

Note sur la descente galoisienne

Nataniel Marquis

Mars 2022

Table des matières

1	Motivations	2
2	Descente galoisienne (classique)	3
2.1	Reformulation dans le cas affine	3
2.2	Expression d'une donnée de descente pour une extension finie galoisienne . . .	4
2.3	Expression d'une donnée de descente pour une extension galoisienne	12
3	Descentes galoisiennes étendues	18
3.1	Construction tensorielle et descente galoisienne	18
4	Aparté géométrique sur le cas galoisien fini	20

1 Motivations

Dans cette note, nous nous intéresserons à formaliser en quoi la théorie de la descente fidèlement plate (resp. la descente pro-étale dans le cadre perfectoïde) fournissent des énoncés de type descente galoisienne pour les modules. Il s'agira majoritairement de reformuler proprement la donnée de descente, vue comme isomorphisme vérifiant une relation de cocycle, en termes d'action galoisienne, en utilisant des outils purement algébriques. Bien que nous puissions prouver une preuve de loin plus concise dans `[stacks_descent_galois]`, la preuve algébrique du cas d'une extension finie se généralisera sans effort théorique au cas d'une extension quelconque. Nous considérerons ensuite des cas précis, qui m'ont servis dans d'autres écrits.

La descente fidèlement plate quasi-compacte (qui répondra par la suite au sobriquet de descente fpqc) correspond classiquement à l'énoncé que nous introduisons à présent, dont on peut trouver une version dans `[stacks_descent_general]`.

Définition 1.1. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Appelons p_1 et p_2 les deux projections $Y \times_X Y \rightarrow Y$ données par la définition catégorique du produit fibré. Appelons également π_{12}, π_{23} et π_{13} les trois projections $Y \times_X Y \times_X Y \rightarrow Y \times_X Y$ données par les trois visions possibles du triple produit fibré comme produit fibré de $Y \times_X Y$ et Y au-dessus de X . En particulier, la composition des π_{ij} avec p_1 donne la projection sur la i -ième copie de Y et celle par p_2 sur la j -ième copie de Y depuis le triple produit fibré que nous appellerons π_1, π_2 et π_3 .

Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_Y -module quasi-cohérent. Une donnée de descente sur \mathcal{F} le long de f est la donnée d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Y \times_X Y}$ -modules

$$\rho : p_1^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p_2^* \mathcal{F}$$

vérifiant la condition de cocycle suivante traduite par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1^* \mathcal{F} & \xrightarrow{\sim} & \pi_{13}^*(p_1^* \mathcal{F}) & \xrightarrow{\pi_{13}^* \rho} & \pi_{13}^*(p_2^* \mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & \pi_3^* \mathcal{F} \\
 & \searrow \sim & \pi_{12}^*(p_1^* \mathcal{F}) & & \pi_{23}^*(p_2^* \mathcal{F}) & \nearrow \sim & \\
 & & \pi_{12}^* \rho & & \pi_{23}^* \rho & & \\
 & & \pi_{12}^*(p_2^* \mathcal{F}) & & \pi_{23}^*(p_1^* \mathcal{F}) & & \\
 & & \searrow \sim & & \nearrow \sim & & \\
 & & \pi_2^* \mathcal{F} & & & &
 \end{array}$$

où le premier isomorphisme horizontal provient par exemple de

$$\pi_{13}^*(p_1^* \mathcal{F}) \cong (p_1 \circ \pi_{13})^* \mathcal{F} = \pi_1^* \mathcal{F}.$$

Nous notons $\text{Qcoh}(Y, f)$ la catégorie dont les objets sont les \mathcal{O}_Y -modules quasi-cohérents munis d'une donnée de descente le long de f et dont les morphismes sont les morphismes g de \mathcal{O}_Y -modules compatibles aux données de descentes, i.e. rendant commutatif le diagramme qui suit.

$$\begin{array}{ccc}
 p_1^* \mathcal{F} & \xrightarrow{p_1^* g} & p_1^* \mathcal{G} \\
 \downarrow \rho_{\mathcal{F}} & & \downarrow \rho_{\mathcal{G}} \\
 p_2^* \mathcal{F} & \xrightarrow{p_2^* g} & p_2^* \mathcal{G}
 \end{array}$$

Définition 1.2. Il existe un foncteur $\mathrm{Qcoh}(X) \rightarrow \mathrm{Qcoh}(Y, f)$ qui à un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent \mathcal{F} associe $f^*\mathcal{F}$ muni de l'isomorphisme canonique

$$p_1^*(f^*\mathcal{F}) \cong (f \circ p_1)^*\mathcal{F} = (f \circ p_2)^*\mathcal{F} \cong p_2^*(f^*\mathcal{F})$$

où l'égalité $f \circ p_1 = f \circ p_2$ provient de la définition du morphisme structural du produit fibré $Y \times_X Y$. À un morphisme $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, il associe le morphisme f^*g qui est compatible aux données de descente exactement grâce à l'égalité $f \circ p_1 = f \circ p_2$.

Théorème 1.3 (35.5.2 dans [stacks_descent_general] version affaiblie). *Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas fpqc. Le foncteur précédent $\mathrm{Qcoh}(X) \rightarrow \mathrm{Qcoh}(Y, f)$ est une équivalence de catégories.*

En réalité, le théorème précédent se généralise à un recouvrement fpqc de X avec une notions adaptée de donnée de descente. Notre but final étant d'explicitier le cas galoisien, il est possible de se contenter d'un recouvrement formé d'un unique morphisme.

2 Descente galosienne (classique)

2.1 Reformulation dans le cas affine

Commençons par reformuler le concept de donnée de descente dans le cas d'un morphisme affine. Posons pour cette section $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $f : A \rightarrow B$ le morphisme d'anneaux fpqc qui donne $\mathrm{Spec}(f) : Y \rightarrow X$. Par la suite, nous écrirons les morphismes schématiques comme $\mathrm{Spec}(\cdot)$ pour simplifier au maximum la notation des morphismes dans Ann. Dans ce cadre de schémas affines, tout \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent (resp. \mathcal{O}_Y -module quasi-cohérent) s'écrit \widetilde{M} pour un certain A -module M (resp. B -modules M).

Le schéma $Y \times_X Y$ correspond par construction à $\mathrm{Spec}(B \otimes_A B)$ où les deux projections $\mathrm{Spec}(p_1)$ et $\mathrm{Spec}(p_2)$ correspondent respectivement aux morphismes d'anneaux

$$p_1 : B \rightarrow B \otimes_A B, \quad b \mapsto b \otimes 1$$

et

$$p_2 : B \rightarrow B \otimes_A B, \quad b \mapsto 1 \otimes b.$$

Pour les mêmes raisons, le schéma $Y \times_X Y \times_X Y$ correspond par construction à $\mathrm{Spec}(B \otimes_A B \otimes_A B)$ et les projections correspondent à

$$\pi_{12} : B \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A B, \quad b \otimes c \mapsto b \otimes c \otimes 1$$

$$\pi_{23} : B \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A B, \quad b \otimes c \mapsto 1 \otimes b \otimes c$$

$$\pi_{13} : B \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A B, \quad b \otimes c \mapsto b \otimes 1 \otimes c$$

Puisque $M \rightarrow \widetilde{M}$ est une équivalence de catégories de $A - \mathrm{Mod}$ vers $\mathrm{Qcoh}(X)$ (resp. de $B - \mathrm{Mod}$ vers $\mathrm{Qcoh}(Y)$, etc), une donnée de descente de \widetilde{M} le long de $\mathrm{Spec}(f)$ correspond à un isomorphisme de $B \otimes_A B$ -modules

$$\rho : (B \otimes_A B) \otimes_{p_1, B} M \xrightarrow{\sim} (B \otimes_A B) \otimes_{p_2, B} M$$

tel que $\pi_{13}^*\rho = \pi_{23}^*\rho \circ \pi_{12}^*\rho$.

Par le même dictionnaire, le foncteur correspondant $A - \mathrm{Mod} \rightarrow B - \mathrm{Mod}_f$ correspond à $M \mapsto B \otimes_A M$ muni de l'isomorphisme

$$\rho : (B \otimes_A B) \otimes_{p_1, B} (B \otimes_A M) \cong (B \otimes_A B) \otimes_A M \cong (B \otimes_A B) \otimes_{p_2, B} (B \otimes_A M).$$

Proposition 2.1 (Proposition 35.3.9 dans [stacks_descent_affine]). *Si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux fpqc, le foncteur $A - \text{Mod} \rightarrow B - \text{Mod}_f$ est une équivalence de catégories. Il est possible d'expliciter un quasi-inverse en associant à un B -module M avec donnée de descente ρ le A -module $N = \{m \in M \mid \rho(m \otimes 1) = 1 \otimes m\}$ où tout morphisme $h : M_1 \rightarrow M_2$ de B -modules compatible à la donnée de descente se restreint-corestreint à $N_1 \rightarrow N_2$.*

La preuve du théorème 1.3 repose d'abord sur la démonstration de la proposition 2.1. Puisqu'il ne s'agit dans cette note que de reformulation d'une donnée de descente, et que un énoncé de descente général concerne des schémas, nous nous sommes permis d'introduire d'abord le langage géométrique, à contre-courant chronologique.

2.2 Expression d'une donnée de descente pour une extension finie galoisienne

Dans cette section, nous fixons un corps commutatif K et $L|K$ une extension galoisienne finie de groupe de Galois G . Pensant déjà à la section suivante qui traite le cas d'une extension quelconque, nous voyons G comme un groupe topologique avec la topologie discrète. Un lecteur ne s'intéressant pas au cas quelconque pourra oublier purement et simplement les conditions de continuité qui apparaîtront dans nos notations, et qui sont automatiques dans le cas d'une extension finie.

Bien que nous pourrions rédiger le cas galoisien quelconque ex nihilo, nous préférons rédiger la preuve complète de ce cas plus simple pour écrire tous les détails dans le cas simple et utiliser ensuite cet énoncé pour le cas quelconque. Un lecteur cherchant une preuve uniquement du cas galoisien quelconque lira a minima la première section : de nombreux arguments seront décalqués dessus par la suite (voire des résultats précis utilisés) sans être réitérés. Un lecteur cherchant une preuve dans un cas fini pourra se contenter de cette section pour davantage de lisibilité.

Lemme 2.2. *Munissons $\mathcal{C}^0(G, L)$ de la structure de K -algèbre terme à terme sur les images. Le morphisme suivant est alors bien défini*

$$\iota : L \otimes_K L \rightarrow \mathcal{C}^0(G, L), \quad \lambda \otimes \mu \mapsto [\sigma \mapsto \lambda\sigma(\mu)]$$

et fournit un isomorphisme de K -algèbres.

La structure de L -algèbre induite par $\iota \circ p_1$ sur $\mathcal{C}^0(G, L)$ étend la structure de K -algèbre et vérifie $(\lambda \cdot_1 f)(\sigma) = \lambda f(\sigma)$.

La structure de L -espace vectoriel induite par $\iota \circ p_2$ sur $\mathcal{C}^0(G, L)$ étend la structure de K -algèbre et vérifie $(\lambda \cdot_2 f)(\sigma) = \sigma(\lambda)f(\sigma)$.

Démonstration. Tout élément σ de G étant un morphisme de K -algèbres, on en déduit des morphismes de K -algèbres $L \otimes_K L \xrightarrow{\text{Id} \otimes \sigma} L$. En les rassemblant, nous obtenons un morphisme de K -algèbres $L \otimes_K L \rightarrow \prod_{\sigma \in G} L$ où le but s'identifie à $\mathcal{C}^0(G, L)$ comme K -algèbre. Via cette identification, nous obtenons exactement ι . Les K -dimensions de la source et du but de ι étant identiques, il suffit de prouver sa surjectivité. Nous utilisons ici une preuve peu conceptuelle : les caractères σ étant distincts, ils sont L -libres dans $\mathcal{L}_K(L)$. En particulier, si (μ_i) est une K -base de L , la matrice carrée des $(\sigma(\mu_i))_{\sigma,i}$ est inversible. Il en découle que pour toute famille (ν_σ) , il existe une famille (λ_i) telle que $(\nu_\sigma) = (\sigma(\mu_i))_{\sigma,i}(\lambda_i)$, autrement dit telle que $[\sigma \mapsto \nu_\sigma] = \iota(\sum \lambda_i \otimes \mu_i)$.

La structure multiplicative d'anneau à droite étant donnée par la multiplication image par image, il suffit de prouver que $(\iota \circ p_1)(\lambda) = [\sigma \mapsto \lambda]$:

$$\begin{aligned} (\iota \circ p_1)(\lambda) &= \iota(\lambda \otimes 1) \\ &= [\sigma \mapsto \lambda] \end{aligned}$$

La structure multiplicative d'anneau à droite étant donnée par la multiplication image par image, il suffit de prouver que $(\iota \circ p_2)(\lambda) = [\sigma \mapsto \sigma(\lambda)]$:

$$\begin{aligned} (\iota \circ p_2)(\lambda) &= \iota(1 \otimes \lambda) \\ &= [\sigma \mapsto \sigma(\lambda)] \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3. Soit M un L -espace vectoriel.

L'application $\mathcal{C}^0(G, L) \times M \rightarrow \mathcal{C}^0(G, M)$, $(f, m) \mapsto [\sigma \mapsto f(\sigma)m]$ est une application L -bilinéaire si l'on munit $\mathcal{C}^0(G, L)$ de la première structure de L -module et $\mathcal{C}^0(G, M)$ de la structure de L -module donnée par l'addition terme à terme et $(\lambda \cdot f)(\sigma) = \lambda f(\sigma)$. Elle se factorise en un isomorphisme de L -modules

$$\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_1, L} M \xrightarrow[k_1]{\sim} \mathcal{C}^0(G, M).$$

Le transfert de structure munit $\mathcal{C}^0(G, M)$ d'une structure de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -module via $(f \cdot_1 g)(\sigma) = f(\sigma)g(\sigma)$.

L'application $\mathcal{C}^0(G, L) \times M \rightarrow \mathcal{C}^0(G, M)$, $(f, m) \mapsto [\sigma \mapsto \sigma^{-1}(f(\sigma))m]$ est une application L -bilinéaire si l'on munit $\mathcal{C}^0(G, L)$ de la deuxième structure de L -module et $\mathcal{C}^0(G, M)$ de la même structure de L -module donnée par l'addition terme à terme et $(\lambda \cdot f)(\sigma) = \lambda f(\sigma)$. Elle se factorise en un isomorphisme de L -modules

$$\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_2, L} M \xrightarrow[k_2]{\sim} \mathcal{C}^0(G, M).$$

Le transfert de structure munit $\mathcal{C}^0(G, M)$ d'une structure de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -module via $(f \cdot_2 g)(\sigma) = \sigma^{-1}(f(\sigma))g(\sigma)$.

Démonstration. Nous laissons de côté la preuve de la bilinéarité. Pour le caractère isomorphique, en revanche, nous explicitons un inverse comme application via

$$\mathcal{C}^0(G, M) \rightarrow \mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_1, L} M, \quad f \mapsto \sum_{\sigma \in G} \mathbb{1}_{\{\sigma\}} \otimes f(\sigma),$$

puis il reste à vérifier la L -linéarité et le caractère inverse par évaluation sur les tenseurs purs. Pour ce qui est du transfert de structure, il suffit de vérifier que la structure induite sur l'image des tenseurs purs est la bonne. Ainsi, pour toutes $f, g \in \mathcal{C}^0(G, L)$ et tout $m \in M$, nous avons

$$\begin{aligned} k_1(f \cdot (g \otimes m)) &= k_1(fg \otimes m) \\ &= [\sigma \mapsto (fg)(\sigma)m] \\ &= [\sigma \mapsto f(\sigma)k_1(g \otimes m)(\sigma)] \\ &= f \cdot_1 k_1(g \otimes m) \end{aligned}$$

ce qui conclut.

Pour k_2 , le même raisonnement tient. Détaillons l'expression de l'inverse et le calcul pour le transfert de structure. L'inverse est donné par

$$\mathcal{C}^0(G, M) \rightarrow \mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_2, L} M, \quad f \mapsto \sum_{\sigma \in G} \mathbb{1}_{\{\sigma\}} \otimes f(\sigma)$$

et le calcul du transfert :

$$\begin{aligned}
k_2(f \cdot (g \otimes m)) &= k_2(fg \otimes m) \\
&= [\sigma \mapsto \sigma^{-1}((fg)(\sigma))m] \\
&= [\sigma \mapsto \sigma^{-1}(f(\sigma))k_2(g \otimes m)(\sigma)] \\
&= f \cdot_2 k_2(g \otimes m)
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. *Soit M un L -espace vectoriel. Se donner un isomorphisme $\rho : p_1^*M \xrightarrow{\sim} p_2^*M$ revient à se donner une famille de bijections σ -semi-linéaires $(\rho_\sigma)_{\sigma \in G}$ de M .*

Démonstration. Un isomorphisme ρ , via le tiré en arrière par l'isomorphisme ι , équivaut à un isomorphisme de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -modules

$$\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_1, L} M \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_2, L} M$$

En composant par les isomorphismes du lemme précédent, cela revient à un isomorphisme $\tilde{\rho}$ de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -modules de $\mathcal{C}^0(G, M)$ vers $\mathcal{C}^0(G, M)$ où les structures de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -modules sont respectivement données par \cdot_1 et \cdot_2 .

La clé consiste à remarquer que pour ces deux structures de modules, la multiplication par chaque $\mathbb{1}_{\{\sigma\}}$ coïncide (en appliquant le formulaire du lemme précédent). Prenons ρ un tel isomorphisme et posons $\rho_\sigma(m) = \left(\tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\{\sigma^{-1}\}}m) \right)(\sigma^{-1})$. Montrons tout d'abord que ρ_σ est σ -semi-linéaire. Puisque $m \mapsto \mathbb{1}_{\{\sigma^{-1}\}}m$ est additive de M dans $\mathcal{C}^0(G, M)$ et que $\tilde{\rho}$ l'est également, nous obtenons bien que ρ_σ est additive. De surcroît,

$$\begin{aligned}
\rho_\sigma(\lambda m) &= \left(\tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\{\sigma^{-1}\}}(\lambda m)) \right)(\sigma^{-1}) \\
&= \left(\tilde{\rho}((\lambda \mathbb{1}_{\{\sigma^{-1}\}}) \cdot_1 (\mathbb{1}_{\{\sigma^{-1}\}}m)) \right)(\sigma^{-1}) \\
&= \left((\lambda \mathbb{1}_{\{\sigma^{-1}\}}) \cdot_2 \tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\{\sigma^{-1}\}}m) \right)(\sigma^{-1}) \\
&= \sigma(\lambda \mathbb{1}_{\{\sigma^{-1}\}}(\sigma^{-1})) \left(\tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\{\sigma^{-1}\}}m) \right)(\sigma^{-1}) \\
&= \sigma(\lambda) \rho_\sigma(m)
\end{aligned}$$

De plus, les ρ_σ déterminent entièrement $\tilde{\rho}$. Nous avons en effet

$$\tilde{\rho}(f) = \tilde{\rho}\left(\sum_{\sigma \in G} \mathbb{1}_{\{\sigma\}} \cdot_1 \mathbb{1}_{\{\sigma\}} f(\sigma)\right) = \sum_{\sigma \in G} \mathbb{1}_{\{\sigma\}} \cdot_2 \tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\{\sigma\}} f(\sigma)) = \sum_{\sigma \in G} \mathbb{1}_{\{\sigma\}} \rho_{\sigma^{-1}}(f(\sigma))$$

Ainsi, $\tilde{\rho}$ peut s'exprimer comme $f \mapsto [\sigma \mapsto \rho_{\sigma^{-1}}(f(\sigma))]$. Réciproquement, on vérifie sans difficulté que la formule précédente pour des ρ_σ semi-linéaires fournit un isomorphisme $\tilde{\rho}$. □

Il nous reste à traduire la condition de cocycle sur les ρ_σ .

Lemme 2.5. *Munissons $\mathcal{C}^0(G \times G, L)$ de la structure de K -algèbre terme à terme. Le morphisme suivant est alors bien défini*

$$i : L \otimes_K L \otimes_K L \rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L), \quad \lambda \otimes \mu \otimes \nu \mapsto [(\sigma, \tau) \mapsto \lambda\sigma(\mu)(\sigma\tau)(\nu)]$$

et fournit un isomorphisme de K -algèbres.

La structure de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -algèbre induite par $i \circ \pi_{12} \circ \iota^{-1}$ sur $\mathcal{C}^0(G \times G, L)$ correspond à l'addition et la multiplication terme à terme et à $(f \cdot_{12} g)(\sigma, \tau) = f(\sigma)g(\sigma, \tau)$. En particulier, l'image de $\mathbb{1}_{\{\sigma\}}$ est $\mathbb{1}_{\{\sigma\} \times G}$.

La structure de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -algèbre induite par $i \circ \pi_{23} \circ \iota^{-1}$ sur $\mathcal{C}^0(G \times G, L)$ correspond à l'addition et la multiplication terme à terme et à $(f \cdot_{23} g)(\sigma, \tau) = \sigma(f(\tau))g(\sigma, \tau)$. En particulier, l'image de $\mathbb{1}_{\{\sigma\}}$ est $\mathbb{1}_{G \times \{\sigma\}}$.

La structure de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -algèbre induite par $i \circ \pi_{13} \circ \iota^{-1}$ sur $\mathcal{C}^0(G \times G, L)$ correspond à l'addition et la multiplication terme à terme et à $(f \cdot_{13} g)(\sigma, \tau) = f(\sigma\tau)g(\sigma, \tau)$. En particulier, l'image de $\mathbb{1}_{\{\sigma\}}$ est $\mathbb{1}_{\{(\tau, \nu) \mid \tau\nu = \sigma\}}$.

Démonstration. Suivons la stratégie de preuve du lemme 2.2. Tout élément σ de G étant un morphisme de K -algèbres, on en déduit des morphismes de K -algèbres $L \otimes_K L \otimes_K L \xrightarrow{\text{Id} \otimes \sigma \otimes (\sigma\tau)} L$. En les rassemblant, nous obtenons un morphisme de K -algèbres $L \otimes_K L \rightarrow \prod_{(\sigma, \tau) \in G \times G} L$ où le but s'identifie à $\mathcal{C}^0(G \times G, L)$ comme K -algèbre. Via cette identification, nous obtenons exactement i . Les K -dimensions de la source et du but de i étant identiques, il suffit de prouver sa surjectivité. Nous avons prouvé dans le cadre du lemme 2.2 que la matrice carré des $(\sigma(\mu_i))_{\sigma, i}$ est inversible. Son produit tensoriel double avec elle-même $(\sigma(\mu_i)\tau(\mu_j))_{(\sigma, \tau), (i, j)}$ est également inversible. En permutant les lignes, on en déduit que la matrice $(\sigma(\mu_i)(\sigma\tau)(\mu_j))_{(\sigma, \tau), (i, j)}$ est inversible. Il en découle que pour toute famille $(\nu_{(\sigma, \tau)})$, il existe une famille $(\lambda_{(i, j)})$ telle que $(\nu_{(\sigma, \tau)}) = (\sigma(\mu_i)(\sigma\tau)(\mu_j))_{(\sigma, \tau), (i, j)}(\lambda_{(i, j)})$, autrement dit telle que $[\sigma \mapsto \nu_{(\sigma, \tau)}] = \iota(\sum_{(i, j)} \lambda_{(i, j)} \otimes \mu_i \otimes \mu_j)$.

La structure multiplicative d'anneau à droite étant donnée par la multiplication image par image, il suffit de prouver que $(i \circ \pi_{12} \circ \iota^{-1})(f) = [(\sigma, \tau) \mapsto f(\sigma)]$. Posons $f = \iota(\sum \lambda_i \otimes \mu_i)$ de telle sorte que pour tout σ , on a $\sum \lambda_i \sigma(\mu_i) = f(\sigma)$

$$\begin{aligned} (i \circ \pi_{12} \circ \iota^{-1})(f) &= (i \circ \pi_{12})(\sum \lambda_i \otimes \mu_i) \\ &= i(\sum \lambda_i \otimes \mu_i \otimes 1) \\ &= [(\sigma, \tau) \mapsto \sum \lambda_i \sigma(\mu_i)] \\ &= [(\sigma, \tau) \mapsto f(\sigma)] \end{aligned}$$

L'image de $\mathbb{1}_{\{\sigma\}}$ ne pose aucun problème.

La structure multiplicative d'anneau à droite étant donnée par la multiplication image par image, il suffit de prouver que $(i \circ \pi_{23} \circ \iota^{-1})(f) = [(\sigma, \tau) \mapsto \sigma(f(\tau))]$. Posons $f = \iota(\sum \lambda_i \otimes \mu_i)$ de telle sorte que pour tout σ , on a $\sum \lambda_i \sigma(\mu_i) = f(\sigma)$

$$\begin{aligned} (i \circ \pi_{23} \circ \iota^{-1})(f) &= (i \circ \pi_{12})(\sum \lambda_i \otimes \mu_i) \\ &= i(\sum 1 \otimes \lambda_i \otimes \mu_i) \\ &= [(\sigma, \tau) \mapsto \sum \sigma(\lambda_i)(\sigma\tau)(\mu_i)] \\ &= \left[(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\left(\sum \lambda_i \tau(\mu_i)\right) \right] \\ &= [(\sigma, \tau) \mapsto \sigma(f(\tau))] \end{aligned}$$

L'image de $\mathbb{1}_{\{\sigma\}}$ ne pose aucun problème.

La structure multiplicative d'anneau à droite étant donnée par la multiplication image par image, il suffit de prouver que $(i \circ \pi_{13} \circ \iota^{-1})(f) = [(\sigma, \tau) \mapsto f(\sigma)]$. Posons $f = \iota(\sum \lambda_i \otimes \mu_i)$

de telle sorte que pour tout σ , on a $\sum \lambda_i \sigma(\mu_i) = f(\sigma)$

$$\begin{aligned} (i \circ \pi_{13} \circ \iota^{-1})(f) &= (i \circ \pi_{13})(\sum \lambda_i \otimes \mu_i) \\ &= i(\sum \lambda_i \otimes 1 \otimes \mu_i) \\ &= [(\sigma, \tau) \mapsto \sum \lambda_i(\sigma\tau)(\mu_i)] \\ &= [(\sigma, \tau) \mapsto f(\sigma\tau)] \end{aligned}$$

L'image de $\mathbb{1}_{\{\sigma\}}$ ne pose aucun problème. \square

Lemme 2.6. Soit M un L -espace vectoriel.

L'application $\mathcal{C}^0(G \times G, L) \times M \rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, M)$, $(f, m) \mapsto [(\sigma, \tau) \mapsto f(\sigma, \tau)m]$ est une application L -bilinéaire si l'on munit $\mathcal{C}^0(G \times G, L)$ de la première structure de L -module et $\mathcal{C}^0(G \times G, M)$ de la structure de L -module donnée terme à terme par celle sur M . Elle se factorise en un isomorphisme de L -modules

$$\mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_1, L} M \xrightarrow{j_1} \mathcal{C}^0(G, M).$$

L'application $\mathcal{C}^0(G \times G, L) \times M \rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, M)$, $(f, m) \mapsto [(\sigma, \tau) \mapsto \sigma^{-1}(f(\sigma, \tau))m]$ est une application L -bilinéaire si l'on munit $\mathcal{C}^0(G \times G, L)$ de la deuxième structure de L -module et $\mathcal{C}^0(G \times G, M)$ de la structure de L -module donnée terme à terme par celle sur M . Elle se factorise en un isomorphisme de L -modules

$$\mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_2, L} M \xrightarrow{j_2} \mathcal{C}^0(G, M).$$

L'application $\mathcal{C}^0(G \times G, L) \times M \rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, M)$, $(f, m) \mapsto [(\sigma, \tau) \mapsto (\sigma\tau)^{-1}(f(\sigma, \tau))m]$ est une application L -bilinéaire si l'on munit $\mathcal{C}^0(G \times G, L)$ de la deuxième structure de L -module et $\mathcal{C}^0(G \times G, M)$ de la structure de L -module donnée terme à terme par celle sur M . Elle se factorise en un isomorphisme de L -modules

$$\mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_3, L} M \xrightarrow{j_3} \mathcal{C}^0(G, M).$$

Démonstration. Puisque la multiplication sur $\mathcal{C}^0(G \times G, L)$ se fait terme à terme, expliciter sa première structure de L -algèbre revient à calculer l'image de $\lambda \in L$ par $i \circ \pi_1$. Or, nous avons

$$(i \circ \pi_1)(\lambda) = i(\lambda \otimes 1 \otimes 1) = [(\sigma, \tau) \mapsto \lambda].$$

Nous laissons le calcul de bilinéarité de côté et nous contentons d'expliquer un inverse incarné par l'application

$$\mathcal{C}^0(G \times G, M) \rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_1, L} M, f \mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes f(\sigma, \tau).$$

Il reste à vérifier la L -linéarité et le caractère inverse par évaluation sur les tenseurs purs.

Puisque la multiplication sur $\mathcal{C}^0(G \times G, L)$ se fait terme à terme, expliciter sa deuxième structure de L -algèbre revient à calculer l'image de $\lambda \in L$ par $i \circ \pi_2$. Or, nous avons

$$(i \circ \pi_2)(\lambda) = i(1 \otimes \lambda \otimes 1) = [(\sigma, \tau) \mapsto \sigma(\lambda)].$$

Nous laissons le calcul de bilinéarité de côté et nous contentons d'expliquer un inverse incarné par l'application

$$\mathcal{C}^0(G \times G, M) \rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_2, L} M, f \mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes f(\sigma, \tau).$$

Il reste à vérifier la L -linéarité et le caractère inverse par évaluation sur les tenseurs purs.

Puisque la multiplication sur $\mathcal{C}^0(G \times G, L)$ se fait terme à terme, expliciter sa première structure de L -algèbre revient à calculer l'image de $\lambda \in L$ par $i \circ \pi_3$. Or, nous avons

$$(i \circ \pi_2)(\lambda) = i(1 \otimes 1 \otimes \lambda) = [(\sigma, \tau) \mapsto (\sigma\tau)(\lambda)].$$

Nous laissons le calcul de bilinéarité de côté et nous contentons d'expliquer un inverse incarné par l'application

$$\mathcal{C}^0(G \times G, M) \rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_3, L} M, \quad f \mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes f(\sigma, \tau).$$

Il reste à vérifier la L -linéarité et le caractère inverse par évaluation sur les tenseurs purs. \square

Proposition 2.7. *Soit ρ et $(\rho_\sigma)_{\sigma \in G}$ associé comme en proposition 2.4. L'application ρ vérifie la condition de cocycle d'une donnée de descente si et seulement si les ρ_σ fournissent une action semi-linéaire de G sur le L -espace vectoriel M , i.e. si $\rho_{\sigma\tau} = \rho_\sigma \circ \rho_\tau$.*

En particulier, la catégorie des L -espaces vectoriels avec donnée de descente le long de $K \rightarrow L$ est équivalente à la catégorie des L -espaces vectoriels avec action semi-linéaire de G .

Démonstration. Soit ρ une donnée de descente. Considérons la composée suivante ρ_{12} :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0(G \times G, M) &\xrightarrow{j_1} \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_1, L} M \\ &\rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_{12} \circ \iota^{-1}, \mathcal{C}^0(G, L)} \left(\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_1, L} M \right) \\ &\xrightarrow{(i \circ \pi_{12})^*[(\iota^{-1})^* \rho]} \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_{12} \circ \iota^{-1}, \mathcal{C}^0(G, L)} \left(\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_2, L} M \right) \\ &\rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_2, L} M \\ &\xrightarrow{j_2} \mathcal{C}^0(G \times G, M) \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme puisque toutes les flèches qui la composent le sont. De même, considérons la composée ρ_{23}

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0(G \times G, M) &\xrightarrow{j_2} \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_2, L} M \\ &\rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_{23} \circ \iota^{-1}, \mathcal{C}^0(G, L)} \left(\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_1, L} M \right) \\ &\xrightarrow{(i \circ \pi_{23})^*[(\iota^{-1})^* \rho]} \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_{23} \circ \iota^{-1}, \mathcal{C}^0(G, L)} \left(\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_2, L} M \right) \\ &\rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_3, L} M \\ &\xrightarrow{j_3} \mathcal{C}^0(G \times G, M) \end{aligned}$$

et la composée ρ_{13}

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0(G \times G, M) &\xrightarrow{j_1} \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_1, L} M \\ &\rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_{13} \circ \iota^{-1}, \mathcal{C}^0(G, L)} \left(\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_1, L} M \right) \\ &\xrightarrow{(i \circ \pi_{13})^*[(\iota^{-1})^* \rho]} \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_{13} \circ \iota^{-1}, \mathcal{C}^0(G, L)} \left(\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_2, L} M \right) \\ &\rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_3, L} M \\ &\xrightarrow{j_3} \mathcal{C}^0(G \times G, M) \end{aligned}$$

La condition $\pi_{13}^* \rho = \pi_{23}^* \rho \circ \pi_{12}^* \rho$ (où nous n'oublions pas les isomorphismes sous-entendus pour donner du sens à la composée), puisque les j_k sont des bijections, équivaut à la condition $\rho_{13} = \rho_{23} \circ \rho_{12}$.

Grâce à la description en proposition 2.4, nous connaissons l'expression de $(\iota^{-1})^* \rho$ comme étant $\sum_{\sigma \in G} \mathbb{1}_{\{\sigma\}} \otimes m_\sigma \mapsto \sum_{\sigma \in G} \mathbb{1}_{\{\sigma\}} \otimes \rho_{\sigma^{-1}}(m_\sigma)$. Nous pouvons alors expliciter ρ_{12} en suivant le chemin de f :

$$\begin{aligned}
f \mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes f(\sigma, \tau) &= \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} [(\mathbb{1}_{\{\sigma\}} \times_G \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}})] \otimes f(\sigma, \tau) \\
&= \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} [(\mathbb{1}_{\{\sigma\}}) \cdot_{12} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}}] \otimes f(\sigma, \tau) \\
\mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes [\mathbb{1}_{\{\sigma\}} f(\sigma, \tau)] \\
\mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes [\mathbb{1}_{\{\sigma\}} \rho_{\sigma^{-1}}(f(\sigma, \tau))] \\
&\sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} [(\mathbb{1}_{\{\sigma\}}) \cdot_{12} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}}] \otimes \rho_{\sigma^{-1}}(f(\sigma, \tau)) \\
&= [(\sigma, \tau) \mapsto \rho_{\sigma^{-1}}(f(\sigma, \tau))]
\end{aligned}$$

et on calcule de même pour ρ_{23}

$$\begin{aligned}
f \mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes f(\sigma, \tau) &= \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} [(\mathbb{1}_{G \times \{\tau\}}) \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}}] \otimes f(\sigma, \tau) \\
&= \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} [(\mathbb{1}_{\{\tau\}}) \cdot_{23} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}}] \otimes f(\sigma, \tau) \\
\mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes [\mathbb{1}_{\{\tau\}} f(\sigma, \tau)] \\
\mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes [\mathbb{1}_{\{\tau\}} \rho_{\tau^{-1}}(f(\sigma, \tau))] \\
&\sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} [(\mathbb{1}_{\{\tau\}}) \cdot_{23} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}}] \otimes \rho_{\tau^{-1}}(f(\sigma, \tau)) \\
&= [(\sigma, \tau) \mapsto \rho_{\tau^{-1}}(f(\sigma, \tau))]
\end{aligned}$$

et pour ρ_{13}

$$\begin{aligned}
f \mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes f(\sigma, \tau) &= \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} [(\mathbb{1}_{\{(v, \chi) \mid v\chi = \sigma\tau}}) \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}}] \otimes f(\sigma, \tau) \\
&= \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} [(\mathbb{1}_{\{\sigma\tau\}}) \cdot_{13} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}}] \otimes f(\sigma, \tau) \\
\mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes [\mathbb{1}_{\{\sigma\tau\}} f(\sigma, \tau)] \\
\mapsto \sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}} \otimes [\mathbb{1}_{\{\sigma\tau\}} \rho_{(\sigma\tau)^{-1}}(f(\sigma, \tau))] \\
&\sum_{(\sigma, \tau) \in G \times G} [(\mathbb{1}_{\{\sigma\tau\}}) \cdot_{13} \mathbb{1}_{\{(\sigma, \tau)\}}] \otimes \rho_{(\sigma\tau)^{-1}}(f(\sigma, \tau)) \\
&= [(\sigma, \tau) \mapsto \rho_{(\sigma\tau)^{-1}}(f(\sigma, \tau))].
\end{aligned}$$

Tous ces calculs effectués, nous en concluons que la condition de cocycle sur ρ équivaut à la propriété suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(G \times G, M), \forall (\sigma, \tau) \in G \times G, \rho_{(\sigma\tau)^{-1}}(f(\sigma, \tau)) = \rho_{\tau^{-1}}(\rho_{\sigma^{-1}}(f(\sigma, \tau))).$$

En inversant σ et τ et en considérant que les $f(\sigma, \tau)$ parcourent M quand (f, σ, τ) parcourt $\mathcal{C}^0(G \times G, M) \times G \times G$, cette condition équivaut à

$$\forall (\sigma, \tau) \in G \times G, \rho_{\tau\sigma} \equiv \rho_{\tau} \circ \rho_{\sigma}.$$

□

Théorème 2.8. *La catégorie des L -espaces vectoriels avec donnée de descente le long de $K \rightarrow L$ est équivalente à la catégorie des L -espaces vectoriels avec action semi-linéaire de G . Via cette équivalence de catégorie, le quasi-inverse au théorème 2.1 correspond à $M \mapsto M^G$.*

Démonstration. Pour un morphisme $(M, \rho_M) \xrightarrow{f} (N, \rho_N)$ de L -espaces vectoriels avec donnée de descente, les isomorphismes du lemme 2.3 étant naturels en M , le diagramme de commutation associé aux données de descente devient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}^0(G, M) & \xrightarrow{(\iota \circ p_1)^* f} & \mathcal{C}^0(G, N) \\
\downarrow \widetilde{\rho}_M & & \downarrow \widetilde{\rho}_N \\
\mathcal{C}^0(G, M) & \xrightarrow{(\iota \circ p_2)^* f} & \mathcal{C}^0(G, N)
\end{array}$$

ce qui permet ensuite d'affirmer que f est G -équivariant de $(M, \rho_{M, \sigma})$ vers $(N, \rho_{N, \sigma})$. En combinant les propositions 2.4 et 2.7, nous avons prouvé que $(M, \rho) \mapsto (M, \rho_{\sigma})$ est une équivalence de catégorie entre les L -espaces vectoriels avec donnée de descente le long de $K \rightarrow L$ est équivalente à la catégorie des L -espaces vectoriels avec action semi-linéaire de G .

Puisque le K -module associé à (M, ρ) correspond à $\{m \in M \mid \rho(1 \otimes m) = 1 \otimes m\}$. En transformant ρ en $\widetilde{\rho}$ cela devient $\{m \in M \mid \widetilde{\rho}(\mathbb{1}_G m) = \mathbb{1}_G m\}$ et grâce à l'expression de $\widetilde{\rho}$, cela devient

$$\{m \in M \mid [\sigma \mapsto \rho_{\sigma^{-1}}(m)] = \mathbb{1}_G m\} = M^G.$$

□

Les notations de cette preuve sont lourdes. Identifions bien que l'essentielle de la surprise se dévoile à la proposition 2.4 en voyant qu'un isomorphisme ρ se "décompose" coordonnée par coordonnée. L'étude de la condition de cocycle, n'est quant à elle, pas plus surprenante que le travail harassant de traduction qu'elle suppose.

2.3 Expression d'une donnée de descente pour une extension galoisienne

Dans cette section, nous conservons le corps commutatif K et fixons $L|K$ une extension galoisienne dont nous n'imposons plus la finitude. Son groupe de Galois G sera vu comme groupe topologique avec la topologie profini dont un système de voisinages de l'identité est donné par les $\text{Gal}(L|L')$ pour toute extension finie galoisienne $L|L'|K$. Ces groupes sont d'indice fini.

L'introduction de la notation $\mathcal{C}^0(G, L)$ dans la section précédente pouvait sembler étrange dans le cadre d'un groupe fini avec la topologie discrète ; dans le cadre d'un groupe de Galois profini, la notation est plus intéressante : puisqu'il est compact, il existera une extension finie galoisienne $L|L'|K$ telle que l'image d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(G, L)$ ne dépende que de la classe de σ dans $\text{Gal}(L'|K)$.

Lemme 2.9. *Munissons $\mathcal{C}^0(G, L)$ de la structure de K -algèbre terme à terme sur les images. Le morphisme suivant est alors bien défini*

$$\iota : L \otimes_K L \rightarrow \mathcal{C}^0(G, L), \quad \lambda \otimes \mu \mapsto [\sigma \mapsto \lambda\sigma(\mu)]$$

et fournit un isomorphisme de K -algèbres.

La structure de L -algèbre induite par $\iota \circ p_1$ sur $\mathcal{C}^0(G, L)$ étend la structure de K -algèbre et vérifie $(\lambda \cdot_1 f)(\sigma) = \lambda f(\sigma)$.

La structure de L -espace vectoriel induite par $\iota \circ p_2$ sur $\mathcal{C}^0(G, L)$ étend la structure de K -algèbre et vérifie $(\lambda \cdot_2 f)(\sigma) = \sigma(\lambda)f(\sigma)$.

Démonstration. L'extension L est la colimite des extensions finies galoisiennes $L'|K$ contenues en elle. Pour $L''|L'|K$ une tour de telles extensions, les isomorphismes du lemme 2.2 font commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} L' \otimes_K L' & \xrightarrow{\iota_{L'}} & \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \\ \downarrow & & \downarrow \\ L'' \otimes_K L'' & \xrightarrow{\iota_{L''}} & \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L''|K), L'') \end{array}$$

où les flèches verticales sont obtenues via l'inclusion $L' \subseteq L''$ et la projection $\text{Gal}(L''|K) \rightarrow \text{Gal}(L'|K)$. En prenant la colimite des isomorphismes $\iota_{L'}$, nous obtenons un isomorphisme. Il a pour source la colimite des $L' \otimes_K L'$ qui s'identifie à $L \otimes_K L$ puisque L est la colimite des extensions L' . Il a pour but $\mathcal{C}^0(G, L)$: toute fonction continue se factorise par un certain $G \rightarrow \text{Gal}(L'|K)$ comme nous l'avons dit précédemment, et son image étant finie, elle est également contenue dans une extension finie L'' . En prenant L''' contenant L' et L'' , ladite fonction appartient bien à $\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'''|K), L''')$. Très précisément, on démontre ainsi que le morphisme de K -algèbres

$$\varinjlim_{L'|K \text{ finie galoisienne}} \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \rightarrow \mathcal{C}^0(G, L), \quad f \in \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \mapsto [\sigma \mapsto f(\sigma|_{L'})]$$

est un isomorphisme, qui se trouve être exactement l'isomorphisme ι annoncé.

La structure multiplicative d'anneau à droite étant donnée par la multiplication image par image, il suffit de prouver que $(\iota \circ p_1)(\lambda) = [\sigma \mapsto \lambda]$:

$$\begin{aligned} (\iota \circ p_1)(\lambda) &= \iota(\lambda \otimes 1) \\ &= [\sigma \mapsto \lambda] \end{aligned}$$

La structure multiplicative d'anneau à droite étant donnée par la multiplication image par image, il suffit de prouver que $(\iota \circ p_2)(\lambda) = [\sigma \mapsto \sigma(\lambda)]$:

$$\begin{aligned} (\iota \circ p_2)(\lambda) &= \iota(1 \otimes \lambda) \\ &= [\sigma \mapsto \sigma(\lambda)] \end{aligned}$$

Remarquons au passage que puisque L est union d'extensions finies, la fonction $\sigma \mapsto \sigma(\lambda)$ est effectivement continue (nous l'avons utilisé sans l'explicitier au cours de la preuve). \square

Lemme 2.10. *Soit M un L -espace vectoriel.*

L'application $\mathcal{C}^0(G, L) \times M \rightarrow \mathcal{C}^0(G, M)$, $(f, m) \mapsto [\sigma \mapsto f(\sigma)m]$ est une application L -bilinéaire si l'on munit $\mathcal{C}^0(G, L)$ de la première structure de L -espace vectoriel et $\mathcal{C}^0(G, M)$ de la structure de L -espace vectoriel donnée par sa structure sur M , i.e. $(\lambda \cdot f)(\sigma) = \lambda f(\sigma)$. Elle se factorise en un isomorphisme de L -modules

$$\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_1, L} M \xrightarrow[k_1]{\sim} \mathcal{C}^0(G, M).$$

Le transfert de structure munit $\mathcal{C}^0(G, M)$ d'une structure de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -module via $(f \cdot_1 g)(\sigma) = f(\sigma)g(\sigma)$.

L'application $\mathcal{C}^0(G, L) \times M \rightarrow \mathcal{C}^0(G, M)$, $(f, m) \mapsto [\sigma \mapsto \sigma^{-1}(f(\sigma))m]$ est une application L -bilinéaire si l'on munit $\mathcal{C}^0(G, L)$ de la deuxième structure de L -espace vectoriel et $\mathcal{C}^0(G, M)$ de sa structure de L -espace vectoriel donnée par celle sur M . Elle se factorise en un isomorphisme de L -modules

$$\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_2, L} M \xrightarrow[k_2]{\sim} \mathcal{C}^0(G, M).$$

Le transfert de structure munit $\mathcal{C}^0(G, M)$ d'une structure de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -module via $(f \cdot_2 g)(\sigma) = \sigma^{-1}(f(\sigma))g(\sigma)$.

Démonstration. La bilinéarité ne pose aucun problème.

Pour toute fonction f de $\mathcal{C}^0(G, M)$, il existe une extension finie $L|L'|K$ telle que f est constante sur $\{\sigma \mid \sigma|_{L'} = \tau\}$ pour tout $\tau \in \text{Gal}(L'|K)$. Il est ainsi possible de définir des injections compatibles de L -espaces vectoriels $\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), M) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(G, M)$ qui passent à la limite en une identification

$$\mathcal{C}^0(G, M) = \varinjlim_{L' \text{ finie galoisienne}} \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), M).$$

Les isomorphismes de L' -espaces vectoriels

$$k_1 : \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \otimes_{\iota \circ p_1, L'} M \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), M)$$

donnés par le lemme 2.3 sont en réalité des isomorphismes de L -espaces vectoriels pour les structures données respectivement par la structure de L -module à droite sur M pour le produit tensoriel, et pour celle terme à terme sur M pour le but. De surcroît, si $L|L''|L'|K$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \otimes_{\iota_{op_1, L'}} M & \xrightarrow{k_1} & \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L''|K), L'') \otimes_{\iota_{op_1, L''}} M & \xrightarrow{k_1} & \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L''|K), M)
\end{array}$$

ce qui fournit un isomorphisme de L -espace vectoriel

$$\varinjlim_{L' \text{ finie galoisienne}} \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), M) \otimes_{\iota_{op_1, L'}} M \xrightarrow{k_1} \mathcal{C}^0(G, M)$$

Puisque le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
L' & \xrightarrow{\iota_{op_1}} & \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \\
\downarrow & & \downarrow \\
L & \xrightarrow{\iota_{op_1}} & \mathcal{C}^0(G, L)
\end{array}$$

nous obtenons une application $\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \otimes_{\iota_{op_1, L'}} M \rightarrow \mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota_{op_1, L}} M$. De plus, cette application se loge dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \otimes_{\iota_{op_1, L'}} M & \xrightarrow{k_1} & \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota_{op_1, L}} M & \xrightarrow{k_1} & \mathcal{C}^0(G, M)
\end{array}$$

ce qui prouve l'injectivité de l'application précédente. De plus, pour toutes extensions finies galoisiennes $L|L''|L'|K$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \otimes_{\iota_{op_1, L'}} M & \xrightarrow{k_1} & \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L''|K), L'') \otimes_{\iota_{op_1, L''}} M & \xrightarrow{k_1} & \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L''|K), M)
\end{array}$$

En effet, si f est constante sur chaque classe de $\text{Gal}(L''|K)/\text{Gal}(L''|L')$, nous pouvons donner un sens à $f(\tau, L')$ pour $\tau \in \text{Gal}(L'|K)$. Appelons également $\mathbb{1}_{\tau, L'} = \mathbb{1}_{\{\sigma \in G \mid \sigma_{L'} = \tau\}}$ pour simplifier les notations. Alors, f est l'image par la version pour L'' de k_1 de

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau \in \text{Gal}(L''|K)} \mathbb{1}_{\tau, L''} \otimes f(\tau, L'') &= \sum_{\nu \in \text{Gal}(L'|K)} \sum_{\tau \in \text{Gal}(L''|K), \tau|_{L'} = \nu} \mathbb{1}_{\{\tau\}} \otimes f(\tau) \\
&= \sum_{\nu \in \text{Gal}(L'|K)} \sum_{\tau \in \text{Gal}(L''|K), \tau|_{L'} = \nu} \mathbb{1}_{\{\tau\}} \otimes f(\nu) \\
&= \sum_{\nu \in \text{Gal}(L'|K)} \left(\sum_{\tau \in \text{Gal}(L''|K), \tau|_{L'} = \nu} \mathbb{1}_{\{\tau\}} \right) \otimes f(\nu, L') \\
&= \sum_{\nu \in \text{Gal}(L'|K)} \mathbb{1}_{\nu, L'} \otimes f(\nu, L')
\end{aligned}$$

qui est envoyé dans $\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L''|K), L'') \otimes_{\iota_{op_1, L''}} M$ sur l'antécédent de f par la version pour L' de k_1 . Ainsi, nous pouvons passer les injections à la limite en une injection

$$\varinjlim_{L' \text{ finie galoisienne}} \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), M) \otimes_{\iota_{op_1, L'}} M \hookrightarrow \mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota_{op_1, L}} M.$$

La surjectivité découle de l'expression des éléments du produit tensoriel comme somme finie de tenseurs purs. Tout est réuni pour prouver le premier isomorphisme.

Le reste provient du cas fini en passant par l'un des termes de la limite inductive.

Nous laissons à nouveau la vérification de la bilinéarité et la preuve qu'il s'agit un inverse de côté. Tout le reste se décalque sur le cas fini. \square

Proposition 2.11. *Soit M un L -espace vectoriel. Se donner un isomorphisme $\rho : p_1^*M \xrightarrow{\sim} p_2^*M$ revient à se donner une famille de bijections σ -semi-linéaires $(\rho_\sigma)_{\sigma \in G}$ de M telle que pour tout $m \in M$, l'application $G \mapsto M$ déduite via $\sigma \mapsto \rho_\sigma(m)$ soit continue pour la topologie discrète au but.*

Démonstration. Un isomorphisme ρ , via le tiré en arrière par l'isomorphisme ι , équivaut à un isomorphisme de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -modules

$$\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_1, L} M \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\iota \circ p_2, L} M$$

En composant par les isomorphismes du lemme précédent, cela revient à un isomorphisme $\tilde{\rho}$ de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -modules de $\mathcal{C}^0(G, M)$ vers $\mathcal{C}^0(G, M)$ où les structures de $\mathcal{C}^0(G, L)$ -modules sont respectivement données par \cdot_1 et \cdot_2 .

Il est à présent impossible de multiplier par $\mathbb{1}_{\{\sigma\}}$ qui n'est pas un élément de $\mathcal{C}^0(G, L)$. En revanche, nous pouvons multiplier par des indicatrices du type $\mathbb{1}_{\tau, L'}$ pour une extension finie galoisienne $L'|K$ et $\tau \in \text{Gal}(L'|K)$. Il est ainsi possible de considérer pour $\sigma \in G$, $m \in M$ et $L'|K$ finie galoisienne l'élément

$$\rho_{\sigma^{-1}, L'}(m) = \left(\tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\sigma_{|L', L'} m}) \right)(\sigma).$$

Commençons par montrer que $\rho_{\sigma^{-1}, L'}(m)$ ne dépend pas de l'extension L' choisie. Comme précédemment, il suffit de le montrer pour une inclusion d'extensions $L' \subseteq L''$. Calculons

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma^{-1}, L'}(m) &= \left(\tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\sigma_{|L', L'} m}) \right)(\sigma) \\ &= \left(\mathbb{1}_{\sigma_{|L'', L''}} \cdot_2 \tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\sigma_{|L', L'} m}) \right)(\sigma) \\ &= \left(\tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\sigma_{|L'', L''}} \cdot_1 (\mathbb{1}_{\sigma_{|L', L'} m})) \right)(\sigma) \\ &= \left(\tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\sigma_{|L'', L''}} m) \right)(\sigma) \\ &= \rho_{\sigma^{-1}, L''}(m) \end{aligned}$$

Nous appellerons alors $\rho_{\sigma^{-1}}$ l'application déduite.

Prenons $L'|K$ quelconque, l'application $m \mapsto \mathbb{1}_{\sigma_{|L', L'} m}$ est additive et que $\tilde{\rho}$ l'est également, nous obtenons que ρ_σ est additive. Pour la semi-linéarité, choisissons encore L' quelconque

$$\begin{aligned} \rho_\sigma(\lambda m) &= \left(\tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\sigma_{|L', L'}(\lambda m)}) \right)(\sigma^{-1}) \\ &= \left(\tilde{\rho}((\lambda \mathbb{1}_{\sigma_{|L', L'}}) \cdot_1 (\mathbb{1}_{\sigma_{|L', L'} m})) \right)(\sigma^{-1}) \\ &= \left((\lambda \mathbb{1}_{\sigma_{|L', L'}}) \cdot_2 \tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\sigma_{|L', L'} m}) \right)(\sigma^{-1}) \\ &= \sigma((\lambda \mathbb{1}_{\sigma_{|L', L'}})(\sigma^{-1})) \rho_\sigma(m) \\ &= \sigma(\lambda) \rho_\sigma(m) \end{aligned}$$

Vérifions également la condition "de lissité" sur la famille ρ_σ . Prenons $\sigma \in G$ et $m \in M$. Fixons $L'|K$ finie galoisienne et prenons L'' contenant L' telle que $\tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\sigma_{|L'},L'}^{-1}, m)$ se factorise par $G/\text{Gal}(L''|K)$. Pour tout élément de $\{\tau \mid \tau_{|L''}^{-1} = \sigma_{|L''}^{-1}\}$, nous avons alors

$$\begin{aligned}\rho_\tau(m) &= \tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\tau_{|L'},L'}^{-1}, m)(\tau^{-1}) \\ &= \tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\sigma_{|L'},L'}^{-1}, m)(\tau^{-1}) \\ &= \tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\sigma_{|L'},L'}^{-1}, m)(\sigma^{-1}) \\ &= \rho_\sigma(m)\end{aligned}$$

où le passage de la première à la deuxième est obtenu grâce à $L' \subseteq L''$ (donc $\sigma_{|L'}^{-1} = \tau_{|L'}^{-1}$) et le passage à la ligne suivante par construction même de L'' .

De plus, les ρ_σ déterminent entièrement $\tilde{\rho}$. Prenons $L'|K$ finie telle que f se factorise pas $G/\text{Gal}(L'|K)$ et que pour tout élément m de l'image de f , $\sigma \mapsto \rho_\sigma(m)$ se factorise également. Alors,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(f)(\sigma) &= \tilde{\rho}\left(\sum_{\tau \in \text{Gal}(L'|K)} \mathbb{1}_{\tau,L'} \cdot \mathbb{1}_{\tau,L'} f(\tau, L')\right)(\sigma) \\ &= \sum_{\tau \in \text{Gal}(L'|K)} \left[\mathbb{1}_{\tau,L'} \tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\tau,L'} f(\tau, L'))\right](\sigma) \\ &= \left[\mathbb{1}_{\sigma_{L'},L'} \tilde{\rho}(\mathbb{1}_{\sigma_{L'},L'} f(\sigma_{L'}, L'))\right](\sigma) \\ &= \rho_\sigma(f(\sigma))\end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{\rho}$ peut s'exprimer comme $f \mapsto [\sigma \mapsto \rho_\sigma(f(\sigma))]$. Réciproquement, on vérifie sans difficulté que la formule précédente pour des ρ_σ semi-linéaires et "donnant une action lisse" fournit un isomorphisme $\tilde{\rho}$. La "lissité" sert à assurer que la définition que nous donnons fournit bien une fonction continue. \square

Il nous reste à traduire la condition de cocycle sur les ρ_σ .

Lemme 2.12. *Fixons nous un isomorphisme ρ . Soit \mathcal{M}_ρ la catégorie dont les objets sont les couples (N, L') avec $L'|K$ finie galoisienne et N un sous- L' -espace vectoriel de M stable par les ρ_σ et formé d'éléments invariants par $\text{Gal}(L'|L')$. Un morphisme $(N_1, L') \rightarrow (N_2, L')$ correspond à deux inclusions $L' \subset L''$ et $N_1 \subset N_2$.*

Pour tout objet (N, L') de \mathcal{M}_ρ . L'isomorphisme ρ se restreint-corestreint en un isomorphisme

$$\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \otimes_{\text{lop}_1, L'} N \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \otimes_{\text{lop}_2, L'} N$$

où nous avons sous-entendue l'injection de la source et du but dans leurs analogues pour M et L , qui se construit comme dans la démonstration du lemme précédent.

De plus, on peut identifier la limite du premier terme à $\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\text{lop}_1, L} M$ (resp. du deuxième terme à $\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\text{lop}_1, L} M$). Par construction, leur limite s'identifie ainsi à ρ .

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \otimes_{\text{lop}_1, L'} N \hookrightarrow \mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{\text{lop}_1, L} M$ correspond via j_1 (et j_2) à l'inclusion

$$\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), N) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(G, M), \quad f \mapsto [\sigma \mapsto f(\sigma_{|L'})].$$

Par construction de la catégorie \mathcal{M}_ρ , il est alors évident que ρ , décrit comme $f \mapsto [\sigma \mapsto \rho_\sigma(f(\sigma))]$ se restreint-corestreint en un isomorphisme.

Comme au lemme précédent, les injections passent à la limite en une injection. Il suffit de démontrer la surjectivité. Or, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(G, L)$, son image est finie. Puisque chaque $\sigma \mapsto \rho_\sigma(m)$ est localement constante, il existe $L'|K$ finie galoisienne telle que tous les éléments de l'image de f sont invariants par $\text{Gal}(L|L')$. Puisque $L'|K$ est galoisienne, ce dernier sous-groupe est distingué et le sous- L' -espace vectoriel N de M stable par les ρ_σ et engendré par l'image de f est constitué d'éléments fixes sous $\text{Gal}(L|L')$. A fortiori, la fonction f appartient à l'image de $\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \otimes_{i \circ p_1, L'} N$. \square

Proposition 2.13. *Soit ρ et $(\rho_\sigma)_{\sigma \in G}$ associé comme en proposition 2.11. L'application ρ vérifie la condition de cocycle d'une donnée de descente si et seulement si les ρ_σ fournissent une action semi-linéaire de G sur le L -espace vectoriel M , i.e. si $\rho_{\sigma\tau} = \rho_\sigma \circ \rho_\tau$.*

En particulier, la catégorie des L -espaces vectoriels avec donnée de descente le long de $K \rightarrow L$ est équivalente à la catégorie des L -espaces vectoriels avec action semi-linéaire de G , telle que l'action sur tout vecteur est localement constante.

Démonstration. Pour (N, L') un objet de \mathcal{M}_ρ , le morphisme suivant existe et est injectif :

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K)^2, L') \otimes_{i \circ \pi_{12} \circ i^{-1}, \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L')} \left(\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \otimes_{i \circ p_1, L'} N \right) \\ & \hookrightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_{12} \circ i^{-1}, \mathcal{C}^0(G, L)} \left(\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{i \circ p_1, L} M \right) \end{aligned}$$

La bonne définition provient de la naturalité en l'extension des morphismes ι et i . Pour l'injectivité, il faut simplement regarder celle de

$$\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K)^2, L') \otimes_{i \circ \pi_1, L'} N \rightarrow \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ p_1, L} M$$

et elle provient de si $\sum_i f_i \otimes n_i$ est à la source, elle est nulle ssi $\forall (\tau_1, \tau_2), \sum_i f_i(\sigma_1, \sigma_2) n_i = 0$ ce qui se voit de manière équivalence dans M , donc sur l'image.

De manière similaire, nous pouvons voir cette famille d'injection comme indexées par la catégorie \mathcal{M}_ρ et alors

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}^0(G \times G, L) \otimes_{i \circ \pi_{12} \circ i^{-1}, \mathcal{C}^0(G, L)} \left(\mathcal{C}^0(G, L) \otimes_{i \circ p_1, L} M \right) \\ & \cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ (N, L') \in \mathcal{M}_\rho}} \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K)^2, L') \otimes_{i \circ \pi_{12} \circ i^{-1}, \mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L')} \left(\mathcal{C}^0(\text{Gal}(L'|K), L') \otimes_{i \circ p_1, L'} N \right). \end{aligned}$$

En appliquant ce raisonnement à π_{12} et π_{23} , cela prouve que la relation de cocycle pour ρ peut se voir comme la limite des relations de cocycle pour l'action restreinte à N grâce au lemme précédent, dans le cas de $L'|K$ finie déjà traité. De la même manière, le caractère d'action des ρ_σ se voit sur chaque N . \square

Théorème 2.14. *La catégorie des L -espaces vectoriels avec donnée de descente le long de $K \rightarrow L$ est équivalente à la catégorie des L -espaces vectoriels M avec action semi-linéaire de G telle que $G \times M \rightarrow M$ est continue pour les topologies profinie sur le groupe et discrète sur les espaces vectoriels. Via cette équivalence de catégorie, le quasi-inverse au théorème 2.1 correspond à $M \mapsto M^G$.*

Démonstration. Exactement comme dans le cas fini. \square

3 Descentes galoisiennes étendues

3.1 Construction tensorielle et descente galoisienne

Le cadre de cette section sera moralement celui d'un produit tensoriel d'extension. Pour faciliter le lecteur qui viendra depuis la démonstration ayant motivé l'écriture de cette note, nous gardons les notations de ladite démonstrations. Prenons $(E_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ une famille de corps indexée par un ensemble fini Δ . Fixons également $F_\alpha|E_\alpha$ une famille d'extensions galoisiennes et E_Δ un anneau commutatif muni de structures de E_α -algèbre pour tout élément α .

Définition 3.1. Appelons F_Δ le produit tensoriel

$$F_{\alpha_1} \otimes_{E_{\alpha_1}} \left(F_{\alpha_2} \otimes_{E_{\alpha_2}} \left(\cdots F_{\alpha_{|\Delta|}} \otimes_{E_{\alpha_{|\Delta|}}} E_\Delta \right) \right)$$

où la structure de E_α -algèbre sur le produit tensoriel jusqu'au cran α est transmise depuis E_Δ .

Remarque 3.2. De manière générale, si A est une B -algèbre et une C -algèbre, que D est une B -algèbre et que E est une C -algèbre, il existe un isomorphisme naturel de D -algèbre et de E -algèbre

$$D \otimes_B (E \otimes_C A) \cong E \otimes_C (D \otimes_B A)$$

ce qui prouve récursivement que F_Δ avec ses structures de F_α -algèbre ne dépend pas du choix de la numérotation de Δ , à isomorphisme près.

Chaque $E_\alpha \rightarrow F_\alpha$ étant fidèlement plat et le morphisme $E_\Delta \rightarrow F_\Delta$ étant la composée de changement de base des précédents morphismes, la E_Δ -algèbre F_Δ est fidèlement plate. Nous pouvons donc examiner ce que signifie une donnée de descente de F_Δ à E_Δ .

Définition 3.3. L'action de $\text{Gal}(F_\alpha|E_\alpha)$ sur F_α est E_α -linéaire, ce qui permet de l'étendre en une action E_Δ -linéaire sur F_Δ (en décrétant que l'action est triviale sur les autres termes du produit tensoriel). Ces actions commutant, nous obtenons une action E_Δ -linéaire de $G = \prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(F_\alpha|E_\alpha)$.

Lemme 3.4. Munissons $\mathcal{C}^0(G, F_\Delta)$ de la structure de E_Δ -algèbre terme à terme sur les images. Le morphisme suivant est alors bien défini

$$\iota : F_\Delta \otimes_{E_\Delta} F_\Delta \rightarrow \mathcal{C}^0(G, F_\Delta), \quad \lambda \otimes \mu \mapsto [\sigma \mapsto \lambda\sigma(\mu)]$$

et fournit un isomorphisme de E_Δ -algèbres.

La structure de F_Δ -algèbre induite par $\iota \circ p_1$ sur $\mathcal{C}^0(G, F_\Delta)$ étend la structure de E_Δ -algèbre et vérifie $(\lambda \cdot_1 f)(\sigma) = \lambda f(\sigma)$.

La structure de F_Δ -algèbres induite par $\iota \circ p_2$ sur $\mathcal{C}^0(G, F_\Delta)$ étend la structure de E_Δ -algèbre et vérifie $(\lambda \cdot_2 f)(\sigma) = \sigma(\lambda)f(\sigma)$.

Démonstration. Établissons le résultat par récurrence sur $|\Delta|$.

Pour $|\Delta| = 1$, nous avons la suite d'isomorphismes de E_Δ -algèbres suivants

$$\begin{aligned} F_\Delta \otimes_{E_\Delta} F_\Delta &= (F_\alpha \otimes_{E_\alpha} E_\Delta) \otimes_{E_\Delta} (F_\alpha \otimes_{E_\alpha} E_\Delta) \\ &\cong (F_\alpha \otimes_{E_\alpha} F_\alpha) \otimes_{E_\alpha} E_\Delta \\ &\cong \mathcal{C}^0(\text{Gal}(F_\alpha|E_\alpha), F_\alpha) \otimes_{E_\alpha} E_\Delta \\ &\cong \mathcal{C}^0(\text{Gal}(F_\alpha|E_\alpha), F_\alpha \otimes_{E_\alpha} E_\Delta) \\ &= \mathcal{C}^0(\text{Gal}(F_\alpha|E_\alpha), F_\Delta) \end{aligned}$$

où nous détaillons les différents arguments. Le passage à la deuxième ligne est simplement une identité entre produits tensoriels. Le passage à la troisième s'obtient grâce à la proposition

2.2, celui à la quatrième parce que l'image de toute fonction est finie. En suivant l'image d'un élément, nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda \otimes \mu &= (\lambda_1 \otimes \lambda_2) \otimes (\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&\mapsto (\lambda_1 \otimes \mu_1) \otimes (\lambda_2 \mu_2) \\
&\mapsto [\sigma \mapsto \lambda_1 \sigma(\mu_1)] \otimes (\lambda_2 \mu_2) \\
&\mapsto [\sigma \mapsto (\lambda_1 \sigma(\mu_1) \otimes (\lambda_2 \mu_2))] \\
&= [\sigma \mapsto (\lambda_1 \otimes \lambda_2)(\sigma(\mu_1) \otimes \mu_2)] = [\sigma \mapsto \lambda \sigma(\mu)]
\end{aligned}$$

qui correspond exactement à l'application annoncée.

L'hérédité se démontre grâce à la suite d'isomorphismes suivants, où $F_{\Delta, \text{partiel}}$ correspond au produit tensoriel à droit du premier produit dans la définition de F_{Δ} , i.e tel que $F_{\Delta} = F_{\alpha} \otimes_{E_{\alpha}} F_{\Delta, \text{partiel}}$. L'hypothèse de récurrence s'applique à $F_{\Delta, \text{partiel}}$, E_{Δ} et $\Delta \setminus \{0\}$ pour fournir la suite d'isomorphismes de E_{Δ} -algèbres suivante :

$$\begin{aligned}
F_{\Delta} \otimes_{E_{\Delta}} F_{\Delta} &= (F_{\alpha} \otimes_{E_{\alpha}} F_{\Delta, \text{partiel}}) \otimes_{E_{\Delta}} (F_{\alpha} \otimes_{E_{\alpha}} F_{\Delta, \text{partiel}}) \\
&\cong (F_{\Delta, \text{partiel}} \otimes_{E_{\Delta}} F_{\Delta, \text{partiel}}) \otimes_{E_{\alpha}} (F_{\alpha} \otimes_{E_{\alpha}} F_{\alpha}) \\
&\cong \mathcal{C}^0\left(\prod_{\beta \neq \alpha} \text{Gal}(F_{\beta}|E_{\beta}), F_{\Delta, \text{partiel}}\right) \otimes_{E_{\alpha}} \mathcal{C}^0(\text{Gal}(F_{\alpha}|E_{\alpha}), F_{\alpha}) \\
&\cong \mathcal{C}^0\left(\prod_{\beta \neq \alpha} \text{Gal}(F_{\beta}|E_{\beta}), \mathcal{C}^0(\text{Gal}(F_{\alpha}|E_{\alpha}), F_{\alpha}) \otimes_{E_{\alpha}} F_{\Delta, \text{partiel}}\right) \\
&\cong \mathcal{C}^0\left(\prod_{\beta \neq \alpha} \text{Gal}(F_{\beta}|E_{\beta}), \mathcal{C}^0(\text{Gal}(F_{\alpha}|E_{\alpha}), F_{\alpha} \otimes_{E_{\alpha}} F_{\Delta, \text{partiel}})\right) \\
&= \mathcal{C}^0(G, F_{\Delta})
\end{aligned}$$

et en suivant l'image d'un élément c'est encore le morphisme annoncé. Le passage à la deuxième ligne nécessite encore une identité entre produit tensoriel. Nous donnons une remarque juste ensuite pour les expliciter.

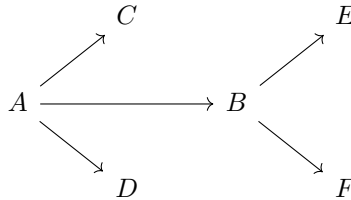
Les calculs des structures de F_{Δ} -algèbres sont tout à fait semblables au cas fini. \square

Remarque 3.5. Donnons un énoncé précis des identités entre produits tensoriels utilisées dans le lemme précédent.

Soient B et C et D trois A -algèbres. Il existe un isomorphisme naturel de B -algèbres

$$(B \otimes_A C) \otimes_B (B \otimes_A D) \cong B \otimes_A (C \otimes_A D)$$

Plus généralement, soit B une A -algèbre, soient C et D des A -algèbres et soient E et F des B -algèbres, ce que l'on peut résumer dans le diagramme suivant :



Il existe alors un isomorphisme naturelle de B -algèbres

$$(E \otimes_A C) \otimes_B (F \otimes_A D) \cong (E \otimes_B F) \otimes_A (C \otimes_A D)$$

Théorème 3.6. *La catégorie des F_Δ -modules avec donnée de descente le long de $E_\Delta \rightarrow F_\Delta$ est équivalente à la catégorie des F_Δ -modules M avec action semi-linéaire de G , localement constante au sens où $G \times M \rightarrow M$ est continue. Via cette équivalence de catégorie, le quasi-inverse au théorème 2.1 correspond à $M \mapsto M^G$.*

Démonstration. La démonstration se décalque ad verbatim du cas galoisien en passant par le cas galoisien fini à partir de là. Seul autre changement, la preuve de l'analogie du lemme 2.5 qui s'établit de manière analogue au lemme que nous venons de prouver. Les analogues précis reviennent à remplacer l'indexation des limites par $L'|K$ finie galoisienne par les familles $E'_\alpha|E_\alpha$ finie galoisienne et de remplacer les coefficients L' par des coefficients dans le module E'_Δ obtenu comme F_Δ à partir de la famille $E'_\alpha|E_\alpha$.

On remarquera un point pour adapter la preuve : par commutation du produit tensoriel aux colimites, F_Δ est la colimite des E'_Δ sur les familles d'extensions finies galoisiennes. l'action de G sur F_Δ est localement constante puisqu'elle l'est sur chaque E'_Δ . \square

4 Aparté géométrique sur le cas galoisien fini

Pour les adeptes de l'aspect géométrique, et aussi pour se donner une démonstration plus expéditive dans le cas galoisien fini, nous adaptions ici la preuve à un langage plus géométrique.

Commençons par prouver de nouveau le lemme 2.2 avec de l'algèbre commutative plus poussée.

Lemme 4.1. *Le morphisme de K -algèbres*

$$L \otimes_K L \rightarrow \prod_{\sigma \in G} L, \quad \lambda \otimes \mu \mapsto (\lambda\sigma(\mu))$$

est surjectif.

Démonstration. Munissons $L \otimes_K L$ de sa structure de L -algèbre via p_1 . Puisque L est une K -algèbre étale, nous obtenons par changement de base le caractère étale de $L \otimes_K L$ sur L . Par étude des algèbres étales sur un corps, la L -algèbre $L \otimes_K L$ est isomorphe au produit de ses localisés en des idéaux maximaux.

Pour tout σ , le morphisme $\text{Id} \otimes \sigma$ est un morphisme surjectif de L -algèbres de $L \otimes_K L$ dans L qui fournit donc un idéal maximal \mathfrak{m}_σ de $L \otimes_K L$. Les idéaux sont distincts : en effet les morphismes considérés sont des morphismes de L -algèbres distincts. Si en un élément x nous avons $(\text{Id} \otimes \sigma_1)(x) \neq (\text{Id} \otimes \sigma_2)(x)$ alors $x - (\text{Id} \otimes \sigma_1)(x)$ appartient au noyau du premier morphisme mais pas du deuxième. Il en découle un morphisme surjectif $(L \otimes_K L)_{\mathfrak{m}_\sigma} \rightarrow L$. Ainsi, la composée suivante est surjective :

$$L \otimes_K L \cong \prod_{\mathfrak{m} \in \text{Spm}(L \otimes_K L)} (L \otimes_K L)_{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow \prod_{\sigma \in G} (L \otimes_K L)_{\mathfrak{m}_\sigma} \twoheadrightarrow \prod_{\sigma \in G} L$$

qui coïncide avec le morphisme recherché. \square

D'un point de vue géométrique, le lemme précédent se traduit par

$$\text{Spec}(L) \times_{\text{Spec}(K)} \text{Spec}(L) = \text{Spec}(L \otimes_K L) \xrightarrow[\iota^{-1}]{\sim} \bigsqcup_{\sigma \in G} \text{Spec}(L)$$

avec

$$p_1 \circ \iota : \bigsqcup_{\sigma \in G} \text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(L)$$

qui vaut $\sqcup \text{Id}_{\text{Spec}(L)}$ et $p_2 \circ \iota$ qui vaut $\sqcup \sigma$. Ainsi, en appliquant ι^* , l'isomorphisme $p_1^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p_2^* \mathcal{F}$ correspond exactement à un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\sqcup_{\sigma \in G} \text{Spec}(L)}$ -module

$$\bigsqcup_{\sigma \in G} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{\sigma \in G} \sigma^* \mathcal{F}$$

ce qui correspond exactement à une famille $(\rho_\sigma)_{\sigma \in G}$ d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(L)}$ -modules entre \mathcal{F} et $\sigma^* \mathcal{F}$. Au niveau des L -espaces vectoriels sous-jacents, ce sont simplement des endomorphismes additifs et semi-linéaires.

Resterait à traduire grâce à la géométrie la condition de cocycle.

Lorsque L n'est plus une extension finie, en revanche, le produit fibré cesse d'être une union disjointe : son espace topologique sous-jacent sera $\text{Gal}(L|K)$ muni de la topologie profini. Nous retrouvons effectivement les actions en regardant ce que donne l'isomorphisme sur les fibres, mais nous aurions dans tous les cas besoin de détails aussi lourds que les détails algébriques.