TD n°8 : Représentations
3 et 6/12/2024

Nous traiterons les exercices 1, 3 et éventuellement 2. Les questions les plus délicates de la feuille sont marquées d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis juste après le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.

Exercice 1. Dual et irréductibilité

Soit k un corps et G un groupe. Soit V une représentation de G dans un k-espace vectoriel de dimension finie.

1. Exhiber un isomorphisme canonique de représentations entre entre $(V^\vee)^\vee$ et V.
2. Démontrer que V est irréductible si et seulement si $V^\vee$ est irréductible.

Exercice 2. Composantes isotypiques

Soit G un groupe fini et k un corps tel que $\mathrm{car}(k) \nmid |G|$. Soit (V, ρ) une représentation de dimension finie de G dans k.

1. Rappeler pourquoi V se décompose en somme directe de représentations irréductibles. Dans cet exercice, on note $V = \oplus_{i \in I} V_i$ une telle décomposition.
2. Soit W une représentation irréductible de G dans un k-espace vectoriel. On appelle *composante W-isotypique* et on note $V[W]$, le sous-espace engendré par les $f(W)$ où f parcourt les morphismes de représentations de W sanq V. Démontrer que $V[W]$ est une sous-représentation de V.
3. Démontrer que
$$V[W] = \oplus_{i \in I,\ W \cong V_i} V_i.$$
Ainsi, même si les V_i ne sont pas bien déterminés, les composantes isotypiques le sont.

Exercice 3. Représentation de permutation d'une action

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X et k un corps. Cet exercice considère la représentation de permutation kX dont l'espace sous-jacent est $\oplus_{x \in X} kx$ (i.e. un k-espace vectoriel de base indexée par X) et où
$$g \cdot \left(\sum_{x \in X} \lambda_x x \right) = \sum_{x \in X} \lambda_x g \cdot x = \sum_{x \in X} \lambda_{g^{-1} \cdot x} x.$$
Nous commençons par quelques questions générales.

1. Démontrer que le vecteur
$$v = \sum_{x \in X} \lambda_x x$$
appartient aux points de kX fixes sous G si et seulement si la fonction $x \mapsto \lambda_x$ est G-invariante, i.e. constante sur les orbites.

2. En déduire la dimension de kX^G.
3. Soit X, Y deux ensembles finis sur lesquels G agit. Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme de représentations

$$\mathrm{Hom}_k(kX, kY) \to k(X \times Y), \;\; T \mapsto \sum_{(x,y) \in X \times Y} t_{x,y}(x,y) \;\; \text{où } T(x) = \sum_{y \in Y} t_{x,y} y.$$

Pour une action de G sur un ensemble Z tel que $|Z| \geq 2$, on peut considérer l'action diagonale de G sur $Z \times Z$ qui consiste à agir simultanément sur les deux termes du produit.

4. Montrer que l'action de G sur Z est 2-transitive si et seulement si $\dim k(Z \times Z)^G = 2$.

Nous cherchons à présent à comprendre ce que cela signifie sur kZ.

5. Supposons que $\mathrm{car}(k) \nmid |Z|$. Vérifier que l'on a une décomposition comme représentation

$$kZ = k\left(\sum_{z \in Z} z\right) \oplus H$$

où le premier terme est isomorphe à la représentation triviale et où

$$H := \left\{ \sum_{z \in Z} \lambda_z z \;\middle|\; \sum_{z \in Z} \lambda_z = 0 \right\}.$$

Vérifier également que H est engendré comme k-espace vectoriel par les $(z - z')_{(z,z') \in Z \times Z}$.

Nous essayons ensuite de transcrire cela en conditions sur la représentation H. Supposons dans un premier temps que l'action de G sur Z est 2-transitive et que $\mathrm{car}(k) \nmid |G|$.

6. Démontrer que $\mathrm{car}(k) \nmid |Z|(|Z| - 1)$.
7. Calculer pour tout $z \in Z$ l'espace des invariants H^{G_z}.
8. Démontrer que H est irréductible non isomorphe à la représentation triviale
Indication : il faudra séparer le cas $|Z| = 2$.
Indication : pour une sous-représentation non nulle H', on pourra considérer un vecteur non nul $v \in H'$ et prendre z tel que la coordonnée de v sur z est non nulle. Essayez ensuite de créer un élément dans $H' \cap H^{G_z}$.

On démontre une réciproque dans le cas où l'on suppose en plus que k est algébriquement clos.

9. ● Démontrer que si H est irréductible distincte de la représentation triviale, alors

$$\dim k(Z \times Z)^G = 2.$$

Indication : on pourra se demander comme s'expriment les invariants par G de la représentation $\mathrm{Hom}_k(kZ, kZ)$.

10. ● On suppose que Z est de cardinal pair. Adapter le raisonnement pour $k = \mathbb{R}$.

Exercice 4. Représentations d'un p-groupe sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit G un p-groupe fini. Démontrer que la seule représentation de G sur un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension finie irréductible est de dimension 1 et triviale.

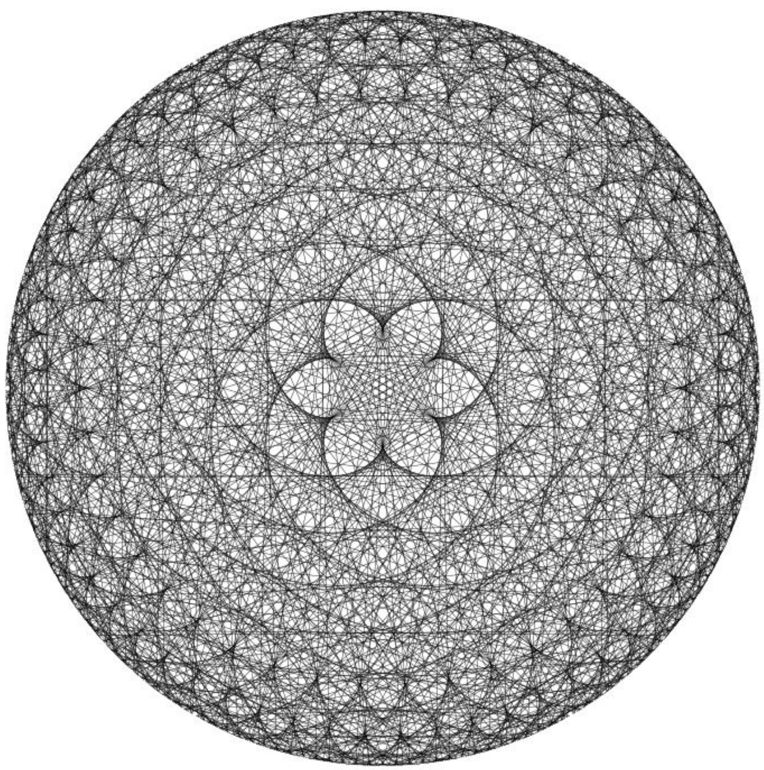

FIGURE 1 – Puissance 355^e appliquée aux racines 1002-ièmes de l'unité.