TD n°8 : Représentations
3 et 6/12/2024

Exercice 1. Dual et irréductibilité

Soit k un corps et G un groupe. Soit V une représentation de G dans un k-espace vectoriel de dimension finie.

1. Exhiber un isomorphisme canonique de représentations entre entre $(V^\vee)^\vee$ et V.
2. Démontrer que V est irréductible si et seulement si $V^\vee$ est irréductible.

Correction de l'exercice 1 :

1. Considérons l'application k-linéaire
$$\mathrm{ev} : V \to (V^\vee)^\vee, \ \ v \mapsto [\lambda \mapsto \lambda(v)].$$
Ce morphisme est injectif : si v est non nul, choissons un supplémentaire H de kv. La forme linéaire $\lambda_{v,H}$ définie par
$$w \mapsto \lambda \ \text{ tel que } \ w = h + \lambda v \ \text{ avec } \ h \in H$$
vérifie $\lambda_{v,H}(v) = 1$.
Par analyse des dimensions, c'est un isomorphisme k-linéaire. Reste à montrer qu'il s'agit d'un morphisme de représentations. On calcule l'action de $g \in G$ sur $\mathrm{ev}(v)$:
$$\begin{aligned}(g \cdot \mathrm{ev}(v))(\lambda) &= \mathrm{ev}(v)(g^{-1} \cdot \lambda)\\ &= \mathrm{ev}(v)(\lambda \circ g)\\ &= \lambda(g \cdot v)\\ &= \mathrm{ev}(g \cdot v)(\lambda)\end{aligned}$$
2. Soit W une sous-représentation de V. Alors $\{\lambda \in V^\vee \,|\, W \subset \mathrm{Ker}(\lambda)\}$ est une sous-représentation du dual. De plus, cette représentation est stricte (resp. triviale) si et seulement si W n'est pas trivial (resp. vaut V). Ainsi si V est réductible, alors $V^\vee$ aussi. En appliquant ce résultat à $V^\vee$, et en utilisant la première question, on prouve la réciproque.

Exercice 3. Représentation de permutation d'une action

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X et k un corps. Cet exercice considère la représentation de permutation kX dont l'espace sous-jacent est $\oplus_{x\in X} kx$ (i.e. un k-espace vectoriel de base indexée par X) et où
$$g \cdot \left(\sum_{x\in X} \lambda_x x\right) = \sum_{x\in X} \lambda_x g \cdot x = \sum_{x\in X} \lambda_{g^{-1}\cdot x} x.$$
Nous commençons par quelques questions générales.

1. Démontrer que le vecteur
$$v = \sum_{x\in X} \lambda_x x$$
appartient aux points de kX fixes sous G si et seulement si la fonction $x \mapsto \lambda_x$ est G-invariante, i.e. constante sur les orbites.

2. En déduire la dimension de kX^G.
3. Soit X, Y deux ensembles finis sur lesquels G agit. Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme de représentations

$$\mathrm{Hom}_k(kX, kY) \to k(X \times Y), \; T \mapsto \sum_{(x,y) \in X \times Y} t_{x,y}(x,y) \;\; \text{où } T(x) = \sum_{y \in Y} t_{x,y} y.$$

Pour une action de G sur un ensemble Z tel que $|Z| \geq 2$, on peut considérer l'action diagonale de G sur $Z \times Z$ qui consiste à agir simultanément sur les deux termes du produit.

4. Montrer que l'action de G sur Z est 2-transitive si et seulement si $\dim k(Z \times Z)^G = 2$.

Nous cherchons à présent à comprendre ce que cela signifie sur kZ.

5. Supposons que $\mathrm{car}(k) \nmid |Z|$. Vérifier que l'on a une décomposition comme représentation

$$kZ = k\left(\sum_{z \in Z} z\right) \oplus H$$

où le premier terme est isomorphe à la représentation triviale et où

$$H := \left\{ \sum_{z \in Z} \lambda_z z \;\middle|\; \sum_{z \in Z} \lambda_z = 0 \right\}.$$

Vérifier également que H est engendré comme k-espace vectoriel par les $(z - z')_{(z,z') \in Z \times Z}$.

Nous essayons ensuite de transcrire cela en conditions sur la représentation H. Supposons dans un premier temps que l'action de G sur Z est 2-transitive et que $\mathrm{car}(k) \nmid |G|$.

6. Démontrer que $\mathrm{car}(k) \nmid |Z|(|Z| - 1)$.
7. Calculer pour tout $z \in Z$ l'espace des invariants H^{G_z}.
8. Démontrer que H est irréductible non isomorphe à la représentation triviale
Indication : il faudra séparer le cas $|Z| = 2$.
Indication : pour une sous-représentation non nulle H', on pourra considérer un vecteur non nul $v \in H'$ et prendre z tel que la coordonnée de v sur z est non nulle. Essayez ensuite de créer un élément dans $H' \cap H^{G_z}$.

On démontre une réciproque dans le cas où l'on suppose en plus que k est algébriquement clos.

9. ● Démontrer que si H est irréductible distincte de la représentation triviale, alors

$$\dim k(Z \times Z)^G = 2.$$

Indication : on pourra se demander comme s'expriment les invariants par G de la représentation $\mathrm{Hom}_k(kZ, kZ)$.

10. ● On suppose que Z est de cardinal pair. Adapter le raisonnement pour $k = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. Écrivons que

$$g\left(\sum_{x \in X} \lambda_x x\right) = \sum_{x \in X} \lambda_x gx = \sum_{x \in X} \lambda_{g^{-1}x} x.$$

En identifiant les coordonnées, on obtient que $\forall g, x, \;\; \lambda_{g^{-1}x} = \lambda_x$. En l'appliquant à g^{-1}, on en déduit que $\lambda_{\_}$ est constante sur les orbites.
2. C'est la dimension des fonctions constantes sur les orbites, i.e. le nombre d'orbites (une base est constituée par exemple des fonctions indicatrices de chaque orbite).

3. C'est une application linéaire entre espace de même dimension, autrement dit un isomorphisme de k-espaces vectoriels. Elle est injective puisque, si son image est nulle, alors $\forall x,\ T(x) = 0$. C'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. Pour prouver qu'il est G-équivariant, calculons

$$\begin{aligned}(g\,T)x &= g\left(T(g^{-1}\,x)\right)\\ &= g\left(\sum_{y\in Y} t_{g^{-1}x,y}y\right)\\ &= \sum_{y\in Y} t_{g^{-1}x,y}gy\\ &= \sum_{y\in Y} t_{g^{-1}x,g^{-1}y}y\end{aligned}$$

Ainsi, l'image de $g\,T$ est

$$\sum_{(x,y)\in X\times Y} t_{g^{-1}x,g^{-1}y}(x,y) = \sum_{(x,y)\in X\times Y} t_{x,y}(gx,gy)$$

qui est exactement l'image de T à laquelle on aurait appliqué g.

4. La deuxième question affirme que $\dim k(Z\times Z)^G = 2$ si et seulement si l'action de G sur $Z\times Z$ possède exactement deux orbites. La diagonale $\Delta = \{(z,z)\,|\,z\in Z\}$ et son complémentaire sont stables par l'action de G. Puisque $|Z|\geq 2$, ces deux sous-ensembles sont non vides et $Z\times Z$ possède deux orbites si et seulement si ces deux sous-ensembles sont des orbites. La condition sur le complémentaire de la diagonale équivaut au fait que l'action de G est 2-transitive. Pour conclure, il faut remarquer que si l'action est 2 transitive, alors elle est transitive et la diagonale est bien une unique orbite.

5. Je me contente de donner la formule de la décomposition sur la somme directe et laisse à la charge du lecteur ou de la lectrice le soin de vérifier le caractère linéaire d'une telle décomposition.

$$kX \to \left(k\left(\sum_{z\in Z} z\right)\right)\times H,\ \sum_{z\in Z}\lambda_z z \mapsto \left(\frac{\sum_{z\in Z}\lambda z}{|Z|}\left(\sum_{z\in Z} z\right), \sum_{z\in Z}\left(\lambda_z - \frac{\sum_{z'\in Z}\lambda'_z}{|Z|}\right)z\right).$$

De plus, si nous choisissons $z_0\in Z$, alors tout élément de H s'écrit

$$\sum_{z\in Z}\lambda_z z = \sum_{z\in Z}\lambda_z z - \left(\sum_{z\in Z}\lambda_z\right)z_0 = \sum_{z\in Z}\lambda_z(z - z_0).$$

6. Comme l'action est transitive la formule orbite-stabilisateur donne que $|Z|\mid |G|$. Comme l'action est 2-transitive, pour $z\in Z$, le stabilisateur G_z agit transitivement sur $Z\backslash\{z\}$. La formule orbite stabilisateur affirme encore que $(|Z|-1)\mid |G_z|\mid |G|$. Avec l'hypothèse $\mathrm{car}(k)\nmid |G|$, on obtient le résultat voulu.

7. Soit $v = \sum_{z'\in Z}\lambda_{z'}z'$ dans H^{G_z}. Nous utilisons la première question pour le G_z-ensemble Z. Par 2-transitivité de l'action de G, le G_z-ensemble possède deux orbites : $\{z\}$ et $Z\backslash\{z\}$. Ceci implique que $v\in H^{G_z}$ s'écrit $v = \lambda z + \mu\sum_{z'\neq z} z'$. En ajoutant le fait que $v\in H$, on obtient que

$$k\left(z + \frac{1}{|Z|-1}\left(\sum_{z'\in Z\backslash\{z\}} z'\right)\right).$$

8. Soit H' une sous-représentation non nulle et $v\in H'$ non nul. On pose z tel que la coordonnée de v sur z est non nulle. En regardant la moyenne

$$v' = \frac{1}{|G_z|}\sum_{g\in G_z} g\cdot v,$$

on obtient un vecteur toujours dans H', de même coordonnée non nulle sur z, et invariant par G_z. Autrement dit, nous avons démontré que $H^{G_z} \subset H'$ puisque la question précédente démontrait que H^{G_z} est une droite.

Puisque l'action de G est transitive, nous choisissons g tel que $g \cdot z \neq z$. La différence suivante est toujours dans H' :

$$\left(z + \frac{1}{|Z|-1}\left(\sum_{z' \in Z\setminus\{z\}} z'\right)\right) - g \cdot \left(z + \frac{1}{|Z|-1}\left(\sum_{z' \in Z\setminus\{z\}} z'\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{|Z|-1}\right)(z - g \cdot z).$$

Dans le cas où $|Z| \geq 3$, ce vecteur est non nul et le sous-espace H' contient l'un des $z - z'$ pour $z \neq z'$. Il les contient donc tous par 2-transitivité de l'action. Nous avons démontré que $H' = H$. De plus, H est de dimension supérieure à 2 donc ne peut être triviale.

Dans le cas où $Z = \{z, z'\}$, la sous-représentation H est de dimension 1 donc irréductible. On a même que $H = k(z - z')$. De plus, la 2-transitivité affirme qu'il existe g tel que $g(z, z') = (z', z)$. Ainsi, g agit sur H par multiplication par (-1) donc H n'est pas triviale.

9. Appliquons la troisième question à $X = Y = Z$ et passons aux invariants ce qui donne

$$\mathrm{End}_k(kZ)^G = (k(Z \times Z))^G.$$

Le terme de gauche vaut exactement les endomorphismes de représentations de kX. En effet, dire qu'un endomorphisme k-linéaire f est fixe signifie que

$$\forall g \in G, \;\; g\, f = g \circ f \circ g^{-1} = f$$

ce qui se reformule en post-composant par g comme

$$\forall g \in G, \;\; g \circ f = f \circ g.$$

La représentation kX se décompose en irréductibles $1 \oplus H$ avec H non isomorphe à 1. Grâce au lemme de Schur, nous en déduisons que les endomorphismes de représentations kX sont exactement les endomorphismes par blocs valant une homothéties sur 1 et sur H, i.e. de dimension 2.

10. Le lemme de Schur fonctionne pour les représentations réelles de dimension impaire (on a toujours une valeur propre), donc pour H lorsqu'elle est irréductible.