{t}(t\mathbf{1} + x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}) = 2t = \mathrm{Tr}(q) \text{ et } \mathrm{n}(t\mathbf{1} + x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}) = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \det(q).$$

Pour la suite, on appellera algèbre des quaternions, la sous-$\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ engendrée par la famille $(\mathbf{1}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$.

2. Démontrer que $(\mathbf{1}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ fournit une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{H}$. Démontrer que le polynôme $\chi_q(X) = X^2 - \mathrm{t}(q)X + \mathrm{n}(q)$ qui annule q.
3. Vérifier que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.

Rappelons que le groupe des quaternions H_8 est défini comme $\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{I}, \pm\mathbf{J}, \pm\mathbf{K}\}$.

4. Démontrer que H_8 est l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}\mathbf{1} + \mathbb{Z}\mathbf{I} + \mathbb{Z}\mathbf{J} + \mathbb{Z}\mathbf{K}$. Calculer son centre et en déduire que la propriété "tout sous-groupe fini des inversibles d'un corps est cyclique" tombe en défaut pour les corps gauches.

Exercice 6. Préliminaires sur les quaternions de Hurwitz

Nous conservons les notations de l'exercice précédent pour tous les objets qui interviennent dans la définition et l'étude de $\mathbb{H}$. On considère l'élément $\omega = \frac{\mathbf{1}+\mathbf{I}+\mathbf{J}+\mathbf{K}}{2}$ de $\mathbb{H}$ et on définit les quaternions de Hurwitz par

$$\mathbb{H}\mathrm{ur} = \mathbb{Z}\mathbf{1} + \mathbb{Z}\,\mathbf{I} + \mathbb{Z}\,\mathbf{J} + \mathbb{Z}\,\mathbf{K} + \mathbb{Z}\omega.$$

1. Montrer que $\mathbb{H}\mathrm{ur}$ est un sous-anneau de $\mathbb{H}$, et $\chi_q \in \mathbb{Z}[X]$ pour tout $q \in \mathbb{H}\mathrm{ur}$.
2. Montrer $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times = \{q \in \mathbb{H}\mathrm{ur} \mid \mathrm{n}(q) = 1\}$.
3. En déduire $|\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times| = 24$ et lister les 24 éléments de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ ainsi que leurs polynômes caractéristiques.

Exercice 7. Vers l'icositétrachore

Le but de cet exercice est de construire grâce aux quaternions de Hurwitz un polytope régulier dans $\mathbb{R}^4$ ayant 24 sommets, 96 arêtes, 96 faces triangulaires et 24 cellules octaédriques.

Nous munissons $\mathbb{H}$ associé à la forme quadratique $q \mapsto \mathrm{n}(q)$. Nous prenons comme sommets $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ et $\mathcal{P}$ le polytope associé, appelé icositétrachore ou 24-cellules.

1. Pour tout quaternion q, on appelle L_q (resp. R_q) l'endomorphisme de $\mathbb{H}$ donné par multiplication à gauche (resp. à droite) par q. Démontrer que pour tout élément de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$, nous avons $\mathrm{L}_q \in \mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$ (resp. $\mathrm{R}_q \in \mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$).
2. En déduire que les éléments de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ sont exactement les points extrêmaux de $\mathcal{P}$ puis que tout élément de $\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$ permute $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$.
3. Démontrer que l'orbite de $\mathbf{I}$ sous l'action de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})}(\mathbf{1})$ est exactement $\{\pm\mathbf{I}, \pm\mathbf{J}, \pm\mathbf{K}\}$. On pourra considérer la conjugaison par des éléments de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$.
4. Soit $\zeta = \frac{\mathbf{1}+\mathbf{I}}{\sqrt{2}}$. Démontrer que ζ est un quaternion de norme 1, puis que la conjugaison par ζ dans $\mathbb{H}$ est une isométrie directe de $\mathcal{P}$ qui fixe $\mathbf{1}$, fixe $\mathbf{I}$ et envoie $\mathbf{J}$ sur $\mathbf{K}$. En déduire que l'orbite de $\mathbf{J}$ sous l'action de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})}(\mathbf{1}) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})}(\mathbf{I})$ est exactement $\{\pm\mathbf{J}, \pm\mathbf{K}\}$.
5. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$ est un groupe à 576 éléments possédant une suite exacte
$$1 \to (\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times \times \mathbb{H}\mathrm{ur}^\times)/\pm(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \to \mathrm{Iso}^+(\mathcal{P}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$
6. ● Démontrer que $\mathcal{P}$ est un polytope régulier ayant 24 sommets, 96 arêtes, 96 faces triangulaires et 24 cellules octaédriques.

Exercice 8. Automorphismes des quaternions

Le but de cet exercice est de décrire en termes des objets introduits à l'exercice précédent le groupe d'automorphisme de H_8.

1. Démontrer que $\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_8)$ est de cardinal 24 et qu'il existe une suite exacte

$$1 \to \mathbb{H}\mathrm{ur}^{\times}/\pm\mathbf{1} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{H}_8) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1.$$

   Indication : on pourra montrer que se donner un automorphisme revient à se donner une isométrie de $\mathcal{P}$ stabilisant $\mathbf{1}$.

2. Soit X l'ensemble des triplets $\{\varepsilon_{\mathbf{I}}\mathbf{I}, \varepsilon_{\mathbf{J}}\mathbf{J}, \varepsilon_{\mathbf{K}}\mathbf{K}\}$ où chaque ε appartient à $\{\pm 1\}$, quotienté par la multiplication par -1. Démontrer que $\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_8)$ agit fidèlement sur X puis en déduire que $\mathrm{Aut}(\mathrm{H}_8) \cong \mathfrak{S}_4$.

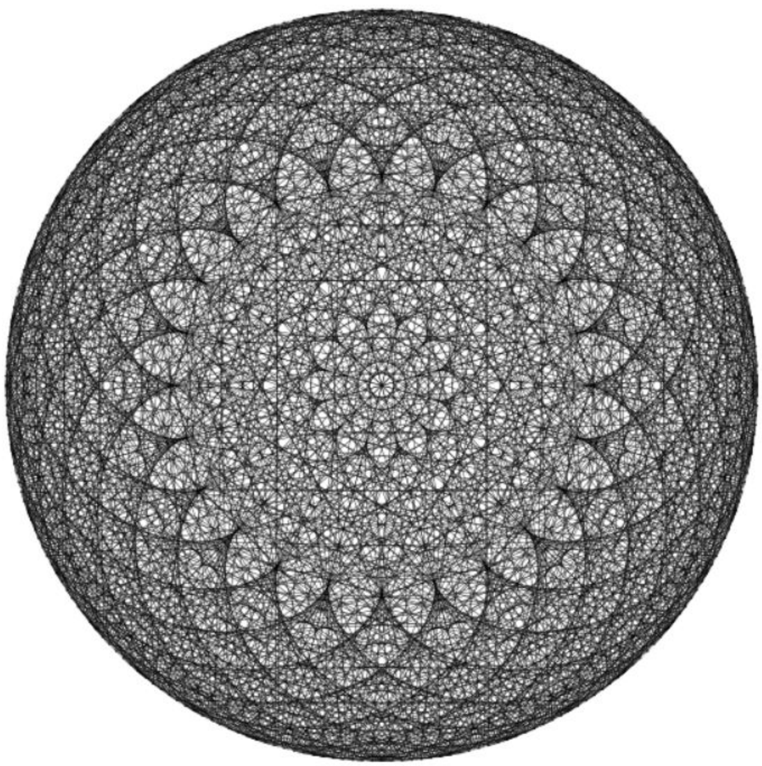

FIGURE 3 – Puissance 1165^e appliquée aux racines 1200-ièmes de l'unité.