TD n°7 : Symétries et groupes orthogonaux

17 et 21/11/2023

Exercice 2. Une lichette de polytopes

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et T un ensemble fini non vide de points de V. Nous appelons $\mathcal{P}$ l'enveloppe convexe de T (c'est la définition d'un polytope). Les isométries du polytope $\mathcal{P}$ sont définies comme $\mathrm{Iso}(\mathcal{P}) = \{g \in \mathrm{O}(V) \mid g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\}$.

1. Un point x de $\mathcal{P}$ est appelé sommet [1] s'il ne s'exprime pas comme combinaison convexe d'autres points de $\mathcal{P}$, i.e.
$$\forall y, z \in \mathcal{P},\ x \in]y, z[\Rightarrow y = x = z.$$
On appelle S l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}$. Démontrer que $S \subseteq T$, puis que $\mathcal{P}$ est l'enveloppe convexe de S.
2. Démontrer que $\mathrm{Iso}(\mathcal{P})$ envoie les sommets sur des sommets.
3. Démontrer qu'un élément $g \in \mathrm{O}(V)$ qui stabilise T est un élément de $\mathrm{Iso}(\mathcal{P})$.

Correction de l'exercice 2 :

1. Écrivons un sommet de $\mathcal{P}$ comme $x = \sum_{t\in T} \lambda_t t$ où $\sum \lambda_t = 1$. S'il existe un t avec $\lambda_t = 1$, nous savons que $x \in T$. Sinon, il existe $r \in T$ avec $\lambda_r \in]0, 1[$. Dans ce cas, nous pouvons écrire
$$x = \lambda_r r + (1 - \lambda_r) \sum_{t\in T\setminus\{r\}} \frac{\lambda_t}{1 - \lambda_r}.$$
Par définition des sommets, appliqué à x, $y = r$ et z valant la somme de droite, nous en déduisons que $x = y = r$. D'où $x \in T$.

   On peut remplacer T par un sous-ensemble minimal pour l'inclusion dont l'enveloppe convexe soit $\mathcal{P}$. Grâce à la première question, il contient encore S. Soit $r \in T\setminus S$. Puisque ce n'est pas un sommet, nous pouvons l'exprimer comme combinaison linéaire de deux éléments différents de r. En écrivant ces éléments comme combinaison convexe d'éléments de T, on obtient que
$$r = \sum_{t\in T} \lambda_t t,$$
avec $\lambda_r \neq 1$. En manipulant cette expression, on en déduit que r est dans l'enveloppe convexe de $T\setminus\{r\}$. Ainsi, $\mathcal{P}$ est encore l'enveloppe convexe de $T\setminus\{r\}$. C'est absurde ; ainsi $T = S$.
2. Puisqu'un élément de $\mathrm{Iso}(\mathcal{P})$ est linéaire, il préserve les combinaisons convexes. De plus, il préserve $\mathcal{P}$ par définition et est injectif. Tout ceci entraîne qu'il préserve la condition d'être un sommet.
3. Un tel élément est orthogonal est envoie une combinaison convexe d'éléments de T sur une autre de ces combinaisons. Il stabilise donc $\mathcal{P}$. En appliquant le même raisonnement à g^{-1}, nous obtenons $g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, i.e. $g \in \mathrm{Iso}(\mathcal{P})$.

[1] La définition formelle qui suit est équivalente à la définition d'une face de dimension nulle.

Exercice 3. Symétries de l'isocaèdre

Cet exercice vise à comprendre le cas le plus délicat du classement des sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3)$.

Résumons les arguments que nous supposons déjà donnés : un élément non trivial de $\mathrm{SO}(3)$ possède exactement deux points fixes ; soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(3)$ et X l'ensemble des points fixes de ses éléments non triviaux sur la sphère unité. La formule de Burnside-Frobenius permet de donner des conditions arithmétiques très fortes sur cet ensemble. Cet exercice se place dans le cas où G est de cardinal 60 et où le G-ensemble X possède trois orbites de tailles respectives 30, 20 et 12. On cherche à démontrer que dans ce cas, G est le groupe d'isométries directes d'un icosaèdre, qui est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$ grâce au cours.

Appelons suggestivement S la troisième orbite, celle à 12 éléments, et choisissons $x \in S$.

1. Calculer $|G_x|$. En déduire que G_x est cyclique d'ordre 5 formés de rotations orthogonales d'ordre 5 et d'axe $\mathbb{R}x$.
2. Démontrer que $S = \{x, -x\} \cup P_x \cup P'_x$, où P_x et P'_x sont de cardinal 5, contenues dans des plans affines d'orthogonal $\mathbb{R}x$. Démontrer que les orbites P_x et P'_x sont des pentagones réguliers.
3. En considérant que le choix de x est arbitraire, déduire de la question précédente que $S = -S$, puis que pour tout $x \in S$ on a $P'_x = -P_x$.
4. Démontrer P_x est dans un plan affine d'orthogonal $\mathbb{R}x$ qui est différent du plan $(\mathbb{R}x)^\perp$.

À ce stade, on définit I comme l'enveloppe convexe de S et nous voudrions montrer qu'il s'agit d'un icosaèdre. Le dessin suivant illustre la situation et convainc que I est un polyèdre à 12 sommets et 20 faces triangulaires (sur le dessin, les deux pyramides bleues à base pentagonale sont censées être isométriques et symétriques par rapport à l'origine).

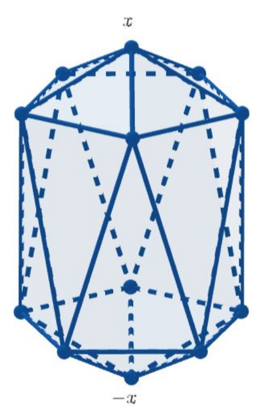

FIGURE 1 – La situation avec deux pentagones symétriques dont tous les points sont permutés par G_x.

5. En considérant que le choix de x est arbitraire, démontrer que toutes les faces de I sont des triangles équilatéraux et isométriques. Ce dernier point démontre que I est un icosaèdre.
6. Démontrer que G est exactement le groupe d'isométries directes de I.

   Indication : on pourra utiliser l'exercice précédent.
7. Identifier les deux autres orbites à 30 et 20 éléments.

Nous obtenons ainsi un icosaèdre, illustré par le dessin suivant :

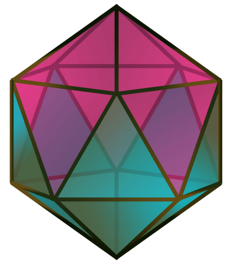

FIGURE 2 – Un icosaèdre.

Correction de l'exercice 3 :

1. La formule orbite-stabilisateur affirme que G_x est de cardinal 5. Tout élément g_x non trivial appartient à $\mathrm{SO}(3)$, d'ordre 5. C'est donc une rotation orthogonale d'axe engendré par n'importe lequel de ses points fixes.
2. L'ensemble S se décompose donc sous l'action de G_x en orbites dont le cardinal divise 5. Il se trouve qu'un générateur g_x a précisément x et $-x$ comme point fixes dans $\mathbb{S}^2$, donc $\{x\}$ ou $\{x, -x\}$ comme points fixes dans S (ce dernier cas implique en particulier que $-x \in S$. Les autres orbites étant de cardinal 5, un peu d'arithmétique élimine le premier cas. Ainsi, $-x \in S$ et la partition induite par l'action d'un élément de G_x sur S fournit la décomposition annoncée. De plus, comme les éléments de G_x sont orthogonaux et fixes $\mathbb{R}x$, les orbites sont contenues dans des plans affines d'orthogonal $\mathbb{R}x$.

   Soit g_x un générateur de G_x et $y \in P_x$. Les cinq points de P_x s'écrivent alors $P_x = \{y, g_x(y), \ldots, g_x^4(y)\}$ et puisque g_x est un isométrie, le pentagone P_x est régulier (la distance entre y et $g_x(y)$ est notamment égale à la distance entre $g_x(y)$ et $g_x^2(y)$). Le même raisonnement démontre que P_x' est un pentagone régulier.
3. En appliquant la première question à un point quelconque de S, nous savons que $S = -S$. puis que $-\mathrm{Id}$ commute à G_x il agit orbite par orbite ; nous en déduisons que $P_x = -P_x$ ou que $P_x' = -P_x$. Le premier cas est impossible car sinon, l'un des points de P_x serait son propre opposé.
4. Tous les éléments de P_x sont permutés par la rotation orthogonale g_x d'axe $\mathbb{R}x$; ils sont donc dans un même hyperplan affine d'orthogonal $\mathbb{R}x$ que l'on écrit $ax + \mathbb{R}x^{\perp}$. Il nous reste à démontrer que $a \neq 0$. Si c'était le cas, comme $P_x' \subset -ax + \mathbb{R}^{\perp}$, les deux polygônes P_x et P_x' formeraient un décagone régulier dans $\mathbb{R}^{\perp}$: tous les points de $S \backslash \{x, -x\}$ sont à distance égale de x. Ce n'est pas le cas pour y puisque les autres points de P_x se sont pas à égale distance. Ceci contredirait le fait que x et y soient dans la même orbite sous les isométries de G.
5. Le sous-groupe G_x permute transitivement les triangles supérieurs et inférieurs. Pour un point $s \in P_x$, le sous-groupe G_s envoie un triangle supérieur sur trois des triangles du milieu, puis en agissant avec G_t où $t \in P_x'$, on peut tomber sur un triangle inférieur. Ainsi, les triangles sont permutés transitivement par les isométries de G : ils sont isométriques. En appliquant la rotation d'axe $\mathbb{R}x$ au triangle $x\,y\,g_x(y)$ une fois puis une rotation d'axe $g_x(y)$ adéquate, nous retombons sur le triangle initial tourné d'un angle $^{2\pi}/_{3}$. A fortiori, les triangles sont équilatéraux et isométriques.
6. Une isométrie directe permutant les sommets de S est une isométrie directe de I d'après l'exercice précédent ce qui donne une inclusion $G \subseteq \mathrm{Iso}^{+}(I)$. Par cardinalité, cette inclusion est une égalité.
7. Soit z le centre d'une arête. La symétrie orthogonale d'axe la droite $\mathbb{R}z$ est une isométrie directe de I et appartient donc à G. Le point $^{z}/_{|z|}$ appartient ainsi à X. Puisque nous avons 30 arêtes (chacun des 12 points est relié à 5 autres) sur lesquelles G agit transitivement. L'orbite de taille 30 est donc les centres de ces arêtes renormalisés. De la même manière, soit c le centre d'une face. Tout rotation orthogonale d'ordre 3 d'axe $\mathbb{R}c$ est une isométrie directe de I. Puisque G agit transitivement sur les 20 faces, l'orbite d'ordre 20 est constituée des centres des faces renormalisés.

Exercice 6. Préliminaires sur les quaternions de Hurwitz

Nous conservons les notations de l'exercice précédent pour tous les objets qui interviennent dans la définition et l'étude de $\mathbb{H}$. On considère l'élément $\omega = \frac{\mathbf{1}+\mathbf{I}+\mathbf{J}+\mathbf{K}}{2}$ de $\mathbb{H}$ et on définit les quaternions de Hurwitz par

$$\mathbb{H}\text{ur} = \mathbb{Z}\mathbf{1} + \mathbb{Z}\,\mathbf{I} + \mathbb{Z}\,\mathbf{J} + \mathbb{Z}\,\mathbf{K} + \mathbb{Z}\omega.$$

1. Montrer que $\mathbb{H}\text{ur}$ est un sous-anneau de $\mathbb{H}$, et $\chi_q \in \mathbb{Z}[X]$ pour tout $q \in \mathbb{H}\text{ur}$.
2. Montrer $\mathbb{H}\text{ur}^\times = \{q \in \mathbb{H}\text{ur} \mid \mathrm{n}(q) = 1\}$.
3. En déduire $|\mathbb{H}\text{ur}^\times| = 24$ et lister les 24 éléments de $\mathbb{H}\text{ur}^\times$ ainsi que leurs polynômes caractéristiques.

Correction de l'exercice 6 :

1. Nous savons déjà que $\mathbb{Z}\mathbf{1} + \mathbb{Z}\,\mathbf{I} + \mathbb{Z}\,\mathbf{J} + \mathbb{Z}\,\mathbf{K}$ est un sous-anneau de $\mathbb{H}$. Par symétrie des rôles de $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ et distributivité, il suffit de démontrer que $\mathbf{I}\omega$, $\omega\mathbf{I}$ et ω^2 appartiennent à $\mathbb{H}\text{ur}$. On vérifie que

$$\mathbf{I}\omega = \frac{-\mathbf{1}+\mathbf{I}-\mathbf{J}+\mathbf{K}}{2} = \omega - \mathbf{1} - \mathbf{J}$$

$$\omega\mathbf{I} = \frac{-\mathbf{1}+\mathbf{I}+\mathbf{J}-\mathbf{K}}{2} = \omega - \mathbf{1} - \mathbf{K}$$

$$\omega^2 = \frac{-\mathbf{1}+\mathbf{I}+\mathbf{J}+\mathbf{K}}{2} = \omega - \mathbf{1}.$$

La trace de $\mathbf{1}$ valant 2, les traces de $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ étant nulles et la trace de ω valant 1, tout élément de $\mathbb{H}\text{ur}$ est de trace entière. Les coordonnées d'un élément de $\mathbb{H}\text{ur}$ dans la base $(\mathbf{1}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ sont toutes des entiers ou toutes des demi-entiers selon si l'on a un multiple impaire de ω dans l'écriture ou non. Leur norme, autrement dit la somme des carrés de ces coordonnées est donc un entier. Ceci démontre que pour tout $q \in \mathbb{H}\text{ur}$, le polynôme caractéristique est à coefficients entiers.

2. Puisque la norme est multiplicative et que tous les éléments de $\mathbb{H}\text{ur}$ ont des normes entières naturelles, un élément inversible est de norme 1. Réciproquement, si q est de norme 1, nous savons que

$$\chi_q(q) = q^2 - \mathrm{t}(q)q + \mathbf{1} = 0$$

ce qui implique que $\mathrm{t}(q) - \mathbf{1}$ est un inverse de q, dans $\mathbb{H}\text{ur}$.

3. Nous rappelons que la norme est la somme des carrés des coordonnées. Si toutes ces coordonnées sont entières, pour que la norme vale 1, il faut et suffit qu'exactement une de ces coordonnées vale 1 et que les autres soient nulles. Nous retombons sur $\mathrm{H}_8 \subset \mathbb{H}\text{ur}^\times$. Le polynôme caractéristique de $\mathbf{1}$ vaut $(X-1)^2$. Le polynôme caractéristique de $-\mathbf{1}$ vaut $(X+1)^2$. Tous les autres polynômes caractéristiques, ceux des élémnents dans $\{\pm\mathbf{I}, \pm\mathbf{J}, \pm\mathbf{K}\}$ valent $X^2 - 1$.

Sinon, toutes les coordonnées sont des demi-entiers et pour que la norme vale 1, il faut et suffit que toutes ces coordonnées valent ± 1. Nous obtenons ainsi les éléments

$$\left\{\frac{\pm\mathbf{1} + \pm\mathbf{I} + \pm\mathbf{J} + \pm\mathbf{K}}{2}\right\}$$

dont le polynôme caractéristique est $X^2 - X + 1$ ou $X^2 + X + 1$ selon le signe devant $\mathbf{1}$.

Cela fournit effectivement 24 éléments.

Exercice 7. Vers l'icositétrachore

Le but de cet exercice est de construire grâce aux quaternions de Hurwitz un polytope régulier dans $\mathbb{R}^4$ ayant 24 sommets, 96 arêtes, 96 faces triangulaires et 24 cellules octaédriques.

Nous munissons $\mathbb{H}$ associé à la forme quadratique $q \mapsto \mathrm{n}(q)$. Nous prenons comme sommets $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ et $\mathcal{P}$ le polytope associé, appelé icositétrachore ou 24-cellules.

1. Pour tout quaternion q, on appelle L_q (resp. R_q) l'endomorphisme de $\mathbb{H}$ donné par multiplication à gauce (resp. à droite) par q. Démontrer que pour tout élément de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$, nous avons $\mathrm{L}_q \in \mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$ (resp. $\mathrm{R}_q \in \mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$).
2. En déduire que les éléments de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ sont exactement les points extrêmaux de $\mathcal{P}$ puis que tout élément de $\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$ permute $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$.
3. Démontrer que l'orbite de $\mathbf{I}$ sous l'action de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})}(\mathbf{1})$ est exactement $\{\pm\mathbf{I}, \pm\mathbf{J}, \pm\mathbf{K}\}$. On pourra considérer la conjugaison par des éléments de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$.
4. Soit $\zeta = \frac{\mathbf{1}+\mathbf{I}}{\sqrt{2}}$. Démontrer que ζ est un quaternion de norme 1, puis que la conjugaison par ζ dans $\mathbb{H}$ est une isométrie directe de $\mathcal{P}$ qui fixe $\mathbf{1}$, fixe $\mathbf{I}$ et envoie $\mathbf{J}$ sur $\mathbf{K}$. En déduire que l'orbite de $\mathbf{J}$ sous l'action de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})}(\mathbf{1}) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})}(\mathbf{I})$ est exactement $\{\pm\mathbf{J}, \pm\mathbf{K}\}$.
5. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$ est un groupe à 576 éléments possédant une suite exacte
$$1 \to (\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times \times \mathbb{H}\mathrm{ur}^\times)/\pm(\mathbf{1},\mathbf{1}) \to \mathrm{Iso}^+(\mathcal{P}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$
6. ● Démontrer que $\mathcal{P}$ est un polytope régulier ayant 24 sommets, 96 arêtes, 96 faces triangulaires et 24 cellules octaédriques.

Correction de l'exercice 7 :

1. Le cours propose déjà une démontration du fait que le morphisme
$$\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \to \mathcal{L}(\mathbb{H}), \quad (q, q') \mapsto \mathrm{L}_q \circ \mathrm{R}_{q'^{-1}}$$
est d'image dans $\mathrm{SO}(\mathbb{H})$. Puisque $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ est un sous-groupe multiplicatif, les éléments L_q et R_q permutent les points de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$. La première question de l'exercice 2 du présent TD démontre alors que ce sont des isométries directes de $\mathcal{P}$.
2. Les multiplications à gauche par des éléments de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ sont des éléments de $\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$. L'action de $\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$ sur $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ est transitive. D'après la question 2 de l'exercice 2 du présent TD, les points extrêmaux forment une orbite dans $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ sous l'action de $\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$. Les éléments de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ sont exactement les points extrêmaux de $\mathcal{P}$ et tout élément de $\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$ induit une bijection de cette orbite.
3. Voici un tableau des distances de $\mathbf{1}$ aux points de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$:

Point	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	$\pm\mathbf{I},\ \pm\mathbf{J},\ \pm\mathbf{K}$	$\frac{\mathbf{1}\pm\mathbf{I}\pm\mathbf{J}\pm\mathbf{K}}{2}$	$\frac{-\mathbf{1}\pm\mathbf{I}\pm\mathbf{J}\pm\mathbf{K}}{2}$
Distance à $\mathbf{1}$	0	2	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{3}$

Grâce à la deuxième question, les éléments de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})}(\mathbf{1})$ sont des isométries, fixant $\mathbf{1}$ et permutant les points de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$. L'élément $\mathbf{I}$ est a fortiori envoyé sur l'un des autres éléments à distance $\sqrt{2}$, i.e. son orbite est contenue dans $\{\pm\mathbf{I},\ \pm\mathbf{J},\ \pm\mathbf{K}\}$. La conjugaison par un élément de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ est bien une isométrie directe de $\mathcal{P}$ par la première question, et elle fixe $\mathbf{1}$. Ainsi, $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$ agit par conjugaison sur l'orbite recherchée. Or, les éléments $\{\pm\mathbf{1},\ \pm\mathbf{I}\}$ agissent trivialement et ce sont les seuls. La formule orbite-stabilisateur implique que l'orbite recherchée est de taille 6. Ceci conclut.

4. L'élément ζ est un quaternion de norme 1. D'après le cours, la multiplication à gauche ou à droite par de tels quaternions induisent des isométries directes de $\mathbb{H}$. La conjugaison par ζ est ainsi une isométrie directe de $\mathbb{H}$. D'après la première question, il reste seulement à démontrer qu'elle permute $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$. Comme elle préserve la norme, la deuxième question de l'exercice 5 du présent TD nous restreint à montrer qu'elle induit une bijection de $\mathbb{H}\mathrm{ur}$; la conjugaison par ζ fixe $\mathbf{1}$ et $\mathbf{I}$ et vérifie que
$$\zeta\mathbf{J}\zeta^{-1} = \mathbf{K}$$

$$\zeta\mathbf{K}\zeta^{-1} = -\mathbf{J}$$

$$\zeta\omega\zeta^{-1} = \frac{\mathbf{1}+\mathbf{I}-\mathbf{J}+\mathbf{K}}{2} = \omega - \mathbf{J}$$

et de même pour ζ^{-1} en appliquant $q \mapsto q^\star$.

L'orbite de $\mathbf{J}$ est encore constituée d'éléments à distance $\sqrt{2}$ de $\mathbf{1}$. Au vu du sous-groupe prescrit elle est incluse dans $\{\pm\mathbf{J},\ \pm\mathbf{K}\}$. En considérant la conjugaison par ζ, elle contient $\mathbf{K}$. Comme la conjugaison par $\mathbf{I}$ laisse fixe $\mathbf{1}$ et $\mathbf{I}$, l'orbite est stable par opposé.

5. Prenons g une isométrie directe de $\mathcal{P}$. Grâce à la deuxième question, elle permute $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$. En multipliant par un L_q adéquat, on peut supposer que $g(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Grâce à la question 3, l'image de $\mathbf{I}$ appartient à $\{\pm\mathbf{I},\ \pm\mathbf{J},\ \pm\mathbf{K}\}$ et quitte à postcomposer par la conjugaison par un élément de $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$, on peut supposer de plus que $g(\mathbf{I}) = \mathbf{I}$. Pour les mêmes raisons, la question 4 nous dit que quitte à postcomposer par la conjugaison par I et/ou la conjugaison par ζ, on peut supposer que $g(\mathbf{J}) = \mathbf{J}$. Puisque g est une isométrie directe qui fixe trois vecteurs de la base orthonormale $(\mathbf{1}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$, c'est l'identité.

   Nous avons ainsi démontré que

$$\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P}) = \langle \mathrm{C}_\zeta = \mathrm{L}_\zeta \circ \mathrm{R}_{\zeta^{-1}}, \mathrm{L}_q, \mathrm{R}_q \,|\, q \in \mathbb{H}\mathrm{ur}^\times \rangle.$$

   Nous connaissons le noyau de

$$\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SO}\,(\mathbb{H})\,,\ \ (q, q') \mapsto \mathrm{L}_q \circ \mathrm{R}_{q'^{-1}},$$

   c'est $\pm(\mathbf{1}, \mathbf{1})$. Le sous-groupe de $\mathrm{Iso}^+(\mathcal{P})$ engendré par les multiplications à gauche et à droite est ainsi isomorphe à

$$(\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times \times \mathbb{H}\mathrm{ur}^\times)/_{\pm(\mathbf{1},\mathbf{1})}.$$

   De surcroît, la conjugaison par ζ stabilise $\mathbb{H}\mathrm{ur}^\times$. Les formules

$$\mathrm{C}_\zeta \circ \mathrm{L}_q \circ \mathrm{C}_{\zeta^{-1}} = \mathrm{L}_{\zeta q \zeta^{-1}} \text{ et } \mathrm{C}_\zeta \circ \mathrm{R}_q \circ \mathrm{C}_{\zeta^{-1}} = \mathrm{R}_{\zeta^{-1} q \zeta}$$

   démontrent que ce sous-groupe est distingué. Reste à démomtrer que le quotient est de cardinal 2. Ceci découle du fait que $\zeta^2 = \mathbf{I}$ qui implique que

$$\mathrm{C}_\zeta^{\circ 2} = \mathrm{C}_{\mathbf{I}} \in \langle \mathrm{L}_q, \mathrm{R}_q \,|\, q \in \mathbb{H}\mathrm{ur}^\times \rangle.$$

6. Nous nous contentons (pour cette année) de donner des questions intermédiaires.

   (a) Soit $\mathcal{P} = \mathrm{Conv}(T)$ un polytope, enveloppe convexe d'un sous-ensemble fini non vide de points d'un espace euclidien V. Soit $H = \{v \in V \,|\, f(v) = 1\}$ un hyperplan affine tel que $\mathcal{P} \subseteq \{v \in V \,|\, f(v) \leq 1\}$ et que $\mathcal{P} \cap H \neq \emptyset$. Démontrer que $\mathcal{P} \cap H$ est une face de $\mathcal{P}$, égale à $\mathrm{Conv}(T \cap H)$.

   (b) Soit F une face de $\mathcal{P}$ et $A = \{\sum_{v\in F} \lambda_v v \,|\, (\lambda_v) \in \mathbb{R}^F$ à support fini et $\sum \lambda_v = 1\}$ l'espace affine engendré. Démontrer que l'intérieur de F vu comme sous-ensemble de A est non vide. En déduire que $\mathcal{P} \cap A = F$.

   (c) Conclure que tout cellule (face de dimension $(\dim V - 1)$) s'écrit $\mathcal{P} \cap H$ pour un H comme à la question (a).

   (d) Démontrer que les cellules de l'icositétrachore contenant $\mathbf{1}$ sont exactement les octaèdres de sommets $\{\mathbf{1}, \mathbf{I}, \frac{\mathbf{1}+\mathbf{I}\pm\mathbf{J}\pm\mathbf{K}}{2}\}$ et les anaolgues pour $-\mathbf{I}$, $\pm\mathbf{J}$ et $\pm\mathbf{K}$. Appelons $\mathcal{O}$ le premier octaèdre cité.

   (e) Démontrer que la restriction

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Iso}(\mathcal{P})}(\mathcal{O}) \to \mathrm{Iso}(\mathcal{O})$$

   est surjective.

   (f) Conclure que l'icositétrachore est régulier.