

TD n°7 : Simplicité classiques 19 et 22/11/2024

● Nous traiterons les exercices dans l'ordre. Les questions les plus délicates de la feuille sont marquées d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis juste avant le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.

Exercice 1. Deux isomorphismes exceptionnels

Démontrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à \mathfrak{A}_4 . Démontrer que si k est un corps à 4 éléments, alors $\mathrm{PSL}_2(k) \cong \mathfrak{A}_5$.

Exercice 2. Groupes simples d'ordre 60

Soit G un groupe simple d'ordre 60.

1. Démontrer que toute action de G sur 3 ou 4 éléments est triviale.
2. Démontrer que les 5-Sylows de G sont au nombre de 6.
3. Démontrer que les 2-Sylows de G sont au nombre de 5 ou 15.
4. ● Supposons que H_1 et H_2 sont deux 2-Sylows et que $g \in H_1 \cap H_2$ est non trivial. En regardant le centralisateur de g , démontrer qu'il existe un sous-groupe d'ordre 12 dans G .
5. Dans le cas où toutes les intersections sont triviales, compter les éléments pour démontrer que les 2-Sylows sont au nombre de 5. En déduire qu'il existe un sous-groupe d'ordre 12 dans G .
6. Conclure.
7. Donner une autre preuve de : si k est un corps à 4 éléments, alors $\mathrm{PSL}_2(k) \cong \mathfrak{A}_5$.

Exercice 3. Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

On propose dans cet exercice une application du critère d'Iwasawa à la simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que les blocs non triviaux de l'action de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sur la sphère \mathbb{S}^2 sont les paires de points antipodaux.
2. En considérant l'action de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et le critère d'Iwasawa, démontrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.

● Exercice 3. Un sacré isomorphisme

Démontrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \cong \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$.

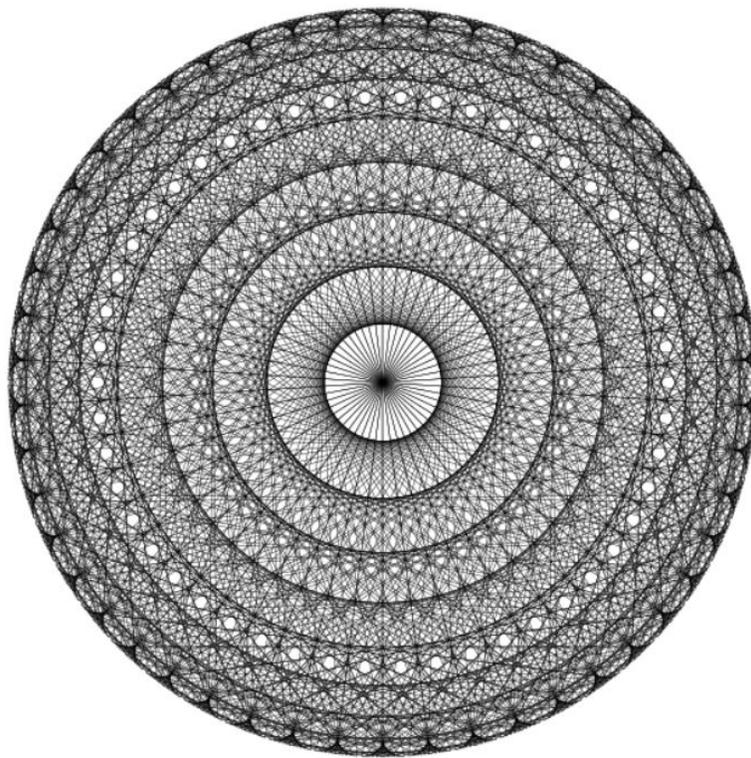


FIGURE 1 – Puissance 451^e appliquée aux racines 1000-ièmes de l'unité.