TD n°8 : Géométrie (projective ?)

24 et 25/11/2023

Nous traiterons dans l'ordre la première question de l'exercice 1, le début de l'exercice 4, la première question de l'exercice 6, puis les exercices 7 et 8. Vous pouvez naviguer librement parmi les exercices restants ou parmi ceux de votre polycopié. Les exercices les plus délicats de la feuille sont marqués d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis et vendredis juste avant le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.

1. Groupes linéaires et projectifs

Exercice 1. Une suite exacte

Soit k un corps et $n \geq 1$ un entier.

1. Montrer que la composée
$$\mathrm{SL}_n(k) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_n(k)$$
s'insère dans une suite exacte canonique
$$1 \to \mu_n(k) \to \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k) \to k^\times/(k^\times)^n \to 1.$$
2. En déduire une suite exacte
$$1 \to \mathrm{PSL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k) \to k^\times/(k^\times)^n \to 1.$$
3. Déduire de la première question une suite exacte
$$1 \to \mu_n(k) \to \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PSL}_n(k) \to 1.$$
Démontrer qu'elle n'est pas scindée pour $n = 2$ et $\mathrm{car}(k) \neq 2$. On pourra considérer un relèvement de la classe $\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$.
4. ● La suite est-elle scindée lorsque $\mu_n(k) \neq \{1\}$?

Exercice 2. Éléments d'ordre 2 de $\mathrm{PGL}_n(k)$

Soit $n \geq 1$ et k un corps. Nous cherchons à déterminer à conjugaison près les éléments d'ordre 2 de $\mathrm{PGL}_n(k)$.

1. Construire une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison dans $\mathrm{PGL}_n(k)$ et l'ensemble
$$\left\{ \left\{ h\lambda g h^{-1} \mid h \in G,\, \lambda \in k^\times \right\} \,\middle|\, g \in \mathrm{GL}_n(k) \right\}.$$
2. Pour la suite, on se fixe $[g]$ d'ordre 2. Démontrer qu'il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $g^2 = \lambda \mathrm{I}_n$.

3. Supposons que λ est un carré dans k. Démontrer que l'on peut choisir un représentant g_1 de $[g]$ tel que $g^2 = \mathrm{I}_n$. En déduire que les classes de conjugaison obtenues dans ce cas sont exactement les classes de conjugaison des
$$\left[\begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{n-k} \end{pmatrix}\right], \ 1 \leq k \leq \frac{n}{2}.$$
4. ● En considérant des matrices compagnons par blocs des polynômes $X^2 - \lambda$ pour λ qui n'est pas un carré, démontrer que les classes de conjugaison restantes sont paramétrées par ${}^{k^\times}/{}_{(k^\times)^2}$.

Exercice 3. Les quaternions de Hurwitz en géométrie

Cet exercice reprend les notations du TD 7 concernant les quaternions. En particulier, nous rappelons l'existence de l'élément $\omega = \frac{\mathbf{1}+\mathbf{I}+\mathbf{J}+\mathbf{K}}{2}$ de $\mathbb{H}$ et la définition $\mathrm{Hur} = \mathbb{Z}\mathbf{1} + \mathbb{Z}\mathbf{I} + \mathbb{Z}\mathbf{J} + \mathbb{Z}\mathbf{K} + \mathbb{Z}\omega$. Le groupe d'inversibles de cet anneau est noté $\mathrm{Hur}^\times$; il est formé des 24 quaternions de Hurwitz de norme 1.

Le but de cet exercice est d'utiliser les quaternions de Hurwtiz pour exhiber un morphisme de groupes injectif de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ vers $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ pour tout premier impair p. Fixons un tel premier impair.

1. Démontrer qu'il existe$x, y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $x^2 + y^2 = -1$.
2. En considérant les deux matrices
$$\mathbf{I}_p = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{J}_p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
exhiber un morphisme d'anneaux $\varphi : \mathrm{Hur} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
3. Vérifier que $\mathrm{Tr}(\varphi(q)) = \mathrm{t}(q) \mod p$, et en déduire que $\mathrm{Hur}^\times$ arrive dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
4. En déduire $\mathrm{Hur}^\times \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ puis que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Exercice 4. Le birapport

Soit k un corps de cardinal strictement supérieur à 4. Soit $\mathbf{P}^1(k)$ la droite projective sur k identifiée à $\widehat{k} = k \cup \{\infty\}$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des quadruplets de points distincts dans $\mathbf{P}^1(k)$ muni de l'action diagonale sous $\mathrm{PGL}_2(k)$ et d'une action naturelle de $\mathfrak{S}_4$ en permutant les coordonnées. Ainsi, $\mathfrak{S}_4 \times \mathrm{PGL}_2(k)$ opère sur $\mathcal{C}$.

1. Soit $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{C}$. Montrer qu'il existe un unique $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ tel que $(g \cdot z_1, g \cdot z_2, g \cdot z_3) = (0, 1, \infty)$.

On définit le *birapport* des quatres points de z par $\lambda(z) = [z_1, z_2, z_3, z_4] = g \cdot z_4 \in \widehat{k}$, où g est tel qu'à la première question.

2. Montrer que l'application $\lambda : \mathcal{C} \to \widehat{k}$ est constante sur les $\mathrm{PGL}_2(k)$-orbites et en déduire une bijection
$$\Lambda : {}^{\mathcal{C}}/{}_{\mathrm{PGL}_2(k)} \to \widehat{k} \backslash \{0, 1, \infty\}.$$
3. ● Montrer que l'action naturelle de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathcal{C}$ induit une action sur $\widehat{k}\backslash\{0, 1, \infty\}$ de noyau K_4. Expliciter l'action de $(1\,2)$ et $(1\,2\,3)$ pour obtenir que $\mathfrak{S}_4$ agit par homographies sur $\widehat{k}\backslash\{0, 1, \infty\}$.
4. ● Démontrer que la composée
$$ {}^{\mathcal{C}}/{}_{\mathrm{PGL}_2(k)} \xrightarrow{\Lambda} \widehat{k}\backslash\{0, 1, \infty\} \xrightarrow[\lambda \mapsto \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}]{j} k.$$
est $\mathfrak{S}_4$-invariante et qu'elle se factorise en une injection
$$J : {}^{\mathcal{C}}/{}_{(\mathfrak{S}_4 \times \mathrm{PGL}_2(k))} \hookrightarrow k.$$

Remarque : cette application j ressemble pour deux gouttes d'eau au j-invariant d'une courbe elliptique de la forme $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ et il est en effet possible de donner une interprétation de J en termes de courbes elliptiques.

Exercice 5. Action sur les plans

Soit k un corps. Le groupe $\mathrm{PGL}_3(k)$ agit sur les plans[1] (resp. les paires de plans, resp. les triplets de plans, resp. les quadruplets de plans concourrants) dans k^3. Quelles sont les orbites de ces actions ?

2. Autour du critère d'Iwasawa

Exercice 6. Blocs d'une action

Soient G un groupe agissant sur un ensemble X et $B \subset X$ un sous-ensemble. On dit que B est un *bloc* pour cette action si on a $B \neq \emptyset$ et si pour tout $g \in G$ on a soit $g(B) = B$, soit $g(B) \cap B = \emptyset$. Un bloc $B \subset X$ est dit *trivial* si on a soit $B = X$, soit $|B| = 1$. Une action transitive sera dite *primitive* si tous ses blocs sont triviaux. Nous supposons dans cet exercice que l'action de G sur X est transitive.

1. Montrer que $B \subset X$ est un bloc si, et seulement si, les parties de la forme $g(B)$ avec $g \in G$ forment une partition de X.
2. Soit B un bloc et $G_B = \{g \in G \,|\, g(B) = B\}$. Démontrer que G_B est un sous-groupe de G puis exhiber une bijection croissante pour l'inclusion entre les blocs contenant B et les sous-groupes de G contenant G_B.
3. Démontrer qu'une action est primitive si et seulement si les stabilisateurs G_x sont des sous-groupes maximaux.
4. Vérifier qu'une action 2-transitive est primitive.

Exercice 7. Critère d'Iwasawa, version générale

On cherche à utiliser la notion d'action primitive tout juste introduite pour généraliser le critère d'Iwasawa que votre cours énoncé pour des actions 2-transitives.

1. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X et $N \triangleleft G$ un sous-groupe distingué. Démontrer que les N-orbites dans X sont des blocs.
2. (Critère d'Iwasawa, partie 1) Soit G un groupe agissant primitivement sur un ensemble X. Supposons qu'il existe un point $x \in X$ et un sous-groupe abélien distingué du stabilisateur $A \triangleleft G_x$ tel que les conjugués de A dans G engendrent G. Démontrer que pour tout sous-groupe distingué N de G soit N est contenu dans le noyau de l'action, soit N agit transitivement sur X.
3. (Critère d'Iwasawa, partie 2) Dans ce deuxième cas, démontrer sucessivement que $G = NA$ puis que $\mathrm{D}(G) \subseteq N$.
4. En déduire que si G admet une action primitive fidèle qui vérifie les conditions précédentes, alors les sous-groupes distingués non triviaux de G sont en bijection avec les sous-groupes de $G^{\mathrm{ab}} = {}^{G}/_{\mathrm{D}(G)}$.

1. Le terme plan implique qu'ils passent par l'origine.

Exercice 8. Simplicité de $\mathrm{SO}(3)$

On propose dans cet exercice une application du critère d'Iwasawa à la simplicité de $\mathrm{SO}(3)$.

1. Démontrer que les blocs non triviaux de l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur la sphère $\mathbb{S}^2$ sont les paires de points antipodaux.
2. En considérant l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ et le critère d'Iwasawa, démontrer que $\mathrm{SO}(3)$ est simple.

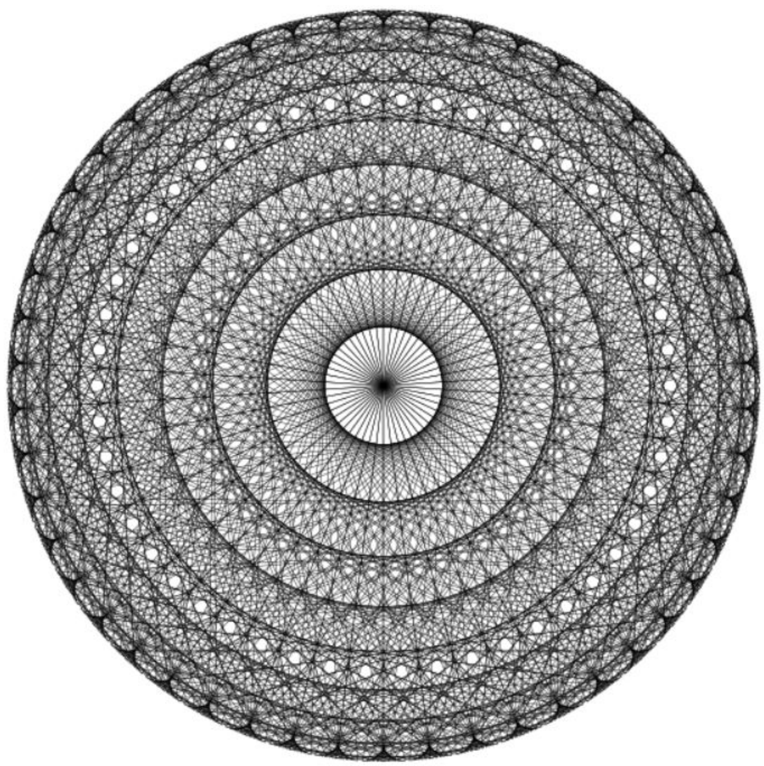

FIGURE 1 – Puissance 451^e appliquée aux racines 1000-ièmes de l'unité.