TD n°7 : Simplicité classiques

19 et 22/11/2024

Exercice 1. Deux isomorphismes exceptionnels

Démontrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$. Démontrer que si k est un corps à 4 éléments, alors $\mathrm{PSL}_2(k) \cong \mathfrak{A}_5$.

Correction de l'exerice 1 :

Nous faisons uniquement le premier cas, le deuxième est identique. L'ensemble $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ sur lequel $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ agit possède 4 éléments. De plus, le lemme de Schur affirme qu'un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ stabilisant toutes les droites est une homothétie. Ceci se traduit en disant que l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ est fidèle. L'image du morphisme injectif $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$ donné par l'action est un sous-groupe d'indice 2 (examiner le cardinalités) : c'est donc $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 2. Groupes simples d'ordre 60

Soit G un groupe simple d'ordre 60.

1. Démontrer que toute action de G sur 3 ou 4 éléments est triviale.
2. Démontrer que les 5-Sylows de G sont au nombre de 6.
3. Démontrer que les 2-Sylows de G sont au nombre de 5 ou 15.
4. Supposons que H_1 et H_2 sont deux 2-Sylows et que $g \in H_1 \cap H_2$ est non trivial. En regardant le centralisateur de g, démontrer qu'il existe un sous-groupe d'ordre 12 dans G.
5. Dans le cas où toutes les intersections sont triviales, compter les éléments pour démontrer que les 2-Sylows sont au nombre de 5. En déduire qu'il existe un sous-groupe d'ordre 12 dans G.
6. Conclure.
7. Donner une autre preuve de : si k est un corps à 4 éléments, alors $\mathrm{PSL}_2(k) \cong \mathfrak{A}_5$.

Correction de l'exercice 2 :

1. Une telle action induit un morphisme de G dans $\mathfrak{S}_3$ ou $\mathfrak{S}_4$. Son noyau est un sous-groupe distingué de G. Il ne peut être trivial car $|G| > |\mathfrak{S}_4| > |\mathfrak{S}_3|$. Il vaut donc G, i.e. l'action est triviale.
2. Nous avons $60 = 4 \times 3 \times 5$. Le théorème de Sylow dit que $n_5 | 12$ et $n_5 \equiv 1 \mod 5$. Ainsi $n_5 \in \{1, 6\}$. La première option est impossible sans quoi l'unique 5-Sylow serait distingué.
3. Le théorème de Sylow dit que $n_2 | 15$ et $n_2 \equiv 1 \mod 2$. Ainsi $n_3 \in \{1, 3, 5, 15\}$. La première option est impossible sans quoi l'unique 2-Sylow serait distingué. Si $n_2 = 3$, l'action par conjugaison de G sur ses 2-Sylow, donnerait une action transitive de G sur 3 éléments, ce que la première question écarte.
4. Les 2-Sylow sont d'ordre 4 donc abéliens. Le centralisateur de g contient donc $H_1 \cup H_2$ qui est de cardinal supérieur à 6 puisque $H_1 \neq H_2$. Puisque $H_1 < \mathrm{C}_G(g) < G$, Lagrange affirme que $4 || \mathrm{C}_G(g) || 60$. Il en découle que $|\mathrm{C}_G(g)| \in \{12, 20, 60\}$. Comme $\mathrm{Z}(G)$ est distingué strict (aucun groupe abélien d'ordre 60 n'est simple puisque 60 n'est pas premier), il est trivial, ce qui élimine $|\mathrm{C}_G(g)| = 60$. De plus, l'action de G par multiplication sur les classes à gauche de $\mathrm{C}_G(g)$ est transitive, donc la première question affirme que ces classes sont en nombre supérieur à 5, i.e. que $[G : \mathrm{C}_G(g)] \geq 5$. Ceci élimine le cas 20 et conclut.

5. Si les intersections sont triviales, les éléments d'ordre 2-primaire sont au nombre de $3n_2$. En comptant, l'identité, puis les éléments d'ordre 5 puis ceux d'ordre 2-primaire, nous obtenons

$$60 \geq 1 + 4n_5 + 3n_2 = 25 + 4n_5$$

ce qui élimine le cas $n_2 = 15$ de la troisième question. Le normalisateur d'un 2-Sylow est donc d'ordre 12.

6. Soit H un tel sous-groupe d'ordre 12. L'action par multiplication à gauche de G sur G/H fournit une action non triviale de G sur 5 éléments, i.e. un morphisme de G dans $\mathfrak{S}_5$. Ce morphisme est injectif puisqu'il est non trivial et que G est simple. Son image, par cardinalité, est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_5$: c'est $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 3. Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

On propose dans cet exercice une application du critère d'Iwasawa à la simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que les blocs non triviaux de l'action de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sur la sphère $\mathbb{S}^2$ sont les paires de points antipodaux.
2. En considérant l'action de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et le critère d'Iwasawa, démontrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple.

Correction de l'exercice 8 :

1. Il n'est pas difficile de voir que les paires de points antipodaux sont des blocs. Soit B un bloc de la sphère contenant deux points non antipodaux, disons x et y. En considérant que les rotations d'axe x laissent stables le bloc B, nous en concluons que le cercle de centre x passant par y sur la sphère est contenu dans le bloc. Considérons "l'intérieur" de ce cercle, i.e. la partie la plus petite déterminée par ce cercle. Pour tout point p de l'intérieur de ce cercle, il existe deux points a, b sur le cercles tel que $|a - b| = |a - p|$. En particulier en faisant agir G_a, tout le disque est contenu dans B. Ce disque est centré en x ou en $-x$. Quitte à faire agir une symétrie d'axe dans l'hyperplan $(\mathbb{R}x)^{\perp}$, x est dans l'intérieur de B. Ainsi, le bloc B est ouvert. Comme ses translatés partitionnent $\mathbb{S}^2$, la compacité et la connexité de la sphère impliquent que $B = \mathbb{S}^2$.
2. L'action de $\mathrm{SO}_3()$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est un quotient de celle sur $\mathbb{S}^2$ par la relation d'antipodie qui est $\mathrm{SO}_3()$-invariante. Un bloc dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ a pour image réciproque un bloc pour $\mathbb{S}^2$. La première question démontre alors que l'action sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est primitive puisque la projection de tous les blocs de $\mathbb{S}^2$ donnent les blocs triviaux dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Pour toute droite de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, le stabilisateur contient les rotations ayant cette droite pour axe, qui est distingué dans le stabilisateur puisque la conjugaison par un élément envoie l'axe de rotation sur le même axe, et dont les conjugués dans $\mathrm{SO}_3()$ l'engendrent puisque tout élément est une rotation. En appliquant le critère d'Iwasawa, il suffit alors de démontrer que $\mathrm{D}(\mathrm{SO}_3()) = \mathrm{SO}_3()$. Pour ceci considérons une rotation d'angle θ et d'axe $\mathbb{R}x$. Nous choisissons deux axes $\mathbb{R}y_1$ et $\mathbb{R}y_2$ dans l'orthogonal de $\mathbb{R}x$ qui font un angle $\theta/2$. Leur composée laisse $\mathbb{R}x$ fixe et envoie y_1 sur un autre point du cercle dans $(\mathbb{R}x)^{\perp}$ qui fait un angle θ avec y_1. Ainsi, la composée des deux symétrie est la rotation souhaitée. Les deux symétries d'axes $\mathbb{R}y_1$ et $\mathbb{R}y_2$ sont conjuguées, autrement dit leur composition est un commutateur.

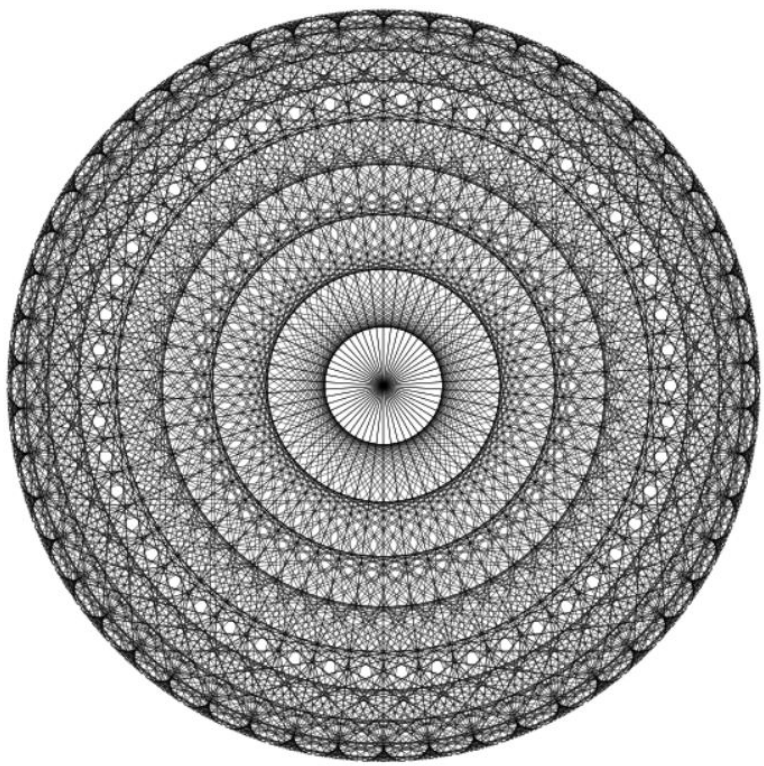

FIGURE 1 – Puissance 451^e appliquée aux racines 1000-ièmes de l'unité.