

TD n°8 : Géométrie (projective ?)
24 et 28/11/2022

Exercice 1. Une suite exacte

Soit k un corps et $n \geq 1$ un entier.

1. Montrer que la composée

$$\mathrm{SL}_n(k) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(k) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_n(k)$$

s'insère dans une suite exacte canonique

$$1 \rightarrow \mu_n(k) \rightarrow \mathrm{SL}_n(k) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(k) \rightarrow k^\times / (k^\times)^n \rightarrow 1.$$

2. En déduire une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathrm{PSL}_n(k) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(k) \rightarrow k^\times / (k^\times)^n \rightarrow 1.$$

3. Déduire de la première question une suite exacte

$$1 \rightarrow \mu_n(k) \rightarrow \mathrm{SL}_n(k) \rightarrow \mathrm{PSL}_n(k) \rightarrow 1.$$

Démontrer qu'elle n'est pas scindée pour $n = 2$ et $\mathrm{car}(k) \neq 2$. On pourra considérer un relèvement de la classe $\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$.

4. La suite est-elle scindée lorsque $\mu_n(k) \neq \{1\}$?

Correction de l'exercice 1 :

1. Le déterminant est un morphisme de groupes surjectif $\det : \mathrm{GL}_n(k) \twoheadrightarrow k^\times$. L'image des homothéties est exactement $(k^\times)^n$ puisque $\det(\lambda \mathrm{Id}_n) = \lambda^n$. Le déterminant se factorise donc en un morphisme

$$\mathrm{PGL}_n(k) \twoheadrightarrow k^\times / (k^\times)^n.$$

Montrons que son noyau est exactement l'image de $\mathrm{SL}_n(k)$ par la composée annoncée. Tout élément de l'image est dans la classe d'une matrice de déterminant 1 et possède donc un déterminant égal à [1]. Réciproquement si $[g]$ est dans le noyau, ceci signifie que $\det(g) = \lambda^n$ pour un certain inversible λ . Nous en déduisons que $[g] = [\lambda^{-1}g]$ est dans l'image de $\mathrm{SL}_n(k)$. Enfin, une matrice est dans le noyau de la composée annoncée si et seulement si c'est une homothétie de déterminant 1, autrement dit si et seulement si elle est dans l'image de

$$\mu_n(k) \hookrightarrow \mathrm{SL}_n(k), \quad \lambda \mapsto \lambda \mathrm{Id}_n.$$

2. **À venir l'année prochaine, ou avant si vous demandez.**

Exercice 4. Le birapport

Soit k un corps de cardinal strictement supérieur à 4. Soit $\mathbf{P}^1(k)$ la droite projective sur k identifiée à $\widehat{k} = k \cup \{\infty\}$. Soit \mathcal{C} l'ensemble des quadruplets de points distincts dans $\mathbf{P}^1(k)$ muni de l'action diagonale sous $\mathrm{PGL}_2(k)$ et d'une action naturelle de \mathfrak{S}_4 en permutant les coordonnées. Ainsi, $\mathfrak{S}_4 \times \mathrm{PGL}_2(k)$ opère sur \mathcal{C} .

1. Soit $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{C}$. Montrer qu'il existe un unique $g \in \text{PGL}_2(k)$ tel que $(g \cdot z_1, g \cdot z_2, g \cdot z_3) = (0, 1, \infty)$.

On définit le *birapport* des quatre points de z par $\lambda(z) = [z_1, z_2, z_3, z_4] = g \cdot z_4 \in \widehat{k}$, où g est tel qu'à la première question.

2. Montrer que l'application $\Lambda : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{k}$ est constante sur les $\text{PGL}_2(k)$ -orbites et en déduire une bijection

$$\Lambda : \mathcal{C}/\text{PGL}_2(k) \rightarrow \widehat{k} \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

3. Montrer que l'action naturelle de \mathfrak{S}_4 sur \mathcal{C} induit une action sur $\widehat{k} \setminus \{0, 1, \infty\}$ de noyau K_4 . Expliciter l'action de (12) et (123) pour obtenir que \mathfrak{S}_4 agit par homographies sur $\widehat{k} \setminus \{0, 1, \infty\}$.
4. Démontrer que la composée

$$\mathcal{C}/\text{PGL}_2(k) \xrightarrow{\Lambda} \widehat{k} \setminus \{0, 1, \infty\} \xrightarrow[\lambda \mapsto \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}]{j} k.$$

est \mathfrak{S}_4 -invariante et qu'elle se factorise en une injection

$$J : \mathcal{C}/(\mathfrak{S}_4 \times \text{PGL}_2(k)) \hookrightarrow k.$$

Correction de l'exercice 4 :

Dans cette correction, en particulier dans les premières questions, nous ne faisons aucune distinction entre une droite et l'élément de \widehat{k} qui le représente.

1. Soient v_1, v_2 des vecteurs non nuls des droites z_1 et z_2 , qui définissent une base de k^2 puisque les droites sont distinctes. Soit v_3 un vecteur non nul de z_3 que l'on écrit $v_3 = av_1 + bv_2$ avec a et b non nuls puisque z_3 est une droite distincte des deux précédentes. Envoyer v_1 sur $(-b, 0)$ et v_2 sur (a, a) fournit un élément de $\text{GL}_2(k)$ dont l'action sur $\mathbf{P}^1(k)$ envoie z_1 sur $0 = k(1, 0)$, z_2 sur $1 = k(1, 1)$ et z_3 sur $\infty = k(0, 1)$. Notons g sa classe. Un élément de $\text{GL}_2(k)$ dont l'action sur $\mathbf{P}^1(k)$ est celle prescrite envoie v_1 sur $(c, 0)$ et v_2 sur (d, d) pour certains $c, d \neq 0$. Pour qu'il envoie v_3 dans $k(0, 1)$ il faut que $ac + bd = 0$, i.e. que $(c, d) = \alpha(-b, a)$ pour un certain α . La classe de notre élément de $\text{PGL}_2(k)$ est donc g , d'où l'unicité.

Donnez-vous de l'intuition en considérant que les matrices fixant 0 et ∞ correspondent aux matrices diagonalisables dans la base canonique puis en représentant l'action d'une telle matrice sur le cercle unité.

2. Soit $h \in \text{PGL}_2(k)$ et $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{C}$. Soit g comme à la première question. l'élément de $\text{PGL}_2(k)$ que fournit la première question pour $h \cdot z$ est alors gh^{-1} . Il en découle que

$$\Lambda(h \cdot z) = (gh^{-1})(h \cdot z_4) = g \cdot z_4 = \Lambda(z),$$

autrement dit que λ est constante sur les $\text{PGL}_2(k)$ -orbites.

Pour tout $\lambda \in \widehat{k} \setminus \{0, 1, \infty\}$, l'élément fournit par la première question pour $z = (0, 1, \infty, \lambda)$ est la classe de l'identité. A fortiori $\Lambda(z) = \lambda$ ce qui prouve la surjectivité. Enfin, la première question démontre en particulier que tout $z \in \mathcal{C}$ est dans l'orbite d'exactly un $(0, 1, \infty, \lambda)$, celui donné par $g \cdot z$, d'où l'injectivité.

3. L'action de \mathfrak{S}_4 et de $\text{PGL}_2(k)$ commutent ce qui démontre que l'action passe au quotient $\mathcal{C}/\text{PGL}_2(k)$, identifié à $\widehat{k} \setminus \{0, 1, \infty\}$ par Λ . Calculons l'action de la permutation (123). Nous pouvons nous contenter pour ces calculs de regarder ce qu'il se passe sur les représentants $(0, 1, \infty, \lambda)$ du quotient. En particulier, le g donne par la première question pour $(123) \cdot (0, 1, \infty, \lambda) = (1, \infty, 0, \lambda)$ est

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right].$$

Il envoie donc $(1, \lambda)$ sur $(1, 1/\lambda - 1)$. Comme $|k| > 4$, cette action ne peut être triviale¹. Le noyau de notre action ne contient pas (123) . Connaissant les sous-groupes distingués de \mathfrak{S}_4 , ce noyau est donc trivial ou égal à K_4 . Reste à considérer l'action de la transposition $(12)(34)$. Le g donne par la première question pour $(12)(34) \cdot (0, 1, \infty, \lambda) = (1, 0, \lambda, \infty)$ est

$$\left[\begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right].$$

Il envoie donc $k(0, 1)$ sur $k(1, \lambda)$. L'action est triviale ce qui démontre que le noyau est K_4 .

Les permutations fixant 4 forment un système de représentants de \mathfrak{S}_4/K_4 . Ainsi, pour démontrer que l'action est par homographies, il suffit de le montrer pour des permutations engendrant les permutations fixant 4, par exemple pour (12) et (123) . Le g donne par la première question pour $(12) \cdot (0, 1, \infty, \lambda) = (1, 0, \infty, \lambda)$ est

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Il envoie donc $k(1, \lambda)$ sur $k(1, 1 - \lambda)$. L'action de (12) sur $\widehat{k} \setminus \{0, 1, \infty\}$ s'écrit comme l'homographie $\lambda \mapsto 1 - \lambda$. Nous avons déjà calculé que l'action de (123) s'écrit comme l'homographie $\lambda \mapsto 1/\lambda - \lambda$.

4. La question précédente démontre que l'action de \mathfrak{S}_4 sur $\widehat{k} \setminus \{0, 1, \infty\}$ est engendrée par $\lambda \mapsto 1 - \lambda$ et $\lambda \mapsto 1/\lambda - \lambda$. Il suffit de démontrer que la fraction rationnelle définissant j est invariante par ces deux transformations, ce que je vous laisse vérifier.

Démontrer que la factorisation par le quotient par \mathfrak{S}_4 est une injection s'avère plus délicat. Comme Λ est une bijection, il suffit de vérifier que deux orbites dans $\widehat{k} \setminus \{0, 1, \infty\}$ sous l'action de \mathfrak{S}_4 ne sont pas envoyées par j sur le même point. Ces orbites ont peu de cardinaux possibles, puisque l'action de se factorise² par $\mathfrak{S}_4/K_4 \cong \mathfrak{S}_3$: un cardinal 6 si le stabilisateur est trivial, un cardinal 3 si le stabilisateur est engendré par une transposition et par K_4 , un cardinal 2 si le stabilisateur est engendré par un 3-cycle et K_4 et un cardinal 1 si le stabilisateur est tout le monde. Ce dernier cas est impossible puisque les actions de (12) et (123) n'ont pas les mêmes points fixes. De plus, l'action de (12) a au plus un point fixe, ce qui implique qu'il n'existe au plus une orbite de cardinal 3 : en effet si λ est dans une telle orbite, il est fixé par une transposition et quitte à considérer un autre élément de l'orbite, cette transposition est (12) . De même, il existe au plus une orbite de cardinal 2. Enfin, l'image réciproque par j d'un élément de k est constituée des racines d'un polynôme de degré 6 n'ayant ni 0 ni 1 pour racines. Il y en a donc au plus 6 et il ne peut y en avoir seulement 5. Ceci empêche que deux orbites soient envoyées sur le même élément, au vu de leurs cardinaux.

Exercice 6. Blocs d'une action

Soient G un groupe agissant sur un ensemble X et $B \subset X$ un sous-ensemble. On dit que B est un *bloc* pour cette action si on a $B \neq \emptyset$ et si pour tout $g \in G$ on a soit $g(B) = B$, soit $g(B) \cap B = \emptyset$. Un bloc $B \subset X$ est dit *trivial* si on a soit $B = X$, soit $|B| = 1$. Une action transitive sera dite *primitive* si tous ses blocs sont triviaux. Nous supposons dans cet exercice que l'action de G sur X est transitive.

1. Montrer que $B \subset X$ est un bloc si, et seulement si, les parties de la forme $g(B)$ avec $g \in G$ forment une partition de X .
2. Soit B un bloc et $G_B = \{g \in G \mid g(B) = B\}$. Démontrer que G_B est un sous-groupe de G puis exhiber une bijection croissante pour l'inclusion entre les blocs contenant B et les sous-groupes de G contenant G_B .
3. Démontrer qu'une action est primitive si et seulement si les stabilisateurs G_x sont des sous-groupes maximaux.
4. Vérifier qu'une action 2-transitive est primitive.

1. Il y a d'autres éléments dans k que 0, 1 et les racines de $X^2 - X - 1$.

2. Utiliser l'exercice 3 du TD n°6 pour l'isomorphisme.

Correction de l'exercice 6 :

1. Le seul détail à noter reste que nous avons besoin de la transitivité de l'action pour que les $g(B)$ recouvrent X .
2. Avec la première question, nous voyons que

$$X = \bigsqcup_{gG_B \in G/G_B} g(B),$$

où le terme du neutre est le bloc B . Construire des blocs contenant B semble raisonnablement correspondre à rassembler des termes de l'union. Cela nous invite à considérer l'application suivante :

$$\{G_B < H < G\} \rightarrow \{B \subseteq Y \subseteq X\}, \quad H \mapsto \bigsqcup_{hG_B \in H/G_B} h(B).$$

Démontrons que son image est formée de blocs. Soit H un sous-groupe contenant G_B . Il se trouve que si l'on fixe un système $\mathcal{R}(G/H)$ de représentants des classes à gauche, l'application

$$\mathcal{R}(G/H) \times H/G_B \rightarrow G/G_B, \quad (g, hG_B) \mapsto (ghG_B)$$

est une bijection. Nous pouvons alors réécrire

$$\begin{aligned} X &= \bigsqcup_{gG_B \in G/G_B} g(B) \\ &= \bigsqcup_{(g, hG_B) \in \mathcal{R}(G/H) \times H/G_B} gh(B) \\ &= \bigsqcup_{g \in \mathcal{R}(G/H)} g \left(\bigsqcup_{hG_B \in H/G_B} g(B) \right) \\ &= \bigsqcup_{gH \in G/H} g \left(\bigsqcup_{hG_B \in H/G_B} g(B) \right) \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de ce que l'union disjointe dans les parenthèses est un sous-ensemble de X stable par H . Cette partition démontre que les translatés du sous-ensemble de X contenant B créent une partition de X et qu'il s'agit donc d'un bloc.

On vérifie que l'application $\{B' \text{ bloc contenant } B\} \mapsto \{G_B < H < G\}$, $B' \mapsto G_{B'}$ fournit un inverse, puis que nos deux applications sont croissantes pour l'inclusion.

3. Une action est primitive si et seulement si pour tout $x \in X$, les seuls blocs contenant $\{x\}$ sont $\{x\}$ et X entier. En utilisant la bijection de la question précédente, cela signifie qu'il n'existe aucun sous-groupe de G contenant $G_{\{x\}}$ à part $G_{\{x\}}$ et G , i.e. que $G_{\{x\}}$ est maximal. Pour finir, remarquer que $G_{\{x\}}$ n'est autre que le stabilisateur de x .
4. Soit B un bloc contenant au moins deux éléments x et y . Pour tout $z \in X \setminus \{x\}$, il existe $g \in G_x$ tel que $gy = z$. Puisque $x \in g(B) \cap B$ et que B est un bloc, nous en déduisons que $g(B) = B$. Or $z \in g(B)$ donc $z \in B$. De là, on tire que $B = X$. L'action est primitive.

Exercice 7. Critère d'Iwasawa, version générale

On cherche à utiliser la notion d'action primitive tout juste introduite pour généraliser le critère d'Iwasawa que votre cours énoncé pour des actions 2-transitives.

1. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X et $N \triangleleft G$ un sous-groupe distingué. Démontrer que les N -orbites dans X sont des blocs.

2. (Critère d'Iwasawa, partie 1) Soit G un groupe agissant primitivement sur un ensemble X . Supposons qu'il existe un point $x \in X$ et un sous-groupe abélien distingué du stabilisateur $A \triangleleft G_x$ tel que les conjugués de A dans G engendrent G . Démontrer que pour tout sous-groupe distingué N de G soit N est contenu dans le noyau de l'action, soit N agit transitivement sur X .
3. (Critère d'Iwasawa, partie 2) Dans ce deuxième cas, démontrer successivement que $G = NA$ puis que $D(G) \subseteq N$.
4. En déduire que si G admet une action primitive fidèle qui vérifie les conditions précédentes, alors les sous-groupes distingués non triviaux de G sont en bijection avec les sous-groupes de $G^{\text{ab}} = G/D(G)$.

Correction de l'exercice 7 :

1. Soit $x \in X$ et $g, g' \in G$ tels que $gNx \cap g'Nx \neq \emptyset$. Puisque N est distingué, nous pouvons le réécrire $N(g \cdot x) \cap N(g' \cdot x) \neq \emptyset$. Autrement dit, $g \cdot x$ et $g' \cdot x$ sont dans la même N -orbite. Ainsi, $N(g \cdot x) = N(g' \cdot x)$ ce qui démontre que Nx est un bloc.
2. Soit $N \triangleleft G$. En utilisant la question précédente et la primitivité de l'action de G sur X , deux possibilités s'offrent à nous. Soit $Nx = \{x\}$ pour tout $x \in X$, ce qui implique que N est contenu dans le noyau de l'action. Soit $Nx = G$ ce qui implique que l'action de N sur X est transitive.
3. Nous nous plaçons dans le deuxième cas et cherchons à démontrer que $G = NA$. Puisque N est distingué, le produit interne NA est un sous-groupe de G , donc contient tous les conjugués de A par un élément de N . Nous savons également que les conjugués de A engendrent G . Cela fournit une direction : démontrer que les conjugués de A par N parcourent tous les conjugués de A . Il se trouve que les conjugués de A sont paramétrés par n'importe quel système de représentants des classes à gauche $G/N_G(A)$. Puisque $A \triangleleft G_x$, nous avons $G_x < N_G(A)$. Un système de représentants des classes à gauche G/G_x contient ainsi un système de représentants de $G/N_G(A)$. Or, la transitivité de l'action de N sur X affirme précisément que N contient un tel système de représentants. À présent que $G = NA$, le quotient G/N est alors isomorphe au quotient $A/N \cap A$; il est abélien. Cela implique que $D(G) \subseteq N$.
4. La fidélité de l'action exclut le cas où N est contenu dans le noyau. Les sous-groupes distingués de G contiennent donc son groupe dérivé et sont alors en bijection avec les sous-groupes distingués de G^{ab} . Ce dernier étant abélien, tous ses sous-groupes sont distingués.

Exercice 8. Simplicité de $\text{SO}(3)$

On propose dans cet exercice une application du critère d'Iwasawa à la simplicité de $\text{SO}(3)$.

1. Démontrer que les blocs non triviaux de l'action de $\text{SO}(3)$ sur la sphère \mathbb{S}^2 sont les paires de points antipodaux.
2. En considérant l'action de $\text{SO}(3)$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et le critère d'Iwasawa, démontrer que $\text{SO}(3)$ est simple.

Correction de l'exercice 8 :

1. Il n'est pas difficile de voir que les paires de points antipodaux sont des blocs. Soit B un bloc de la sphère contenant deux points non antipodaux, disons x et y . En considérant que les rotations d'axe x laissent stables le bloc B , nous en concluons que le cercle de centre x passant par y sur la sphère est contenu dans le bloc. Considérons "l'intérieur" de ce cercle, i.e. la partie la plus petite déterminée par ce cercle. Pour tout point p de l'intérieur de ce cercle, il existe deux points a, b sur le cercle tel que $|a - b| = |a - p|$. En particulier en faisant agir G_a , tout le disque est contenu dans B . Ce disque est centré en x ou en $-x$. Quitte à faire agir une symétrie d'axe dans l'hyperplan $(\mathbb{R}x)^\perp$, x est dans l'intérieur de B . Ainsi, le bloc B est ouvert. Comme ses translatés partitionnent \mathbb{S}^2 , la compacité et la connexité de la sphère impliquent que $B = \mathbb{S}^2$.

3. C'est en réalité une égalité par primitivité de l'action.

2. L'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ est un quotient de celle sur \mathbb{S}^2 par la relation d'antipodie qui est $\mathrm{SO}(3)$ -invariante. Un bloc dans $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ a pour image réciproque un bloc pour \mathbb{S}^2 . La première question démontre alors que l'action sur $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ est primitive puisque la projection de tous les blocs de \mathbb{S}^2 donnent les blocs triviaux dans $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$. Pour toute droite de $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$, le stabilisateur contient les rotations ayant cette droite pour axe, qui est distingué dans le stabilisateur puisque la conjugaison par un élément envoie l'axe de rotation sur le même axe, et dont les conjugués dans $\mathrm{SO}(3)$ l'engendrent puisque tout élément est une rotation. En appliquant le critère d'Iwasawa, il suffit alors de démontrer que $D(\mathrm{SO}(3)) = \mathrm{SO}(3)$. Pour ceci considérons une rotation d'angle θ et d'axe $\mathbb{R}x$. Nous choisissons deux axes $\mathbb{R}y_1$ et $\mathbb{R}y_2$ dans l'orthogonal de $\mathbb{R}x$ qui font un angle $\theta/2$. Leur composée laisse $\mathbb{R}x$ fixe et envoie y_1 sur un autre point du cercle dans $(\mathbb{R}x)^\perp$ qui fait un angle θ avec y_1 . Ainsi, la composée des deux symétries est la rotation souhaitée. Les deux symétries d'axes $\mathbb{R}y_1$ et $\mathbb{R}y_2$ sont conjuguées, autrement dit leur composition est un commutateur.