

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (PARIS 7)  
ÉCOLE DOCTORALE DE PARIS CENTRE

## THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

**Olivier BENOIST**

# Espaces de modules d'intersections complètes lisses

dirigée par Olivier DEBARRE

Soutenue le 10 février 2012 devant le jury composé de :

Jean-Benoît BOST	Université Paris XI	
Olivier DEBARRE	École Normale Supérieure	Directeur de thèse
Hélène ESNAULT	Universität Duisburg-Essen	
Eduard LOOIJENGA	Universiteit Utrecht	
Laurent MANIVEL	Université Grenoble I	Rapporteur
Claire VOISIN	Université Paris VI	

Rapporteur absent lors de la soutenance :

Brendan HASSETT	Rice University
-----------------	-----------------



# Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Olivier Debarre. Durant la préparation de cette thèse, il a su me guider par ses nombreuses questions et critiques, tout en me laissant une grande liberté. Pendant quatre ans, ses conseils, ses encouragements et son enthousiasme m'ont été extrêmement précieux.

Je remercie également Brendan Hassett et Laurent Manivel, qui ont consenti à être rapporteurs de cette thèse, pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail.

Jean-Benoît Bost, Hélène Esnault, Eduard Looijenga et Claire Voisin ont accepté de faire partie de mon jury : c'est pour moi un grand honneur. C'est à l'occasion des cours de M2 de Claire Voisin que s'est forgé mon intérêt pour la géométrie des variétés algébriques ; je suis particulièrement touché par sa présence.

Faire des mathématiques n'est pas une activité solitaire. J'ai eu la chance de toujours disposer d'un environnement mathématique exceptionnel, et cette thèse doit beaucoup à ceux qui m'ont appris.

À cet égard, mes camarades Mathieu, Pierre, Simon et Thomas ont joué un rôle très important, tant par leur curiosité intellectuelle que par leur amitié constante.

Sur les « toits » du DMA, où j'ai effectué mon travail de thèse, j'ai retrouvé ces deux qualités. D'une part, j'ai bénéficié d'innombrables conversations mathématiques avec Alena, Benjamin, François, Olivier... D'autre part, l'atmosphère bienveillante et chaleureuse a rendu mon séjour extrêmement agréable, et adouci les hauts et les bas qui ponctuent un travail de recherche. Je mesure notamment à quel point Philippe et Viviane ont contribué à cette ambiance conviviale, et je les en remercie. La bonne humeur de Zaïna, qui rythme la vie du département, y est également pour beaucoup.

Sur un plan plus personnel, je tiens à signifier ma gratitude à mes amis dits « d'Orsay », comme à mes camarades d'École, pour tout ce qui n'est pas mathématique.

Merci enfin à mes parents et à mon frère pour leur soutien constant.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
0.1 Espaces de modules de variétés polarisées . . . . .	9
0.1.1 Espaces de modules de courbes . . . . .	9
0.1.2 Généralisations en dimension supérieure . . . . .	10
0.1.3 Espaces de modules de variétés de Fano . . . . .	11
0.2 Intersections complètes lisses . . . . .	13
0.2.1 Notations . . . . .	13
0.2.2 Énoncés des principaux théorèmes . . . . .	13
0.2.2.1 Automorphismes . . . . .	13
0.2.2.2 Séparation . . . . .	14
0.2.2.3 Quasi-projectivité . . . . .	14
0.2.3 Limites des résultats . . . . .	15
0.2.3.1 Séparation . . . . .	15
0.2.3.2 Quasi-projectivité . . . . .	16
0.2.4 Plan du texte . . . . .	16
<b>1 Préliminaires</b>	<b>19</b>
1.1 Images directes et changement de base . . . . .	19
1.2 Foncteurs et schéma de Picard . . . . .	22
1.3 Champs quotients . . . . .	23
<b>2 Généralités sur les intersections complètes</b>	<b>27</b>
2.1 Intersections complètes . . . . .	27
2.1.1 Définition et notations . . . . .	27
2.1.2 Suites régulières globales . . . . .	28
2.1.3 Cohomologie cohérente . . . . .	29
2.1.4 Premières applications . . . . .	30
2.1.5 Changement du corps de base . . . . .	32
2.1.6 Générisation . . . . .	33
2.2 Schéma de Hilbert . . . . .	33
2.2.1 Définition . . . . .	34
2.2.2 Une construction explicite . . . . .	34
2.2.3 Représentabilité du foncteur . . . . .	35
2.2.4 Identification du schéma de Hilbert . . . . .	36

2.2.5	Application au changement de base . . . . .	38
2.3	Champ de modules . . . . .	39
2.3.1	Définition du champ de modules . . . . .	39
2.3.2	Calcul du foncteur des points . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Séparation</b> . . . . .	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	43
3.1.1	Notations . . . . .	43
3.1.2	Séparation du champ de modules . . . . .	43
3.1.3	Conjecture de Pukhlikov . . . . .	44
3.1.4	Structure de la démonstration . . . . .	45
3.2	Automorphismes projectifs . . . . .	45
3.2.1	Description de l'automorphisme $f_\eta$ . . . . .	45
3.2.2	Spécialisation de l'automorphisme $f_\eta$ . . . . .	46
3.3	Étude des équations de petit degré . . . . .	47
3.3.1	Spécialisation d'équations . . . . .	47
3.3.2	Équations de degré $d \geq 3$ . . . . .	47
3.3.3	Équations de degré 2 . . . . .	48
3.3.4	Fin de la preuve . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Automorphismes</b> . . . . .	<b>51</b>
4.1	Schéma en groupes des automorphismes . . . . .	51
4.1.1	Notations . . . . .	51
4.1.2	Automorphismes d'une variété . . . . .	51
4.1.3	Automorphismes d'une variété polarisée . . . . .	52
4.1.4	Cas des intersections complètes . . . . .	52
4.2	Automorphismes des intersections complètes lisses . . . . .	53
4.2.1	Énoncé du théorème . . . . .	53
4.2.2	Cas des hypersurfaces . . . . .	54
4.2.3	Codimension supérieure . . . . .	54
4.3	Preuve du théorème . . . . .	54
4.3.1	Champs de vecteurs sur les intersections complètes lisses . . . . .	54
4.3.2	Quadriques . . . . .	57
4.3.3	Intersections de deux quadriques . . . . .	58
4.3.4	Fin de la preuve . . . . .	60
4.4	Propriété de Deligne-Mumford . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Quasi-projectivité</b> . . . . .	<b>63</b>
5.1	Introduction . . . . .	63
5.1.1	Conventions . . . . .	63
5.1.2	Énoncé des théorèmes principaux . . . . .	63
5.1.3	Stratégie de la preuve . . . . .	64
5.1.4	Plan du chapitre . . . . .	65
5.2	Minoration du $\alpha$ -degré . . . . .	65
5.2.1	Notations . . . . .	65
5.2.2	L'inégalité . . . . .	66

5.2.3	Étude d'une équation . . . . .	67
5.2.3.1	Lien entre $\alpha$ -degré et singularités . . . . .	67
5.2.3.2	L'entier $s(F)$ . . . . .	67
5.2.3.3	Les entiers $v_s(F)$ . . . . .	68
5.2.4	Équations d'une intersection complète lisse . . . . .	71
5.2.4.1	Inégalité large . . . . .	71
5.2.4.2	Inégalité stricte . . . . .	73
5.2.4.3	Optimalité . . . . .	73
5.3	Affinité quand $d_1 = \dots = d_c$ . . . . .	74
5.3.1	Constructions . . . . .	74
5.3.2	Preuve du théorème 5.1.1 . . . . .	75
5.4	Quasi-projectivité quand $d_1 < d_2 = \dots = d_c$ . . . . .	76
5.4.1	Constructions . . . . .	76
5.4.1.1	Hypersurfaces . . . . .	77
5.4.1.2	Intersections complètes . . . . .	78
5.4.1.3	Action de $SL_{N+1}$ . . . . .	80
5.4.2	Fibrés amples sur $\bar{H}$ . . . . .	80
5.4.2.1	Lien entre $\bar{H}$ et $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$ . . . . .	80
5.4.2.2	Calcul des fibrés amples . . . . .	84
5.4.3	Preuve du théorème 5.1.2 . . . . .	86
5.4.3.1	Échec d'une stratégie naïve . . . . .	86
5.4.3.2	Calcul des fonctions $\mu$ . . . . .	86
5.4.3.3	Application du critère d'Hilbert-Mumford . . . . .	89
5.5	Hilbert-stabilité . . . . .	90
5.5.1	Généralités . . . . .	91
5.5.2	Majoration des fonctions $\mu$ . . . . .	92
5.5.3	Condition nécessaire de Hilbert-stabilité . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Exemples</b> . . . . .	<b>97</b>
6.1	Conventions et notations . . . . .	97
6.2	Courbes de genre 4 . . . . .	97
6.2.1	Identification du champ de modules . . . . .	98
6.2.2	Courbes complètes . . . . .	99
6.2.3	Compactification d'Igusa . . . . .	100
6.2.4	Chow-stabilité . . . . .	103
6.3	Surfaces $K3$ de degré 6 . . . . .	104
6.3.1	Généralités sur les surfaces $K3$ . . . . .	104
6.3.2	Identification du champ de modules . . . . .	105
6.3.3	Compactification de Looijenga . . . . .	106
6.3.4	Courbes complètes . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Degrés du discriminant</b> . . . . .	<b>109</b>
7.1	Introduction . . . . .	109
7.1.1	Énoncé du théorème principal . . . . .	109
7.1.2	Quelques exemples . . . . .	111
7.1.3	Stratégie de la démonstration . . . . .	113

7.2	Duale d'une variété torique . . . . .	113
7.2.1	Notations . . . . .	114
7.2.2	Équation de la duale . . . . .	114
7.2.3	Action du tore . . . . .	115
7.3	Degrés d'homogénéité du discriminant . . . . .	118
7.3.1	Interprétation torique du lieu discriminant . . . . .	118
7.3.2	Le polytope $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$ . . . . .	120
7.3.3	Homogénéité en les équations . . . . .	122
7.3.4	Homogénéité en les variables . . . . .	124
7.4	Caractéristique finie . . . . .	125
7.4.1	Équation de la duale . . . . .	125
7.4.2	Calcul du degré $\mu$ . . . . .	126
7.4.3	Preuve du théorème principal . . . . .	129
7.4.4	Réduction modulo $p$ du discriminant . . . . .	130

**Bibliographie****130**



# Introduction

Cette introduction est constituée de deux parties. Dans la première, on brosse un rapide tableau du domaine dans lequel s'inscrit cette thèse : la construction et l'étude d'espaces de modules de variétés polarisées. On s'intéresse à l'histoire de cette problématique, aux questions qu'elle recouvre, et à quelques théorèmes connus.

Dans la seconde, on énonce les résultats obtenus dans cette thèse. En particulier, on explique comment ils s'inscrivent dans le cadre décrit dans la première partie, et quelles en sont les limites. Enfin, on détaille précisément, chapitre par chapitre, le contenu de cette thèse.

Pour ne pas alourdir cette introduction, la discussion y est parfois imprécise, notamment dans la première partie.

## 0.1 Espaces de modules de variétés polarisées

### 0.1.1 Espaces de modules de courbes

Soit  $g \geq 2$ . Notons  $M_{g,\mathbb{C}}$  l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes algébriques complexes propres, lisses, connexes et de genre  $g$  (ou, de manière équivalente, de surfaces de Riemann connexes compactes de genre  $g$ ). Cet ensemble paramètre des variétés ; on dit que c'est un espace de modules : l'espace de modules des courbes lisses de genre  $g$ .

On peut faire remonter l'étude de  $M_{g,\mathbb{C}}$  à Riemann. Il montre heuristiquement qu'une surface de Riemann de genre  $g$  dépend de  $6g-6$  paramètres réels, de sorte qu'on peut considérer  $M_{g,\mathbb{C}}$  comme étant de dimension  $6g-6$ . La première construction rigoureuse est cependant due à Teichmüller [68], qui munit  $M_{g,\mathbb{C}}$  d'une structure de variété analytique complexe (de dimension complexe  $3g-3$ ).

Dans le livre [57], Mumford propose une construction algébrique de l'espace de modules des courbes :  $M_{g,\mathbb{C}}$  y est muni d'une structure de variété algébrique complexe. Mumford fait même mieux : il construit un espace de modules de courbes  $M_g$  sur  $\mathbb{Z}$ . C'est un schéma quasi-projectif dont les points géométriques sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de courbes algébriques propres, lisses, connexes et de genre  $g$  sur tous les corps algébriquement clos (et non plus seulement sur  $\mathbb{C}$ ). Cette construction a été l'une des principales motivations de Mumford pour le développement de la théorie géométrique des invariants.

Dans leur article [15], Deligne et Mumford effectuent deux avancées conceptuelles majeures. D'une part, ils réalisent que le bon objet à étudier n'est pas l'espace de modules  $M_g$ , mais un champ algébrique  $\mathcal{M}_g$  : le champ de modules des courbes lisses de genre  $g$ . De manière informelle,  $\mathcal{M}_g$  est un objet qui encode toutes les familles de courbes de genre  $g$ . La variété algébrique  $M_g$  est son espace de modules grossier, c'est-à-dire le schéma qui l'approche le mieux. D'autre part, ils introduisent une compactification  $\bar{\mathcal{M}}_g$  de  $\mathcal{M}_g$ , qui paramètre des courbes avec quelques singularités autorisées : c'est l'espace de modules des courbes stables de genre  $g$ . L'idée est d'autoriser suffisamment de singularités pour que  $\bar{\mathcal{M}}_g$  soit compact, mais suffisamment peu pour qu'il reste séparé.

Finalement, des travaux indépendants de Knudsen [37] et de Gieseker et Mumford [56] ont permis de montrer que l'espace de modules grossier  $M_g$  de  $\bar{\mathcal{M}}_g$  est projectif.

### 0.1.2 Généralisations en dimension supérieure

De nombreux efforts ont été faits pour construire des espaces de modules de variétés de dimension  $\geq 2$ , généralisant les espaces de modules de courbes. On va ici décrire des résultats connus dans cette direction.

On travaille sur une base qui peut être, par exemple,  $\text{Spec}(k)$  pour  $k$  un corps, ou  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , et qu'on sous-entend systématiquement. On fixe une collection  $C$  de familles plates de schémas dont les fibres géométriques sont des variétés connexes projectives lisses polarisées (i.e. munies d'un fibré en droites ample). On notera  $V$  la collection des variétés connexes projectives lisses polarisées qui interviennent comme fibres géométriques d'une famille de  $C$ .

Si  $C$  vérifie une condition technique facile à vérifier (si  $C$  est localement fermée, voir [69] 1.16), on peut construire un champ algébrique  $\mathcal{M}_C$  qui encode toutes les familles de  $C$ . Quand  $C$  est l'ensemble des familles lisses de courbes de genre  $g$  polarisées par leur fibré canonique, on retrouve le champ  $\mathcal{M}_g$ .

Une première question est celle du caractère borné (ou limité) de  $C$  : existe-t-il une famille  $F$  dans  $C$ , de base un schéma de type fini, telle que tout élément de  $V$  intervienne comme fibre géométrique de la famille  $F$  ? Cette propriété permet d'éviter qu'un éventuel espace de modules grossier possède, par exemple, une infinité de composantes irréductibles. En caractéristique nulle, on dispose du grand théorème de Matsusaka [52] :

**Théorème 0.1.1.** *En caractéristique nulle, si les variétés polarisées de  $V$  ont toutes le même polynôme de Hilbert,  $C$  est bornée.*

La deuxième question est celle de la séparation du champ  $\mathcal{M}_C$ . Il s'agit d'une propriété d'unicité de la limite dans  $V$  d'une famille à un paramètre de variétés polarisées de  $V$ . Un résultat général en ce sens est le théorème de Matsusaka et Mumford ([53]) ; remarquons que ce théorème s'applique par exemple quand le fibré canonique des variétés de  $V$  est ample.

**Théorème 0.1.2.** *Si les variétés de  $V$  ne sont pas birationnellement réglées (i.e. ne sont pas birationnelles à une variété de la forme  $\mathbb{P}^1 \times Y$ ), le champ  $\mathcal{M}_C$  est séparé.*

Par un théorème de Keel et Mori ([34], [13]), quand  $\mathcal{M}_C$  est séparé, il admet un espace de modules grossier  $M_C$  qui est un espace algébrique séparé. On s'intéresse alors à la géométrie de cet espace de modules grossier  $M_C$ . Est-ce un schéma, un schéma quasi-projectif? On dispose par exemple du théorème de Viehweg [69] :

**Théorème 0.1.3.** *En caractéristique nulle, si les familles de  $C$  sont polarisées par leur fibré canonique relatif,  $M_C$  est un schéma quasi-projectif.*

Restreignons-nous à la caractéristique nulle, et supposons que les familles de  $C$  sont polarisées par leur fibré canonique relatif. Par analogie avec l'espace de modules des courbes stables, il est naturel de chercher à compactifier  $\mathcal{M}_C$  en autorisant des variétés polarisées singulières, pour obtenir un champ  $\mathcal{M}_C$  propre possédant un espace de modules grossier projectif.

Le cas des surfaces a été traité par Kollár et Shepherd-Barron [44] ; le caractère borné des variétés singulières autorisées étant dû à Alexeev [2], et la projectivité de l'espace de modules grossier à Kollár [40].

Suite à des avancées récentes en géométrie birationnelle (notamment dues à Hacon et McKernan) et à des travaux de Kollár, on sait aujourd'hui quelles classes de singularités et quelles familles autoriser pour compactifier  $\mathcal{M}_C$  en dimension quelconque (voir le livre en préparation [43]).

On dispose ainsi d'un analogue en dimension supérieure des espaces de modules de courbes stables.

### 0.1.3 Espaces de modules de variétés de Fano

Les résultats décrits au paragraphe précédent s'appliquent à des variétés dont le fibré canonique vérifie des conditions de positivité. On peut se demander ce qu'il advient quand on considère d'autres problèmes de modules de variétés polarisées. Un exemple particulièrement intéressant est le cas où les variétés de  $V$  sont des variétés de Fano (i.e. dont le fibré anticanonique est ample). Ce cas particulier est motivé par l'intervention en théorie de Mori de fibrations à fibres variétés de Fano, donc de familles de variétés de Fano. Dans ce paragraphe, on se restreint à cette situation.

Dans cette thèse, les variétés qu'on manipulera seront explicites, de sorte que le caractère borné des familles considérées sera évident. D'autre part, on ne s'intéressera pas au problème très difficile de compactification du champ de modules ; on ne considèrera que des variétés lisses. Les questions qu'on étudiera seront donc la séparation du champ  $\mathcal{M}_C$ , et, quand celle-ci est vraie, la quasi-projectivité de l'espace de modules grossier  $M_C$ .

Commençons par une remarque facile et utile. Les stabilisateurs des points géométriques de  $\mathcal{M}_C$  s'identifient aux groupes d'automorphismes des variétés

polarisées de  $V$ , qui sont des schémas en groupes affines. Si  $\mathcal{M}_C$  est séparé, ces stabilisateurs doivent être propres ; comme ils sont donc propres et affines, ils sont même finis. On a montré :

*Remarque 0.1.4.* Une condition nécessaire pour que  $\mathcal{M}_C$  soit séparé est que toute variété polarisée de  $V$  ait un groupe d'automorphismes fini.

Bien sûr, des variétés de Fano peuvent avoir des groupes d'automorphismes de dimension  $> 0$  (c'est le cas de  $\mathbb{P}^N$ ), et il faudra donc au moins exclure de tels cas.

Regardons des exemples de petite dimension. En dimension 1, la seule variété de Fano est  $\mathbb{P}^1$ , dont le groupe d'automorphismes est de dimension  $> 0$  ; par la remarque 0.1.4, la situation n'est pas intéressante.

En dimension 2, les variétés de Fano sont les surfaces de del Pezzo. Prenons pour  $C$  la collection des familles lisses de surfaces de del Pezzo de degré  $d$  polarisées par leur fibré anticanonique. Au vu de la remarque 0.1.4, la question est intéressante si  $1 \leq d \leq 5$ . L'article [30] propose alors une construction de  $\mathcal{M}_C$  à l'aide de théorie géométrique des invariants qui montre que le champ  $\mathcal{M}_C$  est séparé, et que son espace de modules grossier  $M_C$  est quasi-projectif.

En dimension 3, on peut parfois appliquer le théorème 0.1.2 de Matsusaka et Mumford via le corollaire suivant :

**Corollaire 0.1.5.** *En caractéristique nulle, si  $V$  est constitué de solides de Fano lisses qui ne sont pas rationnels,  $\mathcal{M}_C$  est nécessairement séparé.*

**Preuve.** Soit  $X$  un solide de Fano lisse birationnel à  $\mathbb{P}^1 \times Y$ . Comme  $X$  est de Fano et que nous sommes en caractéristique nulle,  $X$  est rationnellement connexe, de sorte que  $Y$  est une surface rationnellement connexe. Comme  $Y$  est recouverte par des courbes rationnelles très libres, toute forme pluricanonique sur  $Y$  est nulle. La classification des surfaces montre alors que  $Y$  est birationnelle à  $\mathbb{P}^1 \times C$  pour  $C$  une courbe. Comme  $Y$  est rationnellement connexe,  $C$  est rationnelle, de sorte que  $Y$ , donc  $X$  sont rationnels. On a montré, comme voulu, qu'un solide de Fano lisse non rationnel n'est pas birationnellement réglé.  $\square$

Cependant, pour certaines collections de solides de Fano à groupes d'automorphismes finis, par exemple celle étudiée dans [14], la séparation de  $\mathcal{M}_C$  n'est pas connue :

*Question 0.1.6.* En caractéristique nulle, si  $V$  est constitué de solides de Fano de nombre de Picard 1, d'indice 1 et de degré 10,  $\mathcal{M}_C$  est-il séparé ?

Au vu de ces exemples, on peut plus généralement se demander si la finitude du groupe d'automorphismes est la seule obstruction à la séparation d'un champ de modules de variétés de Fano :

*Question 0.1.7.* Si les variétés de  $V$  sont des variétés de Fano à groupes d'automorphismes finis,  $\mathcal{M}_C$  est-il séparé ?

En ce qui concerne la quasi-projectivité de  $M_C$ , Kollár a construit dans [42] des exemples d'espaces de modules de variétés polarisées qui ne sont pas quasi-projectifs. Cependant, les techniques de Kollár ne semblent pas permettre de construire de tels exemples faisant intervenir des variétés de Fano. La question suivante reste donc ouverte :

*Question 0.1.8.* Si  $V$  est constitué de variétés de Fano et si  $\mathcal{M}_C$  est séparé,  $M_C$  est-il un schéma quasi-projectif ?

Cette absence de résultats généraux contraste avec des exemples explicites et très étudiés d'espaces de modules de variétés de Fano.

On a déjà évoqué les espaces de modules de surfaces de del Pezzo, dont des compactifications géométriques ont été étudiées en [26]. Le cas particulier des espaces de modules de surfaces cubiques a été l'objet de développements récents [4]. Signalons, des travaux analogues concernant l'espace de modules des solides cubiques [5] et des cubiques de dimension 4 [46].

## 0.2 Intersections complètes lisses

On restreint maintenant la discussion au cas particulier qui nous intéresse.

### 0.2.1 Notations

On travaille sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Fixons  $N \geq 2$ ,  $1 \leq c \leq N - 1$  et  $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$  des entiers. On prend pour  $V$  l'ensemble des intersections complètes lisses de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}^N$  définies par  $c$  équations homogènes de degrés  $d_1, \dots, d_c$  et polarisées par  $\mathcal{O}(1)$ . Le bon choix de  $C$  est un peu technique ; il sera précisé au paragraphe 2.3.2.

On note  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_C$  : c'est le champ de modules des intersections complètes lisses polarisées par  $\mathcal{O}(1)$ . Il s'agit de l'objet d'étude principal de cette thèse. Une définition précise en sera donnée dans la partie 2.3.

Remarquons que si  $d_1 + \dots + d_c > N + 1$ , le fibré canonique des variétés en jeu est ample, de sorte qu'on rentre dans le cadre des résultats décrits au paragraphe 0.1.2. En revanche, si  $d_1 + \dots + d_c < N + 1$ , les variétés considérées sont de Fano. Pour ces valeurs des paramètres, on étudie donc des cas particuliers des questions 0.1.7 et 0.1.8.

### 0.2.2 Énoncés des principaux théorèmes

Décrivons les principaux résultats concernant le champ  $\mathcal{M}$  qu'on obtient.

#### 0.2.2.1 Automorphismes

Le premier théorème signifie que, sauf pour quelques exceptions, les automorphismes projectifs d'une intersection complète lisse forment un schéma en groupes fini réduit. Il y a deux types d'exceptions différents : dans le cas (i), ces

groupes sont de dimension  $> 0$ ; dans les cas (ii), (iii) et (iv), ils sont finis non réduits.

**Théorème 0.2.1.** *Le champ  $\mathcal{M}$  est de Deligne-Mumford sauf dans les cas suivants :*

- (i) *Si  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ .*
- (ii) *Si  $N = 2$ ,  $c = 1$ ,  $d_1 = 3$ , auquel cas il est de Deligne-Mumford au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{3}])$ .*
- (iii) *Si  $N = 3$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$ , auquel cas il est de Deligne-Mumford au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ .*
- (iv) *Si  $N \geq 5$  est impair,  $c = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$ , auquel cas il est de Deligne-Mumford au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ .*

Au vu de la remarque 0.1.4, cet énoncé peut être vu comme un résultat facile à tester indiquant que l'étude de la séparation de  $\mathcal{M}$  est intéressante. C'est ce qui a motivé pour nous son étude. Ce n'est cependant pas un énoncé plus faible que la séparation du champ  $\mathcal{M}$  car celle-ci ne dit rien sur le caractère réduit de ces groupes d'automorphismes.

### 0.2.2.2 Séparation

Le champ de modules des quadriques ne peut être séparé par la remarque 0.1.4 car le groupe de leurs automorphismes projectifs est de dimension  $> 0$ . On montre que ce contre-exemple trivial est le seul :

**Théorème 0.2.2.** *Le champ  $\mathcal{M}$  est séparé, sauf si  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ .*

Ce théorème permet d'appliquer le théorème de Keel et Mori pour obtenir :

**Corollaire 0.2.3.** *Si l'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ , le champ  $\mathcal{M}$  admet un espace de modules grossier  $M$  qui est un espace algébrique séparé.*

### 0.2.2.3 Quasi-projectivité

On peut alors étudier l'espace de modules grossier  $M$ . On obtient les deux résultats suivants :

**Théorème 0.2.4.** *Supposons que  $d_1 = \dots = d_c$  et que l'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ . Alors  $M$  est un schéma affine.*

**Théorème 0.2.5.** *Supposons que  $c \geq 2$ , que  $d_1 < d_2 = \dots = d_c$  et que*

$$d_2(N - c + 2) > d_1((c - 1)(d_2 - d_1) + 1).$$

*Alors  $M$  est un schéma quasi-projectif.*

À l'aide du théorème 0.1.3 de Viehweg, on obtient comme corollaire :

**Corollaire 0.2.6.** *En caractéristique nulle, si  $d_1 \leq d_2 = \dots = d_c$  et si l'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ ,  $M$  est un schéma quasi-projectif.*

### 0.2.3 Limites des résultats

On explique ici la portée de ces résultats, et quelles en sont les limites.

#### 0.2.3.1 Séparation

Le théorème 0.2.2 donne beaucoup d'exemples de champs de modules de variétés de Fano qui sont séparés. Dans quelle mesure est-il pour autant un indice sérieux que la question 0.1.7 ait une réponse positive ?

Pour de nombreuses valeurs des paramètres, le champ  $\mathcal{M}$  est en fait un ouvert d'un champ  $\tilde{\mathcal{M}}$  géométriquement plus pertinent. C'est par exemple ce qui se passe dans les exemples étudiés au chapitre 6. Dans la partie 6.2, on fait  $N = 3$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 3$  et  $\mathcal{M}$  est l'ouvert du champ de modules des courbes lisses de genre 4 constitué des courbes non hyperelliptiques. Dans la partie 6.3, on fait  $N = 4$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 3$  et  $\mathcal{M}$  est l'ouvert du champ de modules des surfaces K3 lisses polarisées de degré 6 constitué des surfaces K3 non hyperelliptiques.

Donnons un exemple plus parlant, concernant des variétés de Fano. Plaçons-nous en caractéristique nulle, et faisons  $N = 4$ ,  $c = 1$  et  $d_1 = 4$  :  $\mathcal{M}$  est l'espace de modules des solides quartiques lisses. C'est un ouvert du champ de modules  $\tilde{\mathcal{M}}$  des solides de Fano lisses de nombre de Picard 1, d'indice 1 et de degré 4, qui paramètre aussi des revêtements doubles de quadriques ramifiés le long d'une surface de degré 8 (voir [32] 4.1.11, 4.1.12). Ces solides ne sont jamais rationnels par [31], de sorte qu'on peut appliquer le corollaire 0.1.5 : le champ  $\tilde{\mathcal{M}}$  est séparé.

Dans une telle situation, la séparation de  $\mathcal{M}$  est un énoncé plus faible que la séparation de  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Il est donc possible que  $\mathcal{M}$  soit un ouvert séparé d'un champ de modules bien plus compliqué  $\tilde{\mathcal{M}}$ .

Une manière de donner plus de poids à ces exemples de champs de modules séparés de variétés de Fano serait de montrer que l'espace de modules grossier associé  $M$  n'est pas quasi-affine, ou mieux, qu'il contient des courbes complètes. En effet, si, par exemple,  $M$  contient des courbes complètes, cela signifie que le champ de modules considéré paramètre suffisamment de variétés pour que la vérification de la séparation ait représenté une gageure.

*Question 0.2.7.* L'espace algébrique  $M$  contient-il des courbes complètes ?

Je ne sais vérifier cela que pour une valeur des paramètres, où la réponse est classique (voir le paragraphe 6.2.2) :

**Proposition 0.2.8.** *Si  $N = 3$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 3$ , l'espace algébrique  $M$  contient des courbes complètes.*

Bien sûr, cet exemple ne concerne pas des variétés de Fano. Cependant, il a le mérite de montrer que les espaces de modules grossiers construits par le corollaire 0.2.3 ne sont pas tous quasi-affines. Ces questions sont en général difficiles ; un autre exemple est évoqué au paragraphe 6.3.4.

### 0.2.3.2 Quasi-projectivité

Énonçons explicitement le cas particulier suivant de la question 0.1.8, auquel les théorèmes 0.2.4 et 0.2.5 répondent partiellement :

*Question 0.2.9.* L'espace algébrique  $M$  est-il un schéma quasi-projectif ?

Les conditions sur les degrés dans l'énoncé du théorème 0.2.5 sont artificielles ; ce sont des artefacts de la démonstration. Plus précisément, on utilise la théorie géométrique des invariants, et on a besoin pour cela d'une compactification du schéma de Hilbert  $H$  des intersections complètes lisses et d'un fibré ample sur cette compactification. La première condition  $d_1 < d_2 = \dots = d_c$  assure l'existence d'une compactification  $\bar{H}$  dont la géométrie est très simple ; la seconde condition  $d_2(N - c + 2) > d_1((c - 1)(d_2 - d_1) + 1)$  reflète l'existence d'un fibré ample sur  $\bar{H}$  qui permet d'appliquer la théorie géométrique des invariants.

Pour répondre à la question 0.2.9 pour d'autres valeurs des  $d_i$  en suivant la même stratégie, il faudrait travailler avec une autre compactification de  $H$ .

Même dans des cas où la démonstration fonctionne, la compactification utilisée ne semble pas naturelle. D'une part, les points du bord  $\bar{H} \setminus H$  n'ont pas tous une interprétation géométrique (par exemple,  $\bar{H}$  n'est pas la base d'une famille plate de variétés). D'autre part, certains fibrés en droites sur  $\bar{H}$  qu'il aurait été naturel d'utiliser pour appliquer la théorie géométrique des invariants s'avèrent ne pas être amples. Cela sera mis en évidence dans les exemples étudiés au chapitre 6 (voir les remarques 6.2.8, 6.2.11 et 6.3.6).

Suivant Mumford, on peut chercher à utiliser comme compactification le schéma de Hilbert de  $\mathbb{P}^N$ , et comme fibrés amples les fibrés de Plücker naturels sur celui-ci. On s'intéressera à cette stratégie dans la partie 5.5. En particulier, le paragraphe 5.5.3 discute la question suivante :

*Question 0.2.10.* Supposons qu'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ . Les intersections complètes lisses sont-elles Hilbert-stables ?

## 0.2.4 Plan du texte

Décrivons maintenant précisément comment les différents chapitres s'articulent.

Le premier chapitre rassemble, faute de références commodes, des résultats standards, de nature technique, qui seront utilisés dans toute cette thèse. Le lecteur est invité à ne s'y référer qu'en cas de besoin.

Le deuxième chapitre regroupe tous les résultats généraux sur les intersections complètes qu'on utilisera par la suite. Une grande partie est classique ; on prend le parti de détailler beaucoup pour le confort du lecteur.

L'essentiel repose sur des calculs de cohomologie cohérente des intersections complètes menés au paragraphe 2.1.3. On y construit de manière détaillée le schéma de Hilbert  $H^{ic}$  des intersections complètes (partie 2.2), puis le champ de modules  $\mathcal{M}^{ic}$  des intersections complètes polarisées par  $\mathcal{O}(1)$  (partie 2.3)



— ainsi que leurs ouverts respectifs  $H$  et  $\mathcal{M}$  paramétrant des intersections complètes lisses.

Dans le troisième chapitre, on étudie la séparation du champ de modules  $\mathcal{M}$ . L'objectif en est la preuve du théorème 0.2.2 (théorème 3.1.1). On fait le lien entre ce résultat et une conjecture de Pukhlikov.

Comme mentionné ci-dessus, une conséquence importante est l'existence d'un espace de modules grossier  $M$  qui est un espace algébrique séparé.

Dans le quatrième chapitre, on étudie le schéma en groupes des automorphismes des intersections complètes lisses polarisées par  $\mathcal{O}(1)$ . Le résultat principal est le théorème 4.2.1 ; on montre notamment que, à quelques exceptions près, ce schéma en groupes est fini et réduit. Ce théorème généralise au cas des intersections complètes un théorème de Kodaira et Spencer sur les hypersurfaces complexes (voir la discussion au paragraphe 4.2.2).

Remarquons que, contrairement à ce qu'on a laissé entendre plus haut, et qui aurait été plus naturel, l'étude de la séparation de  $\mathcal{M}$  précède ici celle des groupes d'automorphismes. La raison pour cela est que, faute d'argument plus simple, on déduira le théorème 4.2.1 quand  $N \geq 5$  est impair,  $c = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$  et  $\text{car}(k) = 2$  de la séparation de  $\mathcal{M}$ .

On en déduit dans la partie 4.4 une preuve du théorème 0.2.1 (théorème 4.4.1).

Dans le cinquième chapitre, on s'intéresse au champ de modules grossier  $M$  ; on montre pour certaines valeurs des paramètres la quasi-projectivité de  $M$  sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ .

L'essentiel de ce chapitre est consacré à la preuve des théorèmes 0.2.4 et 0.2.5 (théorèmes 5.1.1 et 5.1.2). Il s'agit d'une application de la théorie géométrique des invariants de Mumford. Les principaux ingrédients sont le calcul du cône ample d'une compactification explicite  $\bar{H}$  du schéma de Hilbert  $H^{ic}$  (proposition 5.4.6), et une inégalité qui permettra d'y vérifier le critère d'Hilbert-Mumford (théorème 5.2.1). On renvoie à la partie 5.1 pour plus de détails.

Enfin, dans la dernière partie 5.5, on discute l'éventuelle Hilbert-stabilité des intersections complètes lisses.

Dans le sixième chapitre, on illustre sur deux exemples les constructions des chapitres précédents. Le premier ( $N = 3$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 3$ ) est un espace de modules de courbes, et le second ( $N = 4$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 3$ ) un espace de modules de surfaces K3 polarisées.

Dans chacun de ces exemples, on s'intéresse à deux questions. D'une part, l'utilisation de compactifications connues des espaces de modules concernés permet de montrer les limites des constructions du chapitre 5 (paragraphe 6.2.3, 6.2.4 et 6.3.3). Cela permet de faire le lien avec des travaux de Casalaina-Martin, Jensen et Laza [11] et de Looijenga [50]. D'autre part, on étudie l'existence de courbes complètes dans l'espace de modules grossier  $M$  (paragraphe 6.2.2 et 6.3.4).

Finalement, dans le dernier chapitre, on s'intéresse à la question suivante, largement indépendante de ce qui précède. On considère le polynôme discriminant : c'est le polynôme en les coefficients de  $c$  équations homogènes de degrés  $d_1, \dots, d_c$  qui s'annule si et seulement si ces équations ne définissent pas une intersection complète lisse. Le but de ce chapitre est de calculer les degrés d'homogénéité du discriminant en les coefficients de chacune des équations : c'est l'objet du théorème 7.1.3. On applique, en la généralisant, une méthode due à Gel'fand, Kapranov et Zelevinsky [18]. On prend notamment en compte l'influence de la caractéristique du corps de base.

Ce théorème est utilisé à deux reprises dans les chapitres précédents. Dans le cinquième chapitre, il montre qu'une stratégie naïve pour prouver la quasi-projectivité de  $M$  quand  $c = 2$  et  $d_1 < d_2$  échoue toujours (paragraphe 5.4.3.1). Dans le sixième chapitre, il est utilisé dans la preuve du lemme 6.2.6. C'est la première de ces deux applications qui a motivé cette étude.

Ce chapitre a été accepté aux Annales de l'Institut Fourier. Son contenu est identique à la version qui sera publiée, à l'exception de l'exemple 7.1.13, signalé par le referee, qui ne figure pas dans le texte publié.

# Chapitre 1

## Préliminaires

On trouvera dans ce chapitre des notations et résultats utilisés dans tout ce texte, et qu'il est agréable de regrouper ici pour pouvoir y faire référence aisément. Tous ces résultats sont classiques. On conseille au lecteur de ne se reporter à ce chapitre que si nécessaire.

### 1.1 Images directes et changement de base

Tout d'abord, on énonce des théorèmes dus à Grothendieck sur la compatibilité aux changements de base des images directes de faisceaux quasi-cohérents. On explique où trouver dans la littérature des preuves de ces énoncés.

On rappelle la définition suivante :

**Définition 1.1.1.** Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas,  $\mathcal{F}$  un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules et  $g : Y' \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On dit que la formation de  $f_*\mathcal{F}$  commute au changement de base par  $g$  si, avec les notations du diagramme cartésien ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y, \end{array}$$

l'homomorphisme de changement de base  $g^*f_*\mathcal{F} \rightarrow f'_*g'^*\mathcal{F}$  est un isomorphisme.

Indiquons avant tout une propriété formelle de cette notion :

**Proposition 1.1.2.** Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas et  $\mathcal{F}$  un

faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules. On considère les diagrammes cartésiens suivants :

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \xrightarrow{h'} & X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow f'' & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ Y'' & \xrightarrow{h} & Y' & \xrightarrow{g} & Y, \end{array}$$

où  $g$  et  $h$  sont des morphismes de schémas.

Supposons que la formation de  $f_*\mathcal{F}$  commute au changement de base par  $g$ . Alors la formation de  $f_*\mathcal{F}$  commute au changement de base par  $g \circ h$  si et seulement si la formation de  $f'_*(g'^*\mathcal{F})$  commute au changement de base par  $h$ .

**Preuve.** C'est [16] Coro. 4.36.  $\square$

On dispose de la proposition suivante relativement au changement de base par un morphisme plat.

**Proposition 1.1.3.** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas séparé et de type fini et  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ . Alors la formation de  $f_*\mathcal{F}$  commute à tout changement de base plat.*

**Preuve.** C'est [21] Prop 1.4.15.  $\square$

On en déduit une propriété de descente de la commutation à tout changement de base :

**Proposition 1.1.4.** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas séparé et de type fini et  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ . On considère le diagramme cartésien suivant :*

$$\begin{array}{ccc} X_Z & \xrightarrow{q'} & X \\ \downarrow f_Z & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{q} & Y, \end{array}$$

où  $q$  est un morphisme de schémas fidèlement plat.

Supposons que la formation de  $f_{Z,*}(q'^*\mathcal{F})$  commute à tout changement de base. Alors la formation de  $f_*\mathcal{F}$  commute à tout changement de base.

**Preuve.** Soit  $g : Y' \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On note  $Z' = Z \times_Y Y'$ . Soient  $f' : X' \rightarrow Y'$  et  $f'_Z : X'_Z \rightarrow Z'$  les tirés en arrière de  $f : X \rightarrow Y$ . Par abus de notation, on notera toujours  $\mathcal{F}$  les tirés en arrière de  $\mathcal{F}$  sur  $X'$ ,  $X_Z$  et  $X'_Z$ .

Par la proposition 1.1.3, la formation de  $f_*\mathcal{F}$  commute au changement de base par  $q : Z \rightarrow Y$ . Par hypothèse, la formation de  $f_{Z,*}(q'^*\mathcal{F})$  commute au changement de base par la projection  $Z' \rightarrow Z$ . Ainsi, par la proposition 1.1.2, la formation de  $f_*\mathcal{F}$  commute au changement de base par  $Z' \rightarrow Y$ .

De plus, à nouveau par la proposition 1.1.3, la formation de  $f'_*\mathcal{F}$  commute au changement de base par la projection  $Z' \rightarrow Y'$ . On déduit alors du diagramme commutatif [16] Prop. 4.35 que le morphisme de changement de base

$g^* f_* \mathcal{F} \rightarrow f'_* \mathcal{F}$  devient un isomorphisme après pull-back sur  $Z'$ . Comme  $Z' \rightarrow Z$  est fidèlement plat, c'est un isomorphisme. On a montré que la formation de  $f_* \mathcal{F}$  commutait au changement de base par  $g$ , donc à tout changement de base car  $g$  est arbitraire.  $\square$

Énonçons alors plusieurs critères de commutation à tout changement de base.

**Proposition 1.1.5.** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas propre et de présentation finie et  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent et de présentation finie sur  $X$  et plat sur  $Y$ .*

*On suppose que pour tout  $y \in Y$ ,  $h^1(X_y, \mathcal{F}_y) = 0$ . Alors  $f_* \mathcal{F}$  est localement libre et sa formation commute à tout changement de base.*

**Preuve.** Expliquons tout d'abord pourquoi le cas où  $Y$  est noethérien est conséquence des résultats généraux de [22] 7.7 et 7.8. On conserve les notations de ce texte en prenant pour  $\mathcal{P}_\bullet$  le complexe réduit à  $\mathcal{F}$  placé en degré 0. En particulier, pour  $p \in \mathbb{Z}$  et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent, on pose  $\mathcal{T}_p(\mathcal{M}) = R^{-p} f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{M})$ .

Vu l'hypothèse sur le  $H^1$  des fibres, la condition [22] 7.7.10 (b) est vérifiée pour  $p = -1$  et pour tout  $y \in Y$ , de sorte que  $\mathcal{T}_{-1}$  est exact à droite. Alors, par [22] 7.7.5 II (a) $\Rightarrow$ (d) pour  $p = -1$ , la formation de  $R^1 f_* \mathcal{F}$  commute à tout changement de base. L'hypothèse sur le  $H^1$  des fibres montre alors que, pour tout  $y \in Y$ ,  $(R^1 f_* \mathcal{F})_y = 0$ . Comme  $\mathcal{F}$  est cohérent,  $R^1 f_* \mathcal{F}$  est aussi cohérent de sorte que, par le lemme de Nakayama,  $\mathcal{T}_{-1}(\mathcal{O}_Y) = R^1 f_* \mathcal{F} = 0$ . Par [22] 7.7.5 II (a) $\Rightarrow$ (a') pour  $p = -1$ , on a donc  $\mathcal{T}_{-1} = 0$ ; en particulier,  $\mathcal{T}_{-1}$  est exact à gauche. Alors, par [22] 7.7.5 II (b) $\Rightarrow$ (d),(a) pour  $p = 0$ , la formation de  $f_* \mathcal{F}$  commute à tout changement de base et  $\mathcal{T}_0$  est exact à droite. Par [22] 7.7.5 II (a) $\Rightarrow$ (b) pour  $p = 1$ , comme  $\mathcal{T}_1 = 0$ ,  $\mathcal{T}_0$  est exact à gauche, donc exact; suivant la terminologie de [22],  $\mathcal{F}$  est homologiquement plat sur  $Y$  en dimension 0. On peut alors appliquer [22] 7.8.4 (a) $\Rightarrow$ (d) pour  $p = 0$  pour montrer que  $f_* \mathcal{F}$  est localement libre.

Le cas général se déduit du cas noethérien par les techniques générales de [24], comme expliqué très précisément dans [16] Prop 4.37.  $\square$

**Proposition 1.1.6.** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas propre et de présentation finie,  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent de présentation finie sur  $X$  et plat sur  $Y$ .*

*On suppose que  $Y$  est réduit et que la fonction  $y \mapsto h^0(X_y, \mathcal{F}_y)$  sur  $Y$  est constante. Alors  $f_* \mathcal{F}$  est localement libre et sa formation commute à tout changement de base.*

**Preuve.** On procède comme dans la preuve précédente dont on reprend les notations. La réduction au cas où  $Y$  est noethérien est similaire, et on se contente d'expliquer pourquoi ce cas particulier est conséquence des résultats généraux de [22] 7.7 et 7.8.

Les hypothèses permettent d'appliquer [22] 7.8.4 (e) $\Rightarrow$ (d) pour  $p = 0$  pour montrer que  $f_* \mathcal{F}$  est localement libre. Par ailleurs, par [22] 7.8.4 (e) $\Rightarrow$ (a) pour

$p = 0$ ,  $\mathcal{T}_0$  est exact, de sorte que, par [22] 7.7.5 II (a) $\Rightarrow$ (d) pour  $p = 0$ , la formation de  $f_*\mathcal{F}$  commute à tout changement de base.  $\square$

**Proposition 1.1.7.** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme propre entre schémas noethériens, et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$  et plat sur  $Y$ .*

*On suppose que pour tout  $y \in Y$ ,  $H^0(X_{\mathcal{O}_y}, \mathcal{F}_{\mathcal{O}_y}) \rightarrow H^0(X_y, \mathcal{F}_y)$  est surjective. Alors  $f_*\mathcal{F}$  est localement libre et sa formation commute à tout changement de base.*

**Preuve.** On procède comme dans les preuves précédentes dont on reprend les notations. On se contente d'expliquer pourquoi cet énoncé est conséquence des résultats généraux de [22] 7.7 et 7.8.

Par hypothèse, la condition [22] 7.7.10 (b) est vérifiée pour  $p = 0$  et pour tout  $y \in Y$ , de sorte que  $\mathcal{T}_0$  est exact à droite. Ainsi, par [22] 7.7.5 II (a) $\Rightarrow$ (d) pour  $p = 0$ , la formation de  $f_*\mathcal{F}$  commute à tout changement de base. D'autre part, par [22] 7.7.5 II (a) $\Rightarrow$ (b) pour  $p = 1$ , comme  $\mathcal{T}_1 = 0$ ,  $\mathcal{T}_0$  est exact à gauche, donc exact ; suivant la terminologie de [22],  $\mathcal{F}$  est homologiquement plat sur  $Y$  en dimension 0. On peut alors appliquer [22] 7.8.4 (a) $\Rightarrow$ (d) pour  $p = 0$  pour montrer que  $f_*\mathcal{F}$  est localement libre.  $\square$

Enfin, on utilisera à plusieurs reprises cette propriété de commutation au changement de base à travers le lemme suivant :

**Lemme 1.1.8.** *Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme propre de schémas et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites sur  $X$  très ample sur les fibres de  $f$  tel que la formation de  $f_*\mathcal{L}$  commute à tout changement de base. Alors  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $f$ .*

**Preuve.** Pour tout  $y \in Y$ ,  $H^0(X_y, \mathcal{L}_y) \rightarrow \mathcal{L}_y$  est surjectif car  $\mathcal{L}_y$  est engendré par ses sections globales. Par commutation au changement de base par  $y \rightarrow Y$ , cela montre que  $(f^*f_*\mathcal{L})_y \rightarrow \mathcal{L}_y$  est surjectif pour tout  $y \in Y$ , donc, appliquant le lemme de Nakayama à son conoyau, que  $f^*f_*\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  est surjectif. On obtient donc un morphisme  $i : X \rightarrow \mathbb{P}(f_*\mathcal{L})$ , qui, en restriction à  $X_y$ , coïncide avec  $X_y \rightarrow \mathbb{P}(H^0(X_y, \mathcal{L}_y))$  (on utilise ici la notation de Grothendieck concernant les fibrés projectifs).

Il faut montrer que  $i$  est une immersion fermée. Comme  $i$  est propre et quasi-fini,  $i$  est fini, donc affine. Il suffit donc de montrer que le morphisme de faisceaux  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(f_*\mathcal{L})} \rightarrow i_*\mathcal{O}_X$  est surjectif. En appliquant à nouveau le lemme de Nakayama, on est ramenés à montrer que pour tout  $y \in Y$ ,  $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(f_*\mathcal{L})})_y \rightarrow (i_*\mathcal{O}_X)_y$  est surjectif. On a vu que le faisceau de gauche coïncide avec  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(H^0(X_y, \mathcal{L}_y))}$ . Le faisceau de droite coïncide avec  $i_{y,*}\mathcal{O}_{X_y}$  par affinité de  $i$ . La surjectivité recherchée est donc conséquence du fait que  $\mathcal{L}_y$  est très ample sur  $X_y$ .  $\square$

## 1.2 Foncteurs et schéma de Picard

Les conventions que l'on fait sur les foncteurs et schémas de Picard sont celles de [16] Chap. 9. On les rappelle brièvement ici.

Si  $f : X \rightarrow S$  est un morphisme de schémas,  $\text{Pic}_{X/S}$  est le foncteur qui à un  $S$ -schéma  $T$  associe  $\text{Pic}_{X/S}(T) = \text{Pic}(X_T)/\text{Pic}(T)$ . On note  $\text{Pic}_{(X/S)(\text{fppf})}$  son faisceautisé pour la topologie fppf. Si ce dernier foncteur est représentable, on note  $\mathbf{Pic}_{X/S}$  l'espace algébrique qui le représente.

Par [16] 9.4.8, si  $f$  est projectif plat à fibres géométriquement intègres,  $\mathbf{Pic}_{X/S}$  existe et est un  $S$ -schéma séparé localement de type fini. Par [16] 9.4.4, sa formation commute à tout changement de base.

Le lemme suivant nous permettra de tester l'égalité de deux éléments de  $\text{Pic}_{(X/S)(\text{fppf})}(S)$  :

**Lemme 1.2.1.** *Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de schémas propre, plat et de présentation finie à fibres géométriques intègres. On suppose que  $S$  est réduit. Alors, si  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont deux faisceaux inversibles sur  $X$  tels que pour tout  $s \in S$ ,  $\mathcal{L}_1|_{X_s} \simeq \mathcal{L}_2|_{X_s}$ ,  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  coïncident dans  $\text{Pic}_{(X/S)(\text{fppf})}(S)$ .*

**Preuve.** Quitte à remplacer  $\mathcal{L}_1$  par  $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{-1}$ , on peut supposer que  $\mathcal{L}_2 \simeq \mathcal{O}_X$ . Alors, pour  $s \in S$ ,  $H^0(X_s, \mathcal{L}_1|_{X_s}) = H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \kappa(s)$  par hypothèse sur  $X_s$ . On peut donc appliquer la proposition 1.1.6 :  $f_*\mathcal{L}_1$  est un faisceau inversible sur  $S$ .

Notons  $\mathcal{M} = \mathcal{L}_1 \otimes f^*(f_*\mathcal{L}_1)^{-1}$ . Alors, par formule de projection,  $f_*(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{O}_S$ . Toujours par la proposition 1.1.6, la formation de cette image directe commute à tout changement de base. On note  $\sigma \in H^0(X, \mathcal{M})$  la section correspondant à  $1 \in H^0(S, \mathcal{O}_S)$ . Si  $s \in S$ , par commutation au changement de base par  $s \rightarrow S$ ,  $\sigma|_{X_s}$  est un élément non nul de  $H^0(X_s, \mathcal{M}_s) \simeq H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = \kappa(s)$ . Ainsi,  $\sigma|_{X_s}$  est nulle part nul sur  $X_s$ , de sorte que  $\mathcal{M}$ , possédant une section globale  $\sigma$  nulle part nulle, est trivial.

Ainsi,  $\mathcal{L}_1 \simeq f^*f_*\mathcal{L}_1$ , ce qui montre immédiatement que  $\mathcal{L}_1$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_X$  Zariski-localement sur  $S$ .  $\square$

## 1.3 Champs quotients

On effectue dans cette partie des rappels sur les champs quotients. Attention : on travaille ici avec des actions à gauche alors que [45], qui nous sert de référence, considère des actions à droite.

Soit  $S$  un schéma. On note  $(\text{Sch}/S)$  la catégorie des  $S$ -schémas. Soient  $X$  un  $S$ -schéma et  $G$  un  $S$ -schéma en groupes séparé, lisse et de présentation finie. On suppose que  $G$  opère à gauche sur  $X$  par  $\sigma : G \times_S X \rightarrow X$ . On note  $[G \backslash X]$  la catégorie fibrée en groupoïdes sur  $(\text{Sch}/S)$  définie comme suit. Si  $T$  est un  $S$ -schéma, la catégorie  $[G \backslash X](T)$  a pour objets :

$$[G \backslash X](T) = \left\{ \begin{array}{l} G_T\text{-torseurs fppf à gauche } P \text{ sur } T \\ \text{munis d'un morphisme } G_T\text{-équivariant } \sigma : P \rightarrow X_T \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

et une flèche  $P' \rightarrow P$  au-dessus du morphisme de schémas  $T' \rightarrow T$  est un

diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} P' & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ T' & \longrightarrow & T \end{array}$$

respectant les structures de toreseurs et les morphismes équivariants.

Par [45] 4.6.1 et 9.6,  $[G \backslash X]$  est un  $S$ -champ algébrique dont une présentation est donnée par le 1-morphisme canonique  $P : X \rightarrow [G \backslash X]$ , et on a un diagramme 2-cartésien :

$$\begin{array}{ccc} G \times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow p_2 & & \downarrow P \\ X & \xrightarrow{P} & [G \backslash X] \end{array} \quad (1.2)$$

Faute de référence explicite, on rassemble ci-dessous trois propositions reliant les propriétés de  $[G \backslash X]$  à celles de l'action de  $G$  sur  $X$ .

**Proposition 1.3.1.** *Sous les hypothèses ci-dessus, le champ algébrique  $[G \backslash X]$  est lisse sur  $S$  si et seulement si  $X$  est lisse sur  $S$ .*

**Preuve.** C'est une conséquence de la définition de la lissité ([45] 4.14) et de l'existence de la présentation  $P : X \rightarrow [G \backslash X]$  de  $[G \backslash X]$ .  $\square$

**Proposition 1.3.2.** *Sous les hypothèses ci-dessus, le champ algébrique  $[G \backslash X]$  est séparé si et seulement si le morphisme  $(\sigma, p_2) : G \times_S X \rightarrow X \times_S X$  est propre.*

**Preuve.** Comme conséquence formelle du fait que le diagramme (1.2) est 2-cartésien, le diagramme ci-dessous, où l'on a noté  $\Delta$  le morphisme diagonal de  $[G \backslash X]$ , est également 2-cartésien :

$$\begin{array}{ccc} G \times_S X & \xrightarrow{(\sigma, p_2)} & X \times_S X \\ \downarrow p_2 \circ P & & \downarrow (P, P) \\ [G \backslash X] & \xrightarrow{\Delta} & [G \backslash X] \times_S [G \backslash X] \end{array} \quad (1.3)$$

Comme  $P$  est lisse et surjectif,  $(P, P)$  est également lisse et surjectif, donc un recouvrement fppf. Par conséquent, par [45] 7.11.1,  $(\sigma, p_2)$  est propre si et seulement si  $\Delta$  l'est. Enfin, par [45] 7.7,  $\Delta$  est propre si et seulement si  $[G \backslash X]$  est séparé.  $\square$

**Proposition 1.3.3.** *Sous les hypothèses ci-dessus, le champ algébrique  $[G \backslash X]$  est de Deligne-Mumford si et seulement si les stabilisateurs géométriques de l'action de  $G$  sur  $X$  sont finis et réduits.*



**Preuve.** Par [45] Th. 8.1,  $[G \backslash X]$  est de Deligne-Mumford si et seulement si le morphisme diagonal de  $[G \backslash X]$  est non ramifié. Vu le diagramme cartésien (1.3), comme être non ramifié est une propriété locale sur la base pour la topologie fppf ([25] 17.7.4), cela est équivalent au fait que le morphisme  $(\sigma, p_2) : G \times_S X \rightarrow X \times_S X$  est non ramifié. Par [25] 17.4.2 d), cela revient à dire que les fibres de  $(\sigma, p_2) : G \times_S X \rightarrow X \times_S X$  sont non ramifiées, donc, par [25] 17.7.4, que les fibres géométriques de  $(\sigma, p_2) : G \times_S X \rightarrow X \times_S X$  sont non ramifiées.

Supposons que c'est le cas. Soient  $K$  un corps algébriquement clos et  $x \in X(K)$  un point géométrique de  $X$ . Alors la fibre géométrique de  $(\sigma, p_2)$  en  $(x, x)$  s'identifie au stabilisateur de  $x$  par  $G$ . Comme il est non ramifié sur  $\text{Spec}(K)$ , il est réunion disjointe de copies de  $\text{Spec}(K)$  par [25] 17.4.2 d'). Comme il est de plus de type fini, il y a un nombre fini de telles copies. Ce stabilisateur géométrique est donc bien fini réduit.

Réciproquement, supposons les stabilisateurs géométriques de l'action de  $G$  sur  $X$  finis réduits. Soient  $K$  un corps algébriquement clos et  $(x, y) \in (X \times_S X)(K)$  un point géométrique. Si la fibre de  $(\sigma, p_2)$  en  $(x, y)$  est vide, il n'y a rien à vérifier. Sinon, il existe  $g \in G(K)$  tel que  $g(y) = x$ . La multiplication par  $g$  identifie alors la fibre de  $(\sigma, p_2)$  en  $(x, y)$  et la fibre de  $(\sigma, p_2)$  en  $(x, x)$ . Comme cette dernière s'identifie au stabilisateur de  $x$  sous  $G$ , elle est finie réduite, donc nécessairement isomorphe à une réunion disjointe de copies de  $\text{Spec}(K)$ , et par conséquent non ramifiée.  $\square$



## Chapitre 2

# Généralités sur les intersections complètes

Ce chapitre est constitué de trois parties. La première rassemble tous les résultats généraux sur les intersections complètes que nous utiliserons dans la suite. La deuxième et la troisième sont respectivement consacrées à la construction du schéma de Hilbert  $H^{ic}$  des intersections complètes et du champ de modules  $\mathcal{M}^{ic}$  des intersections complètes polarisées par  $\mathcal{O}(1)$ .

### 2.1 Intersections complètes

#### 2.1.1 Définition et notations

**Définition 2.1.1.** Soient  $N \geq 2$ ,  $0 \leq c \leq N - 1$  et  $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$  des entiers, et  $k$  un corps. Une intersection complète de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}_k^N$  de degrés  $d_1, \dots, d_c$  est un sous-schéma de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}_k^N$  défini par  $c$  équations homogènes de degrés  $d_1, \dots, d_c$ .

Les entiers  $d_1, \dots, d_c$  sont les degrés de l'intersection complète.

Dans tout ce chapitre, on fixe  $N \geq 2$ ,  $0 \leq c \leq N - 1$  et  $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$  des entiers. En l'absence d'indication contraire, une intersection complète sur un corps  $k$  sera toujours de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}_k^N$  et de degrés  $d_1, \dots, d_c$ . On notera  $n = N - c$  la dimension de ces intersections complètes.

On note  $\delta_1 < \dots < \delta_s$  les entiers distincts apparaissant parmi les  $d_j$ , et on note  $m_i$  le nombre de  $d_j$  égaux à  $\delta_i$ . Soit  $\mu_i = m_1 + \dots + m_i$  le nombre de  $d_j$  inférieurs ou égaux à  $\delta_i$ .

Enfin, si  $S$  est un schéma et  $Z \subset \mathbb{P}_S^N$  un sous-schéma fermé, on notera  $\mathcal{I}_Z$  le faisceau d'idéaux définissant  $Z$  dans  $\mathbb{P}_S^N$ . Cet abus de notation ne prêterait pas à confusion.

### 2.1.2 Suites régulières globales

**Définition 2.1.2.** Si  $Z \subset \mathbb{P}_k^N$  est une intersection complète, une suite régulière globale définissant  $Z$  est la donnée de  $c$  équations homogènes la définissant.

Commençons par montrer une proposition qui justifie la terminologie de suite régulière globale.

**Proposition 2.1.3.** Soient  $Z$  une intersection complète sur le corps  $k$ , et  $F_1, \dots, F_c$  une suite régulière globale la définissant. Alors :

- (i) Pour  $0 \leq i \leq c$ ,  $Z_i = \{F_1 = \dots = F_i = 0\}$  est une intersection complète de codimension  $i$  dans  $\mathbb{P}_k^N$  et de degrés  $d_1, \dots, d_i$ .
- (ii)  $F_1, \dots, F_c$  est une suite régulière.
- (iii)  $Z$  est Cohen-Macaulay.

**Preuve.** Par Hauptidealsatz,  $Z_{i+1}$  est de codimension au plus 1 dans  $Z_i$ , de sorte que, comme  $Z = Z_c$  est de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}_k^N = Z_0$ ,  $Z_i$  est nécessairement de codimension pure  $i$  dans  $\mathbb{P}_k^N$ . Cela montre (i).

Montrons alors simultanément (ii) et (iii) par récurrence sur  $c$ . Pour  $c = 0$ , c'est évident. Supposons le résultat connu pour  $c - 1$ . L'équation  $F_c$  ne s'annule pas sur une composante irréductible de  $Z_{c-1}$  car  $Z_c$  est de codimension 1 dans  $Z_{c-1}$ . Il ne s'annule pas non plus sur un point immergé de  $Z_{c-1}$  car  $Z_{c-1}$ , Cohen-Macaulay par hypothèse de récurrence, n'en a pas. Ainsi,  $F_c$  n'est pas un diviseur de zéro sur  $Z_{c-1}$  de sorte que  $F_1, \dots, F_c$  forment une suite régulière. On en déduit que  $Z_c$  est localement intersection complète, donc Cohen-Macaulay. Cela conclut la récurrence, et prouve (ii) et (iii).  $\square$

On énonce les deux propositions suivantes pour pouvoir y faire référence ultérieurement :

**Proposition 2.1.4.** Soit  $Z$  une intersection complète sur le corps  $k$ . Alors le faisceau dualisant  $\omega_{Z/k}$  est :

$$\omega_{Z/k} \simeq \mathcal{O}(d_1 + \dots + d_c - N - 1).$$

**Preuve.** Soit  $F_1, \dots, F_c$  une suite régulière globale définissant  $Z$ . Comme il s'agit d'une suite régulière par la proposition 2.1.3 (ii), on dispose d'une résolution de Koszul de  $\mathcal{I}_Z$  :

$$\bigoplus_{1 \leq i < j \leq c} \mathcal{O}(-d_i - d_j) \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq c} \mathcal{O}(-d_i) \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

Par exactitude à droite du produit tensoriel, et comme la flèche  $\mathcal{O}(-d_i - d_j) \rightarrow \mathcal{O}(-d_i)$  est donnée au signe près par la multiplication par  $F_j$ , on obtient en restreignant à  $Z$  :  $\mathcal{I}_Z|_Z \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq c} \mathcal{O}(-d_i)$ . Finalement, par [49] Def. 6.4.7 et Th. 6.4.32,

$$\omega_{Z/k} \simeq \omega_{\mathbb{P}_k^N/k} \otimes (\det \mathcal{I}_Z|_Z)^{-1} \simeq \mathcal{O}(d_1 + \dots + d_c - N - 1).$$

$\square$

**Proposition 2.1.5.** *Soient  $Z$  une intersection complète lisse sur le corps algébriquement clos  $k$ , et  $F_1, \dots, F_c$  une suite régulière globale la définissant. Alors les sous-schémas  $\{F_i = 0\}$  sont lisses et transverses en tout point de  $Z$ .*

**Preuve.** Par lissité, si  $z \in Z$ ,  $T_z Z$  est de codimension  $c$  dans  $T_z \mathbb{P}_k^N$ . Comme  $T_z Z = \bigcap_{i=1}^c T_z \{F_i = 0\}$ , les  $T_z \{F_i = 0\}$  sont nécessairement des hyperplans transverses de  $T_z \mathbb{P}_k^N$ , de sorte que les  $\{F_i = 0\}$  sont lisses et transverses en  $z$ .  $\square$

### 2.1.3 Cohomologie cohérente

On commence par faire quelques calculs de cohomologie cohérente des intersections complètes.

**Proposition 2.1.6.** *Soit  $Z$  une intersection complète sur le corps  $k$ . Si  $0 < q < n$  et  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $H^q(Z, \mathcal{O}_Z(d)) = 0$ .*

**Preuve.** On montre la proposition par récurrence sur  $c$ , le cas  $c = 0$  étant connu. Soit  $F_1, \dots, F_c$  une suite régulière globale définissant  $Z$ , et posons  $Z_{c-1} = \{F_1 = \dots = F_{c-1} = 0\}$ . Par la proposition 2.1.3 (i), l'hypothèse de récurrence s'applique à  $Z_{c-1}$ . Comme, par la proposition 2.1.3 (ii),  $F_c$  n'est pas un diviseur de zéro sur  $Z_{c-1}$ , la multiplication par  $F_c$  induit une suite exacte courte de faisceaux sur  $Z_{c-1}$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Z_{c-1}}(d - d_c) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_{c-1}}(d) \rightarrow \mathcal{O}_{Z_c}(d) \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

En écrivant la suite exacte longue de cohomologie associée et en utilisant les annulations données par l'hypothèse de récurrence appliquée à  $Z_{c-1}$ , on obtient les annulations désirées.  $\square$

**Proposition 2.1.7.** *Soient  $Z$  une intersection complète sur le corps  $k$ , et  $F_1, \dots, F_c$  une suite régulière globale définissant  $Z$ .*

- (i) *Si  $d \in \mathbb{Z}$ , la flèche de restriction  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(d))$  est surjective.*
- (ii) *Son noyau, égal à  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d))$ , est constitué des polynômes homogènes de la forme  $\sum_i Q_i F_i$ ,  $Q_i \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d - d_i))$ .*
- (iii) *La dimension de ce noyau et le polynôme de Hilbert de  $Z$  ne dépendent que de  $N, c, d_1, \dots, d_c$  et  $d$ .*

**Preuve.** Que le noyau de cette flèche de restriction soit  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d))$  résulte de la suite longue de cohomologie associée à la suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$ .

On va montrer les autres assertions par récurrence sur  $c$ , le cas  $c = 0$  étant immédiat. Comme dans la preuve de la proposition 2.1.6, on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à  $Z_{c-1} = \{F_1 = \dots = F_{c-1} = 0\}$ , et on dispose toujours de la suite exacte courte (2.1).

Montrons (i). La suite exacte longue de cohomologie associée à (2.1) montre la surjectivité de  $H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d)) \rightarrow H^0(Z_c, \mathcal{O}(d))$ , car le  $H^1$  s'annule par la

proposition 2.1.6. On conclut car, par hypothèse de récurrence,  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d)) \rightarrow H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d))$  est surjective.

En particulier, on a une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(d)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(d)) \rightarrow 0.$$

Pour montrer que  $h^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d))$  ne dépend pas que de  $N, c, d_1, \dots, d_c$  et  $d$ , il suffit donc de montrer que c'est le cas de  $h^0(Z, \mathcal{O}_Z(d))$ . C'est une conséquence de la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d - d_c)) \rightarrow H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d)) \rightarrow H^0(Z_c, \mathcal{O}(d)) \rightarrow 0,$$

ainsi que de l'hypothèse de récurrence appliquée à  $Z_{c-1}$ . On a montré (iii).

Il reste à prouver (ii) en décrivant les polynômes homogènes inclus dans ce noyau. On procède par chasse au diagramme dans le diagramme commutatif ci-dessous où l'on a vu que la deuxième ligne est exacte, où les flèches verticales sont surjectives de noyau connu par hypothèse de récurrence appliquée à  $Z_{c-1}$  et où les flèches horizontales de gauche sont données par la multiplication par  $F_c$  :

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d - d_c)) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d)) & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 \rightarrow H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d - d_c)) & \rightarrow & H^0(Z_{c-1}, \mathcal{O}(d)) & \rightarrow & H^0(Z_c, \mathcal{O}(d)) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

□

### 2.1.4 Premières applications

Voici quelques conséquences des calculs de cohomologie cohérente effectués ci-dessus, qui seront utilisées dans la suite de ce texte :

**Proposition 2.1.8.** *Soient  $1 \leq r \leq s$ ,  $Z$  une intersection complète sur  $k$  et  $F_1, \dots, F_c$  une suite régulière globale définissant  $Z$ .*

*Alors :*

- (i) *Le sous-schéma  $Z$  est inclus dans une unique intersection complète  $X_{r-1}$  de degrés  $d_1, \dots, d_{\mu_{r-1}}$ . On a  $X_{r-1} = \{F_1 = \dots = F_{\mu_{r-1}} = 0\}$ .*
- (ii) *Le noyau de  $H^0(X_{r-1}, \mathcal{O}(\delta_r)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}(\delta_r))$  est de dimension  $m_r$  engendré par  $F_{\mu_{r-1}+1}, \dots, F_{\mu_r}$ .*

**Preuve.** (i) Le sous-schéma  $X_{r-1} = \{F_1 = \dots = F_{\mu_{r-1}} = 0\}$  est bien une intersection complète de degrés  $d_1, \dots, d_{\mu_{r-1}}$  par la proposition 2.1.3 (i). Réciproquement, si  $Z'$  est une intersection complète de degrés  $d_1, \dots, d_{\mu_{r-1}}$  contenant  $Z$ , ses équations sont nulles sur  $Z$ , donc, par la proposition 2.1.7 (ii), combinaisons à coefficients polynomiaux de  $F_1, \dots, F_{\mu_{r-1}}$ . Elles sont alors nulles sur  $X_{r-1}$ , et  $X_{r-1} \subset Z'$ . Comme, par la proposition 2.1.7 (iii), ces deux schémas ont même polynôme de Hilbert, ils coïncident.

- (ii) Par la proposition 2.1.7 (ii) appliquée à  $Z$  et  $X_{r-1}$ , on voit que les équations  $F_{\mu_{r-1}+1}, \dots, F_{\mu_r}$  engendrent ce noyau. Ils forment de plus une famille libre car s'ils étaient linéairement liés,  $\{F_1 = \dots = F_{\mu_r} = 0\}$  serait de codimension  $< \mu_r$  dans  $\mathbb{P}_k^N$ , contredisant la proposition 2.1.3 (i).  $\square$

**Proposition 2.1.9.** *Soit  $Z$  une intersection complète sur le corps  $k$ .*

- (i) *Le schéma  $Z$  est connexe. Si  $Z$  est régulier,  $Z$  est intègre.*  
(ii) *Le sous-schéma  $Z$  n'est schématiquement inclus dans aucun hyperplan de  $\mathbb{P}_k^N$ .*  
(iii) *Toute base de  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d_1))$  peut être complétée en une suite régulière globale définissant  $Z$ .*  
(iv) *Si  $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d))$  ne s'écrit pas  $\sum_i Q_i F_i$  où la somme porte sur les  $i$  tels que  $d_i < d$ ,  $F$  fait partie d'une suite régulière globale définissant  $Z$ .*

**Preuve.** (i) On applique la proposition 2.1.7 (ii) avec  $d = 0$ . On obtient  $H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = k$  :  $Z$  est bien connexe. Si  $Z$  est régulier et connexe,  $Z$  est intègre.

(ii) On applique la proposition 2.1.7 (ii) avec  $d = 1$  : la description explicite de  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(1))$  montre qu'il est nul, de sorte que  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(1)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(1))$  est injective, ce qu'on voulait.

(iii) On applique la proposition 2.1.7 (ii) avec  $d = d_1$  :  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d_1))$  est constitué des combinaisons linéaires à coefficients dans  $k$  des  $F_i$  qui sont de degré  $d_1$ . Si l'on remplace les  $F_i$  de degré  $d_1$  par une autre base de  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d_1))$ , on obtient une nouvelle collection de  $c$  équations définissant  $Z$ .

(iv) Par la proposition 2.1.7 (ii), on peut écrire  $F = \sum_i Q_i F_i$  et il existe  $i$  tel que  $d = d_i$  et  $Q_i$  est un scalaire non nul. Alors, en remplaçant  $F_i$  par  $F$ , on obtient on obtient une nouvelle collection de  $c$  équations définissant  $Z$ .  $\square$

**Proposition 2.1.10.** *Soient  $Y$  un schéma noethérien et  $Z \subset \mathbb{P}_Y^N$  un sous-schéma fermé tel que la projection  $f : Z \rightarrow Y$  soit plate et ait pour fibres des intersections complètes. Alors, pour tout  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $f_* \mathcal{O}(d)$  est localement libre et sa formation commute à tout changement de base.*

**Preuve.** Soit  $y \in Y$  ; on considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_y}^N, \mathcal{O}(d)) & \xrightarrow{\beta} & H^0(\mathbb{P}_y^N, \mathcal{O}(d)) \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ H^0(X_{\mathcal{O}_y}, \mathcal{O}(d)) & \xrightarrow{\gamma} & H^0(X_y, \mathcal{O}(d)). \end{array}$$

La flèche  $\alpha$  est surjective par la proposition 2.1.7 (i), et la flèche  $\beta$  est surjective par description explicite à l'aide de polynômes homogènes. Par conséquent, la flèche  $\gamma$  est surjective, et on peut appliquer la proposition 1.1.7.  $\square$

### 2.1.5 Changement du corps de base

On montre que la propriété d'être une intersection complète est indépendante du corps de base.

**Proposition 2.1.11.** *Soient  $k \subset K$  une extension de corps et  $Z \subset \mathbb{P}_k^N$  un sous-schéma fermé. Alors  $Z$  est une intersection complète si et seulement si  $Z_K$  est une intersection complète.*

**Preuve.** Si  $Z = \{F_1 = \dots = F_c = 0\}$ , on a  $Z_K = \{F_{1,K} = \dots = F_{c,K} = 0\}$ , de sorte que si  $Z$  est une intersection complète,  $Z_K$  est également une intersection complète.

Montrons la réciproque : supposons que  $Z_K$  est une intersection complète, et soit  $G_1, \dots, G_c$  une suite régulière globale la définissant. On va montrer par récurrence sur  $0 \leq r \leq c$  que, quitte à changer cette suite régulière globale, on peut supposer que, pour  $1 \leq i \leq r$ , il existe  $F_i \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d_i))$  tel que  $G_i = F_{i,K}$ . Quand  $r = 0$ , il n'y a rien à vérifier. Supposons le résultat démontré pour  $r$ . Notons  $Z_r = \{F_1 = \dots = F_r = 0\}$ , et considérons l'inclusion de  $k$ -espaces vectoriels suivante :

$$H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_{Z_r}(d_{r+1})) \subset H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d_{r+1})). \quad (2.2)$$

Étendant les scalaires à  $K$  et appliquant le théorème de changement de base plat pour identifier les deux termes, on obtient l'inclusion de  $K$ -espaces vectoriels suivante :

$$H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_{Z_{r,K}}(d_{r+1})) \subset H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_{Z_K}(d_{r+1})). \quad (2.3)$$

L'inclusion (2.3) est stricte car  $G_{r+1}$  appartient à  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_{Z_K}(d_{r+1}))$  mais pas à  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_{Z_{r,K}}(d_{r+1}))$ . On en déduit que l'inclusion (2.2) est stricte.

Soit alors  $F_{r+1} \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(d_{r+1}))$  n'appartenant pas à  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_{Z_r}(d_{r+1}))$ ; ainsi,  $F_{r+1,K}$  appartient à  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_{Z_K}(d_{r+1}))$  mais pas à  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_{Z_{r,K}}(d_{r+1}))$ . Comme  $F_{r+1,K} \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_{Z_K}(d_{r+1}))$ , par la proposition 2.1.7 (ii), on peut écrire :

$$F_{r+1,K} = \sum_{i=1}^c Q_i G_i,$$

avec  $Q_i \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_{r+1} - d_i))$ . Comme  $F_{r+1,K} \notin H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_{Z_{r,K}}(d_{r+1}))$ , il existe  $j \geq r+1$  tel que  $Q_j \neq 0$ . Cela implique en particulier que  $d_j = d_{r+1}$  : quitte à échanger  $G_j$  et  $G_{r+1}$ , on peut supposer que  $j = r+1$ . On construit alors une nouvelle suite régulière globale pour  $Z_K$  en remplaçant  $G_{r+1}$  par  $F_{r+1,K}$ . Cela conclut la récurrence.

Notons alors  $Z' = \{F_1 = \dots = F_c = 0\} \subset \mathbb{P}_k^N$  : on a  $Z \subset Z'$ . Par extension des scalaires à  $K$ , cette immersion fermée devient un isomorphisme. Par fidèle platitude de  $k \rightarrow K$ , cela implique que  $Z = Z'$ . Ainsi,  $Z$  est bien une intersection complète.  $\square$



### 2.1.6 Générisation

Enfin, les intersections complètes sont stables par générisation.

**Proposition 2.1.12.** *Soient  $T$  un trait (i.e. le spectre d'un anneau de valuation discrète) et  $Z \subset \mathbb{P}_T^N$  un sous-schéma fermé plat sur  $T$  dont la fibre spéciale est une intersection complète. Alors sa fibre générique est aussi une intersection complète.*

*De plus, toute équation de la fibre spéciale se relève en une équation de  $Z$ .*

**Preuve.** On note  $s = \text{Spec}(k)$  et  $\eta = \text{Spec}(K)$  le point spécial et le point générique de  $T$ , et  $\pi : \mathbb{P}_T^N \rightarrow T$  le morphisme structural.

Comme  $\mathbb{P}_T^N$  et  $Z$  sont plats sur  $T$ , la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_T^N} \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

montre que  $\mathcal{I}_Z$  est plat sur  $T$ . De plus, cette suite reste alors exacte après restriction à la fibre spéciale, de sorte que  $\mathcal{I}_Z|_{\mathbb{P}_k^N} = \mathcal{I}_{Z_s}$ .

Tensorisons (2.4) par  $\mathcal{O}(d)$  avec  $d \geq 0$ , restreignons-la à la fibre spéciale, et considérons la suite exacte longue de cohomologie associée. La surjectivité de  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d)) \rightarrow H^0(Z_s, \mathcal{O}(d))$  (proposition 2.1.7 (i)) ainsi que l'annulation de  $H^1(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$  montre que  $H^1(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_{Z_s}(d)) = 0$ .

Par semi-continuité ([28] III Th. 12.8), il vient  $H^1(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_{Z_\eta}(d)) = 0$ . On peut donc appliquer la proposition 1.1.5 pour montrer que  $\pi_*\mathcal{I}_Z(d)$  est un faisceau localement libre dont la formation commute à tout changement de base. Comme  $T$  est local, ce faisceau est même libre. Par conséquent, tout élément  $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_{Z_s}(d)) = (\pi_*\mathcal{I}_Z(d))_s$  se relève en un élément  $\tilde{F} \in H^0(\mathbb{P}_T^N, \mathcal{I}_Z(d))$ . Ceci montre la seconde partie de l'énoncé.

Soit alors  $F_1, \dots, F_c$  une suite régulière globale définissant  $Z_s$ . Relevons ces équations comme ci-dessus en  $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_c$  et notons  $Z' = \{\tilde{F}_1 = \dots = \tilde{F}_c = 0\}$ . On a  $Z \subset Z'$  et  $Z_s = Z'_s$ . Par semi-continuité de la dimension,  $Z'_\eta$  est bien une intersection complète définie par la suite régulière globale  $\tilde{F}_{1,\eta}, \dots, \tilde{F}_{c,\eta}$ . Par platitude, les polynômes de Hilbert de  $Z_s$  et  $Z'_\eta$  coïncident. Par la proposition 2.1.7 (iii), les polynômes de Hilbert de  $Z_s$  et  $Z'_\eta$  coïncident. On en déduit que les polynômes de Hilbert de  $Z_\eta$  et  $Z'_\eta$  coïncident, donc, vu l'inclusion, que  $Z_\eta = Z'_\eta$  :  $Z_\eta$  est bien une intersection complète.  $\square$

## 2.2 Schéma de Hilbert

On travaille à présent sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Ce schéma de base est souvent sous-entendu ; par exemple,  $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^N$ .

On note  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$  le schéma de Hilbert de  $\mathbb{P}^N$ . Si  $P$  est un polynôme,  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P \subset \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$  est le schéma de Hilbert associé au polynôme de Hilbert  $P$ .

Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau localement libre sur un schéma, le fibré vectoriel géométrique associé à  $\mathcal{F}$  est celui dont le faisceau des sections est  $\mathcal{F}^\vee$ . Par  $\mathbb{G}(r, \mathcal{F})$ , on désignera la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de rang  $r$  de ce fibré vectoriel géométrique. Quand  $r = 1$ , on notera aussi ce schéma  $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ .

Rappelons les conventions faites au début de ce chapitre. On a fixé  $N \geq 2$ ,  $0 \leq c \leq N - 1$  et  $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$  des entiers. En l'absence d'indication contraire, une intersection complète sur un corps  $k$  est toujours de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}_k^N$  et de degrés  $d_1, \dots, d_c$ . On a de plus défini  $\delta_1 < \dots < \delta_s$  comme étant les entiers distincts apparaissant parmi les  $d_j$ ,  $m_i$  le nombre de  $d_j$  égaux à  $\delta_i$  et  $\mu_i = m_1 + \dots + m_i$ .

### 2.2.1 Définition

Soit  $F$  le foncteur contravariant de la catégorie des schémas dans la catégorie des ensembles qui à un schéma  $B$  associe l'ensemble :

$$F(B) = \left\{ \begin{array}{l} \text{sous-schémas fermés } Z \subset \mathbb{P}^N \times B \\ \text{tels que la projection } pr_B : Z \rightarrow B \text{ soit plate} \\ \text{et ait pour fibres des intersections complètes} \end{array} \right\}$$

et qui à un morphisme de schémas associe l'application donnée par le produit fibré.

Le résultat principal de cette partie est :

**Proposition 2.2.1.** *Le foncteur  $F$  est représentable par un ouvert de  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$  qui est intègre et lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , et dont une construction géométrique explicite est donnée au paragraphe 2.2.2.*

Les trois paragraphes qui suivent sont consacrés à la preuve de cette proposition.

On notera  $H^{ic}$  le schéma qui représente  $F$  : c'est le schéma de Hilbert des intersections complètes. On considérera aussi le sous-schéma ouvert  $H$  de  $H^{ic}$  paramétrant les intersections complètes lisses : c'est le schéma de Hilbert des intersections complètes lisses. On notera  $pr : \mathcal{X}^{ic} \rightarrow H^{ic}$  et  $pr : \mathcal{X} \rightarrow H$  leurs familles universelles respectives.

### 2.2.2 Une construction explicite

Dans ce paragraphe, on va construire explicitement un schéma  $H^{ic}$  dont on montrera plus tard qu'il représente le foncteur  $F$ .

On construit par récurrence sur  $0 \leq r \leq s$  un schéma  $H_r$  intègre et lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  et un sous-schéma fermé  $\mathcal{X}_r$  de  $\mathbb{P}^N \times H_r$  tel que le morphisme naturel  $pr_r : \mathcal{X}_r \rightarrow H_r$  soit plat et ait pour fibres des intersections complètes définies par  $m_1$  équations de degré  $\delta_1, \dots, m_r$  équations de degré  $\delta_r$ .

Pour initialiser, on pose  $H_0 = \text{Spec}(\mathbb{Z})$  et  $\mathcal{X}_0 = \mathbb{P}^N$ . Supposons  $H_{r-1}$  et  $\mathcal{X}_{r-1}$  construits. Par la proposition 2.1.10,  $\mathcal{E}_r = pr_{r-1,*} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{r-1}}(\delta_r)$  est un fibré vectoriel dont la formation commute au changement de base. En particulier, si  $x \in H_{r-1}$ ,  $\mathcal{E}_{r,x} = H^0(\mathcal{X}_{r-1,x}, \mathcal{O}(\delta_r))$ . On note  $K_r = \mathbb{G}(m_r, \mathcal{E}_r^\vee)$  et  $\pi_r : K_r \rightarrow H_{r-1}$  la projection. On utilise alors les notations du diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_r^* \mathcal{X}_{r-1} & \longrightarrow & \mathcal{X}_{r-1} \\
\downarrow pr_r & & \downarrow pr_{r-1} \\
K_r & \xrightarrow{\pi_r} & H_{r-1}.
\end{array}$$

Considérons l'injection du faisceau tautologique  $\mathcal{F}_r \rightarrow \pi_r^* \mathcal{E}_r$  sur le fibré en grassmanniennes  $K_r$ . Par changement de base par le morphisme  $\pi_r$ , cette injection se réécrit  $\mathcal{F}_r \rightarrow pr_{r,*} \mathcal{O}_{\pi_r^* \mathcal{X}_{r-1}}(\delta_r)$ . Tirant en arrière sur  $\pi_r^* \mathcal{X}_{r-1}$  et utilisant l'adjonction, on obtient un morphisme de fibré vectoriel  $pr_r^* \mathcal{F}_r \rightarrow \mathcal{O}_{\pi_r^* \mathcal{X}_{r-1}}(\delta_r)$ . Le lieu des zéros de ce morphisme est un sous-schéma fermé de  $\pi_r^* \mathcal{X}_{r-1}$  qu'on note  $\mathcal{Z}_r$ .

Soient  $k$  un corps,  $y \in H_r(k)$  et  $x = \pi_r(y)$ . Notons  $V$  le sous-espace vectoriel de dimension  $m_r$  de  $\mathcal{E}_{r,x} = H^0(\mathcal{X}_{r-1,x}, \mathcal{O}(\delta_r))$  auquel  $y$  correspond. Alors, par construction,  $\mathcal{Z}_{r,y}$  s'identifie au sous-schéma de  $\mathcal{X}_{r-1,x}$  défini par les équations  $\{F = 0\}_{F \in V}$ . En particulier,  $\mathcal{Z}_{r,y}$  est de codimension au plus  $m_r$  dans  $\mathcal{X}_{r-1,x}$ .

Notons  $H_r$  l'ouvert de  $K_r$  constitué des points  $y$  tels que la dimension de  $\mathcal{Z}_{r,y}$  soit minimale. Vu la discussion ci-dessus, c'est exactement le lieu où  $\mathcal{Z}_{r,y}$  est une intersection complète définie par  $m_1$  équations de degré  $\delta_1, \dots, m_r$  équations de degré  $\delta_r$ . On note  $\mathcal{X}_r$  l'image réciproque de  $H_r$  dans  $\mathcal{Z}_r$ .

Le schéma  $H_r$  est intègre et lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  comme ouvert d'un fibré en grassmanniennes sur  $H_{r-1}$ . La platitude de  $\pi_r : \mathcal{X}_r \rightarrow H_r$  est conséquence du critère de platitude [28] III Theorem 9.9, dont les hypothèses sont vérifiées par la proposition 2.1.7 (iii).

Cela conclut la récurrence. On note finalement  $H^{ic} = H_s$ ,  $\mathcal{X}^{ic} = \mathcal{X}_s$ , et  $pr = pr_s$ .

### 2.2.3 Représentabilité du foncteur

On va montrer dans ce paragraphe que  $F$  est représentable par un ouvert  $U$  du schéma de Hilbert de  $\mathbb{P}^N$ .

On commence par montrer un lemme. La famille  $pr : \mathcal{X}^{ic} \rightarrow H^{ic}$  induit un morphisme de foncteurs  $\Phi : H^{ic} \rightarrow F$ . Ce morphisme vérifie :

**Lemme 2.2.2.** *Pour tout corps  $k$ ,  $\Phi(k) : H^{ic}(k) \rightarrow F(k)$  est une bijection.*

**Preuve.** Soit  $k$  un corps. La construction du paragraphe précédent montre qu'un  $k$ -point de  $H^{ic}$  est la donnée, pour  $0 \leq r \leq s$  d'une intersection complète  $X_r$  de degrés  $d_1, \dots, d_{\mu_r}$  dans  $\mathbb{P}_k^N$  et, pour  $1 \leq r \leq s$  d'un sous-espace vectoriel de dimension  $m_r$  de  $H^0(X_{r-1}, \mathcal{O}(\delta_r))$  noté  $V_r$  tel que  $X_r$  soit le lieu des zéros dans  $X_{r-1}$  des éléments de  $V_r$ . L'application  $\Phi(k)$  associe à cet élément de  $H^{ic}(k)$  l'intersection complète  $Z = X_s$ .

Montrons que  $\Phi(k)$  est injective ; soit pour cela  $Z$  une intersection complète sur  $k$ . Par la proposition 2.1.8 (i), les sous-schémas  $X_r$  de  $Z$  sont uniquement déterminés. Enfin,  $V_r$  doit être inclus dans le noyau de  $H^0(X_{r-1}, \mathcal{O}(\delta_r)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}(\delta_r))$ . Par la proposition 2.1.8 (ii),  $V_r$  est nécessairement égal à ce noyau. L'intersection complète  $Z$  a donc bien au plus un antécédent par  $\Phi(k)$ .

Montrons que  $\Phi(k)$  est de plus surjective : soient  $Z$  une intersection complète sur  $k$  et  $F_1, \dots, F_c$  une suite régulière globale la définissant. On choisit  $X_r = \{F_1 = \dots = F_{\mu_r} = 0\}$  : c'est une intersection complète de degrés convenables par la proposition 2.1.3 (i). On prend alors  $V_r = \langle F_{\mu_{r-1}+1}, \dots, F_{\mu_r} \rangle$ . Le sous-schéma  $Z_r$  de  $Z_{r-1}$  est bien défini par l'annulation dans  $Z_{r-1}$  des éléments de  $V_r$ , et  $V_r$  est de dimension  $m_r$  car si  $F_{\mu_{r-1}+1}, \dots, F_{\mu_r}$  étaient linéairement liés dans  $H^0(X_{r-1}, \mathcal{O}(\delta_r))$ ,  $X_r$  serait de codimension  $< m_r$  dans  $X_{r-1}$ .  $\square$

Par la proposition 2.1.7 (iii), toutes les intersections complètes ont même polynôme de Hilbert  $P$ . On dispose d'un monomorphisme de foncteurs évident  $i : F \rightarrow \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ .

Notons  $U$  l'ensemble des  $x \in \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$  tels que le sous-schéma de  $\mathbb{P}_{\kappa(x)}^N$  qui lui correspond soit une intersection complète sur  $\kappa(x)$ .

**Lemme 2.2.3.** *Le sous-ensemble  $U$  de  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$  est ouvert.*

**Preuve.** On va appliquer le critère [21] 0.9.2.5 : il faut montrer que  $U$  est constructible et stable par générisation.

Soient  $x, y \in \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$  tels que  $y \in \overline{\{x\}}$  et  $y \in U$ . Par [20] 7.1.9, il existe un trait  $T$  de point fermé  $s$  et de point générique  $\eta$  ainsi qu'un morphisme  $f : T \rightarrow \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$  tel que  $f(s) = y$  et  $f(\eta) = x$ . En tirant en arrière sur  $T$  la famille universelle de  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ , on obtient un sous-schéma  $Z \subset \mathbb{P}^N \times T$  plat sur  $T$ . Comme  $y \in U$ , on peut lui appliquer la proposition 2.1.12 :  $Z_\eta$  est une intersection complète. Comme  $Z_\eta$  est obtenu par extension des scalaires à partir du sous-schéma de  $\mathbb{P}_{\kappa(x)}^N$  associé à  $x$ , la proposition 2.1.11 montre que  $x \in U$ . On a montré que  $U$  est stable par générisation.

Considérons le morphisme de foncteurs  $i \circ \Phi : H^{ic} \rightarrow \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$  ; c'est un morphisme de schémas. Si  $x \in U$ , la surjectivité dans le lemme 2.2.2 montre que  $x$  est dans l'image de  $i \circ \Phi$ . Réciproquement, soit  $x$  un point de l'image de  $i \circ \Phi$  et  $y$  un antécédent de  $x$ . Alors  $\mathcal{X}_y^{ic}$  est obtenu par extension des scalaires à partir du sous-schéma de  $\mathbb{P}_{\kappa(x)}^N$  associé à  $x$ . Par le lemme 2.1.11, cela montre  $x \in U$ . Ainsi,  $U$  est l'image ensembliste de  $i \circ \Phi$ . Par le théorème de Chevalley,  $U$  est donc constructible. Cela conclut.  $\square$

On considère maintenant  $U$  comme un sous-schéma ouvert de  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ .

**Proposition 2.2.4.** *Le foncteur  $F$  est représentable par  $U$ .*

**Preuve.** Par la proposition 2.1.11, le morphisme de foncteurs  $i$  factorise en  $i : F \rightarrow U$ . La définition du morphisme de foncteurs  $i$  montre que c'est un monomorphisme. Il est immédiat que  $i : F \rightarrow U$  est un épimorphisme. Par conséquent,  $i : F \rightarrow U$  est un isomorphisme de foncteurs :  $F$  est bien représentable par  $U$ .  $\square$

## 2.2.4 Identification du schéma de Hilbert

On peut enfin montrer que  $H^{ic}$  représente le foncteur  $F$ .

**Proposition 2.2.5.** *Le morphisme  $\Phi : H^{ic} \rightarrow U$  induit par la famille  $pr : \mathcal{X}^{ic} \rightarrow H^{ic}$  est un isomorphisme.*

**Preuve.** On commence par construire un morphisme  $\Psi : U \rightarrow H^{ic}$  qui s'avèrera être l'inverse de  $\Phi$ . Pour cela, on note  $pr_U : \mathcal{X} \rightarrow U$  la famille universelle, on conserve les notations du paragraphe 2.2.2, et on construit par récurrence sur  $0 \leq r \leq s$  un morphisme  $\Psi_r : U \rightarrow H_r$  tel que  $\mathcal{X} \subset \Psi_r^* \mathcal{X}_r$  comme sous-schémas fermés de  $\mathbb{P}^N \times U$ .

Pour initialiser, on prend pour  $\Psi_0 : U \rightarrow H_0 = \text{Spec}(\mathbb{Z})$  le morphisme structurel. Supposons  $\Psi_{r-1}$  construit. La proposition 2.1.10 montre que les faisceaux  $pr_{U,*} \mathcal{O}_{\Psi_{r-1}^* \mathcal{X}_{r-1}}(\delta_r)$  et  $pr_{U,*} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\delta_r)$  sont des fibrés vectoriels sur  $U$  dont la formation commute au changement de base. La proposition 2.1.8 montre que, pour  $u \in U$ , la restriction  $H^0((\Psi_{r-1}^* \mathcal{X}_{r-1})_u, \mathcal{O}(\delta_r)) \rightarrow H^0(\mathcal{X}_u, \mathcal{O}(\delta_r))$  est surjective de noyau de dimension  $m_r$ . Par conséquent, le morphisme de fibrés vectoriels  $pr_{U,*} \mathcal{O}_{\Psi_{r-1}^* \mathcal{X}_{r-1}}(\delta_r) \rightarrow pr_{U,*} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\delta_r)$  est surjectif et a pour noyau un fibré vectoriel  $N$  de rang  $m_r$ . Par définition de la grassmannienne, cela induit un morphisme  $\Psi_r : U \rightarrow K_r$ . Soit  $F_1, \dots, F_c$  une suite régulière globale définissant  $\mathcal{X}_u$ . Par la proposition 2.1.8,  $(\Psi_{r-1}^* \mathcal{X}_{r-1})_u = \{F_1 = \dots = F_{\mu_{r-1}} = 0\}$ , et  $N_u$  est engendré par  $F_{\mu_{r-1}+1}, \dots, F_{\mu_r}$ . Par conséquent,  $(\Psi_{r-1}^* \mathcal{Z}_r)_u = \{F_1 = \dots = F_{\mu_r} = 0\}$ . Par le lemme 2.1.3 (i), c'est une intersection complète. Cela montre que  $\Psi_r$  factorise en  $\Psi_r : U \rightarrow H_r$ . Par construction, on a bien  $\mathcal{X} \subset \Psi_r^* \mathcal{X}_r$ , ce qui achève la récurrence. On pose  $\Psi = \Psi_s$ .

On va vérifier que  $\Psi$  est un inverse de  $\Phi$ . On commence par montrer que  $\Phi \circ \Psi : U \rightarrow U$  est l'identité, i.e. que  $\Phi \circ \Psi$  et  $\text{Id}$  coïncident comme éléments de  $U(U)$ . Au vu du foncteur que  $U$  représente, il suffit de vérifier que les deux sous-schémas  $\mathcal{X}$  et  $\Psi^* \mathcal{X}^{ic}$  de  $\mathbb{P}^N \times U$  coïncident. Par construction, on connaît l'inclusion  $\mathcal{X} \subset \Psi^* \mathcal{X}^{ic}$ ; on note alors  $\mathcal{N}$  le faisceau d'idéaux définissant  $\mathcal{X}$  dans  $\Psi^* \mathcal{X}^{ic}$ , de sorte qu'on a une suite exacte courte de faisceaux sur  $\mathbb{P}^N \times U$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O}_{\Psi^* \mathcal{X}^{ic}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow 0.$$

Par platitude de  $\mathcal{X}$  sur  $U$ , le faisceau de droite est plat sur  $U$ , de sorte que par changement de base à un point  $u \in U$ , on obtient la suite exacte courte de faisceaux sur  $\mathbb{P}_u^N$  suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_u \rightarrow \mathcal{O}_{(\Psi^* \mathcal{X}^{ic})_u} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}_u} \rightarrow 0.$$

Par la proposition 2.1.7 (iii), les deux faisceaux de droite ont même polynôme de Hilbert. Par additivité de celui-ci, le polynôme de Hilbert de  $\mathcal{N}_u$  est nul, donc  $\mathcal{N}_u = 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $u \in U$ , le lemme de Nakayama montre que  $\mathcal{N} = 0$ . On a donc  $\Psi^* \mathcal{X}^{ic} = \mathcal{X}$ , comme voulu.

Soit  $k$  un corps. Comme  $\Phi \circ \Psi = \text{Id}$  et que, par le lemme 2.2.2,  $\Phi(k)$  est une bijection,  $\Psi(k)$  est la réciproque de  $\Phi(k)$ . Ainsi,  $\Psi \circ \Phi$  induit l'identité sur les  $k$ -points pour tout corps  $k$ . Les deux morphismes de schémas  $\Psi \circ \Phi : H^{ic} \rightarrow H^{ic}$  et  $\text{Id} : H^{ic} \rightarrow H^{ic}$  induisent donc les mêmes applications sur les  $k$ -points pour tout corps  $k$ . Comme  $H^{ic}$  est réduit (car lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ ), ces deux morphismes coïncident par le lemme 2.2.6.

On a montré que  $\Psi$  est l'inverse de  $\Phi$ , de sorte que  $\Phi$  est un isomorphisme.  $\square$

On a utilisé le lemme suivant :

**Lemme 2.2.6.** *Soient  $f, g : X \rightarrow Y$  deux morphismes de schémas avec  $X$  réduit. Si  $f$  et  $g$  induisent les mêmes applications entre  $X(k)$  et  $Y(k)$  pour tout corps  $k$ ,  $f$  et  $g$  coïncident.*

**Preuve.** En appliquant l'hypothèse aux corps résiduels des points de  $X$ , on montre que  $f$  et  $g$  coïncident ensemblistement. Pour montrer que les morphismes  $f$  et  $g$  coïncident, il reste à vérifier qu'ils induisent la même application entre les faisceaux structurels.

Pour cela, soit  $U = \text{Spec}(A)$  un ouvert affine de  $Y$ . Comme  $f$  et  $g$  coïncident ensemblistement,  $f^{-1}(U) = g^{-1}(U)$ . On choisit  $V = \text{Spec}(B)$  un ouvert affine inclus dans cette image réciproque. Soit  $\alpha \in A$  une fonction sur  $U$ . Par hypothèse,  $\beta = f^*\alpha - g^*\alpha \in B$  a image nulle dans tous les corps résiduels de tous les points de  $V$ , i.e.  $\beta$  est inclus dans tous les idéaux premiers de  $B$ . Cela signifie que  $\beta$  est nilpotent, donc nul car  $X$  est réduit, et permet de conclure.  $\square$

### 2.2.5 Application au changement de base

On peut maintenant éliminer l'hypothèse noethérienne dans la proposition 2.1.10.

**Proposition 2.2.7.** *Soient  $Y$  un schéma et  $Z \subset \mathbb{P}_Y^N$  un sous-schéma fermé tel que la projection  $f : Z \rightarrow Y$  soit plate et ait pour fibres des intersections complètes. Alors, pour tout  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $f_*\mathcal{O}(d)$  est localement libre et sa formation commute à tout changement de base.*

**Preuve.** La famille  $Z \rightarrow Y$  induit un morphisme  $g : Y \rightarrow H^{ic}$  tel que  $Z$  soit le tiré en arrière par  $g$  de la famille universelle  $\mathcal{X}^{ic} \rightarrow H^{ic}$ . On peut appliquer la proposition 2.1.10 au morphisme  $pr : \mathcal{X}^{ic} \rightarrow H^{ic}$  car  $H^{ic}$  est noethérien :  $pr_*\mathcal{O}(d)$  est localement libre et sa formation commute à tout changement de base. On conclut alors en utilisant la proposition 1.1.2.  $\square$

On en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 2.2.8.** *Soient  $Y$  un schéma et  $Z \subset \mathbb{P}_Y^N$  un sous-schéma fermé tel que la projection  $f : Z \rightarrow Y$  soit plate et ait pour fibres des intersections complètes. Alors l'application  $\text{Pic}_{Z/Y}(Y) \rightarrow \text{Pic}_{(Z/Y)_{(\text{fppf})}}(Y)$  est injective.*

**Preuve.** On va appliquer [16] Theorem 9.2.5. Il faut vérifier que le morphisme naturel  $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_Z$  est universellement un isomorphisme. On montre que c'est un isomorphisme ; l'argument fonctionne encore après tout changement de base. Pour cela, notons  $\mathcal{Q}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ) son conoyau (resp. son noyau).

Par la proposition 2.2.7, la formation de  $f_*\mathcal{O}_Z$  commute à tout changement de base. Ainsi, par exactitude à droite du produit tensoriel, pour tout  $y \in Y$ , on a la suite exacte :

$$\kappa(y) \rightarrow H^0(Z_y, \mathcal{O}_y) \rightarrow \mathcal{Q}_y \rightarrow 0.$$

Par la proposition 2.1.7 pour  $d = 0$ ,  $\kappa(y) \rightarrow H^0(Z_y, \mathcal{O}_y)$  est un isomorphisme, de sorte que  $\mathcal{Q}_y = 0$ . Par le lemme de Nakayama,  $\mathcal{Q} = 0$ .

Par la proposition 2.2.7,  $f_*\mathcal{O}_Z$  est localement libre, donc plat. Ainsi, pour tout  $y \in Y$ , on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_y \rightarrow \kappa(y) \rightarrow H^0(Z_y, \mathcal{O}_y) \rightarrow 0.$$

Utilisant à nouveau que  $\kappa(y) \rightarrow H^0(Z_y, \mathcal{O}_y)$  est un isomorphisme, on en déduit  $\mathcal{N}_y = 0$ . Le lemme de Nakayama s'applique à nouveau ( $\mathcal{N}$  est localement libre comme noyau d'une surjection de faisceaux localement libres, donc de type fini) et montre que  $\mathcal{N} = 0$ . Cela conclut.  $\square$

## 2.3 Champ de modules

Dans cette partie, on définit le champ de modules  $\mathcal{M}$  des intersections complètes polarisées par  $\mathcal{O}(1)$ , puis on calcule son foncteur des points.

Dans la plus grande partie de ce texte, notamment pour la preuve des théorèmes 3.1.1, 4.4.1, 5.1.1 et 5.1.2, c'est la définition de  $\mathcal{M}$  comme quotient, donnée au paragraphe 2.3.1, que l'on utilisera. Il est cependant utile de décrire ce champ comme catégorie fibrée en groupoïdes sur (Sch), i.e. de calculer son foncteur des points. En effet, cela permet de donner un sens géométrique à  $\mathcal{M}$ , qui justifie l'appellation « champ de modules des intersections complètes lisses polarisées par  $\mathcal{O}(1)$  ». D'autre part, c'est cette description concrète qu'on utilisera au chapitre 6 pour comparer, dans des cas particuliers,  $\mathcal{M}$  à des champs de modules classiques.

### 2.3.1 Définition du champ de modules

Le schéma en groupes  $PGL_{N+1}$  est lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , et agit sur  $\mathbb{P}^N$  par changement de coordonnées. Cette action induit une action à gauche sur son schéma de Hilbert  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$ . L'ouvert  $H^{ic}$  paramétrant les intersections complètes est stable par cette action. On est dans le cadre de la partie 1.3 : on note  $\mathcal{M}^{ic} = [PGL_{N+1} \backslash H^{ic}]$  le champ quotient. C'est le champ de modules des intersections complètes polarisées par  $\mathcal{O}(1)$ . Comme  $H^{ic}$  est lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , par la proposition 1.3.1,  $\mathcal{M}^{ic}$  est lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ .

De même, l'ouvert  $H$  paramétrant les intersections complètes lisses est stable par cette action. On note  $\mathcal{M} = [PGL_{N+1} \backslash H]$  le champ quotient. C'est un sous-champ ouvert de  $\mathcal{M}^{ic}$  : le champ de modules des intersections complètes lisses polarisées par  $\mathcal{O}(1)$ .

### 2.3.2 Calcul du foncteur des points

On note (Sch) la catégorie des schémas.

Soit  $\mathcal{C}^{ic}$  la catégorie fibrée en groupoïdes sur (Sch) définie comme suit. Si  $T$

est un schéma, la catégorie  $\mathcal{C}^{ic}(T)$  a pour objets :

$$\mathcal{C}^{ic}(T) = \left\{ \begin{array}{l} \text{morphisms de schémas } p : X \rightarrow T \text{ propres, plats} \\ \text{et de présentation finie munis de } \lambda \in \text{Pic}_{(X/T)(\text{fppf})}(T) \\ \text{tels qu'il existe un recouvrement fppf } U \rightarrow T \text{ tel que} \\ \lambda_U \text{ soit représenté par un fibré en droites } \mathcal{L} \text{ sur } X_U, \\ \text{que les fibres géométriques de } (X_U, \mathcal{L}) \text{ soient iso-} \\ \text{morphes à des intersections complètes munies de } \mathcal{O}(1) \\ \text{et que } p_{U,*}\mathcal{L} \text{ soit un faisceau localement libre} \\ \text{dont la formation commute à tout changement de base} \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

et une flèche  $X' \rightarrow X$  au-dessus du morphisme de schémas  $T' \rightarrow T$  est un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ T' & \longrightarrow & T \end{array}$$

respectant les polarisations.

**Proposition 2.3.1.** *Les catégories fibrées en groupoïdes  $\mathcal{M}^{ic}$  et  $\mathcal{C}^{ic}$  sont équivalentes.*

**Preuve.** On commence par construire un foncteur  $\Phi : \mathcal{C}^{ic} \rightarrow \mathcal{M}^{ic}$ . Pour cela, soit  $x = (p : X \rightarrow T, \lambda)$  un élément de  $\mathcal{C}^{ic}(T)$ ; on choisit  $U$  comme en (2.5). Quitte à remplacer  $U$  par un recouvrement Zariski, on peut supposer que  $p_{U,*}\mathcal{L}$  est même libre. On va construire  $\Phi(x) \in \mathcal{M}^{ic}(T)$  par descente. Par le lemme 1.1.8,  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $p_U$ , donc le choix d'une trivialisations de  $p_{U,*}\mathcal{L}$  induit une immersion fermée  $X_U \rightarrow \mathbb{P}_U^N$ , donc un morphisme  $f : U \rightarrow H_U^{ic}$ . On note alors  $P_U = PGL_{N+1,U}$  le  $PGL_{N+1,U}$ -torseur trivial. Le morphisme  $f$  et l'action de  $PGL_{N+1,U}$  induisent un morphisme  $PGL_{N+1,U}$ -équivariant  $\sigma_U : P_U \rightarrow H_U^{ic}$ . Il reste à construire une donnée de descente. Pour cela, on note  $V = U \times_T U$  et  $q_1, q_2 : V \rightarrow U$  les deux projections. Par le corollaire 2.2.8, comme  $q_1^*\mathcal{L}$  et  $q_2^*\mathcal{L}$  coïncident dans  $\text{Pic}_{(X_V/V)(\text{fppf})}(V)$ , ils coïncident aussi dans  $\text{Pic}_{X_V/V}(V)$ . Par conséquent, les deux immersions fermées :  $q_1^*X_U \rightarrow \mathbb{P}_V^N$  et  $q_2^*X_U \rightarrow \mathbb{P}_V^N$  correspondent à des trivialisations différentes de  $p_{V,*}q_1^*\mathcal{L} \simeq p_{V,*}q_2^*\mathcal{L}$ . Il existe donc un élément  $g \in PGL_{N+1,V}$  induisant un isomorphisme  $g : q_1^*X_U \rightarrow q_2^*X_U$ . On vérifie aisément la condition de cocycle, de sorte que la multiplication par  $g$  induit une donnée de descente  $P_U \rightarrow P_U$ . Le toseur  $P_U$  descend donc en un  $PGL_{N+1,T}$ -torseur  $P$  sur  $T$ . La commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} P_V & \xrightarrow{g} & P_V \\ \downarrow q_2^*\sigma_U & & \downarrow q_1^*\sigma_U \\ H_V^{ic} & \xrightarrow{\text{Id}} & H_V^{ic} \end{array}$$

montre que  $\sigma_U$  descend également, en un morphisme  $PGL_{N+1}$ -équivariant  $\sigma : P \rightarrow H_T^{ic}$ . On a ainsi défini un élément de  $\Phi(x) \in \mathcal{M}^{ic}(T)$ , dont on vérifie qu'il ne dépend pas des choix faits.



Définissons de manière analogue (i.e. par descente) l'image d'une flèche par  $\Phi$ . Soient pour cela  $T' \rightarrow T$  un morphisme de schémas,  $x = (p : X \rightarrow T, \lambda) \in \mathcal{C}^{ic}(T)$  et  $x' = (p' : X' \rightarrow T', \lambda') \in \mathcal{C}^{ic}(T')$  comme en (2.5). Soit  $\alpha \in \text{Hom}(x', x)$  : c'est un morphisme  $\alpha : X' \rightarrow X$  rendant le diagramme naturel cartésien et respectant les polarisations. Soit  $U$  comme ci-dessus et notons  $U' = U \times_T T'$ . Le fibré en droites  $\mathcal{L}' = \alpha_U^* \mathcal{L}$  représente  $\lambda'$ , et  $p_{U',*} \mathcal{L}'$  est libre de formation compatible à tout changement de base. On peut alors appliquer la construction ci-dessus sur  $U$  d'une part, et sur  $U'$  d'autre part. On obtient des données de descente sur  $P_U = PGL_{N+1,U}$  et  $P_{U'} = PGL_{N+1,U'}$ , et des morphismes équivariants les respectant  $\sigma_U : P_U \rightarrow H_U^{ic}$  et  $\sigma_{U'} : P_{U'} \rightarrow H_{U'}^{ic}$ . On vérifie que la projection naturelle  $\beta_U : P_{U'} \rightarrow P_U$  respecte les données de descente et les morphismes équivariants, de sorte qu'elle descend en un morphisme  $\beta : P' \rightarrow P$ . On vérifie que ce morphisme est un élément de  $\text{Hom}(\Phi(x'), \Phi(x))$  ne dépendant pas des choix faits : c'est  $\Phi(\alpha)$ .

Construisons à présent un foncteur  $\Psi : \mathcal{M}^{ic} \rightarrow \mathcal{C}^{ic}$ . On laissera le lecteur vérifier que c'est un inverse de  $\Phi$ , de sorte que  $\mathcal{M}^{ic}$  et  $\mathcal{C}^{ic}$  sont bien équivalentes. Pour cela, soit  $y = (\sigma : P \rightarrow H_T^{ic})$  un élément de  $\mathcal{M}^{ic}(T)$  comme en (1.1) : on va construire  $\Psi(y)$ . Le groupe  $PGL_{N+1,T}$  agit sur la famille universelle  $\mathcal{X}_T^{ic} \subset \mathbb{P}_T^N \times H_T^{ic}$ . Il agit donc également diagonalement sur  $\mathcal{X}_P = \sigma^* \mathcal{X}_T^{ic}$ . De plus le fibré  $\mathcal{O}(N+1)$  est naturellement linéarisé. Par descente le long du torseur  $P$  (voir [16] 4.3.3 et 4.4.1), on obtient un morphisme projectif  $p : X \rightarrow T$ . Le fibré  $\mathcal{O}(1)$  sur  $\mathcal{X}_P$  représente une classe  $\lambda \in \text{Pic}_{(X/T)(\text{fppf})}(T)$ . On vérifie que  $x = (p : X \rightarrow T, \lambda)$  est un élément de  $\mathcal{C}^{ic}(T)$  comme en (2.5) ; on peut prendre  $U = P$  : la propriété de liberté locale et de commutation à tout changement de base est conséquence de la proposition 2.2.7. On pose alors  $\Psi(y) = x$ .

On définit de manière analogue l'image d'une flèche par  $\Psi$  : soient pour cela  $T' \rightarrow T$  un morphisme de schémas,  $y = (\sigma : P \rightarrow H_T^{ic}) \in \mathcal{M}^{ic}(T)$  et  $y' = (\sigma' : P' \rightarrow H_{T'}^{ic}) \in \mathcal{M}^{ic}(T')$  comme en (1.1). Soit  $\beta \in \text{Hom}(y', y)$  : c'est un morphisme équivariant  $\beta : P' \rightarrow P$  rendant le diagramme naturel cartésien et respectant les morphismes équivariants. Le morphisme  $\beta$  induit un morphisme équivariant  $\gamma : \mathcal{X}_{P'} \rightarrow \mathcal{X}_P$ , tel que  $\gamma^* \mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}(1)$ , et que  $\gamma^* \mathcal{O}(N+1) \simeq \mathcal{O}(N+1)$  comme fibrés en droites linéarisés. Le morphisme  $\gamma$  descend donc en  $\alpha : X' \rightarrow X$  rendant le diagramme naturel cartésien et respectant les polarisations. On pose  $\Psi(\beta) = \alpha$ .  $\square$

*Remarque 2.3.2.* On en déduit une description du foncteur des points de  $\mathcal{M}$  : il suffit de modifier (2.5) en demandant que le morphisme  $p$  soit lisse.

*Remarque 2.3.3.* Remarquons que, si  $n > 1$ , on peut appliquer les propositions 1.1.5 et 2.1.6 pour montrer que la condition selon laquelle  $p_{U,*} \mathcal{L}$  est localement libre de formation commutant à tout changement de base est automatiquement vérifiée. En revanche, en général, cette condition est indispensable si  $n = 1$ . En effet, c'est cette condition qui permet de munir  $\mathcal{M}^{ic}$  d'une structure nilpotente naturelle (en l'occurrence, la structure réduite car  $\mathcal{M}$  est lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ ).

*Remarque 2.3.4.* Si  $n > 1$  et si ce ne sont pas des surfaces K3, la famille des intersections complètes lisses est une famille complète de variétés abstraites (voir par exemple [8]).



# Chapitre 3

## Séparation

### 3.1 Introduction

#### 3.1.1 Notations

Dans tout ce chapitre, on fixe  $N \geq 2$ ,  $1 \leq c \leq N - 1$  et  $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$  des entiers. En l'absence d'indication contraire, une intersection complète sur un corps  $k$  sera toujours de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}_k^N$  et de degrés  $d_1, \dots, d_c$ . On notera  $n = N - c \geq 1$  la dimension de ces intersections complètes.

Un trait  $T$  est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Si  $T$  est un trait, on notera toujours  $\eta$  son point générique et  $s$  son point spécial,  $R$  l'anneau de valuation discrète dont il est le spectre,  $K$  le corps de fractions de  $R$ ,  $k$  son corps résiduel,  $t$  une uniformisante,  $v$  la valuation et  $\pi : R \rightarrow k$  la spécialisation.

#### 3.1.2 Séparation du champ de modules

On note  $H$  le schéma de Hilbert des intersections complètes lisses construit dans la partie 2.2. On rappelle (voir la partie 2.3) que le schéma en groupes  $G = PGL_{N+1}$  agit naturellement sur  $H$  par changement de coordonnées et que le champ quotient  $\mathcal{M} = [G \backslash H]$  est le champ de modules des intersections complètes lisses polarisées par  $\mathcal{O}(1)$ .

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

**Théorème 3.1.1.** *Le champ  $\mathcal{M}$  est séparé, sauf si  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ .*

L'intérêt du théorème 3.1.1 est qu'il permet de construire un espace de modules grossier en appliquant le théorème de Keel et Mori ([34], [13]) :

**Corollaire 3.1.2.** *Si l'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ , le champ  $\mathcal{M}$  admet un espace de modules grossier  $M$  qui est un espace algébrique séparé.*

On peut reformuler plus concrètement le théorème 3.1.1. C'est sous la forme (iii) que nous le démontrerons.

**Lemme 3.1.3.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le champ  $\mathcal{M}$  est séparé.*
- (ii) *Le groupe  $G$  agit proprement sur  $H$ .*
- (iii) *Pour tout trait  $T$  à corps résiduel algébriquement clos, si  $Z, Z' \subset \mathbb{P}_T^N$  sont des sous- $T$ -schémas fermés plats sur  $T$  dont les fibres géométriques sont des intersections complètes lisses, tout automorphisme  $f_\eta : \mathbb{P}_\eta^N \rightarrow \mathbb{P}_\eta^N$  tel que  $f_\eta(Z_\eta) = Z'_\eta$  se prolonge en un automorphisme  $f : \mathbb{P}_T^N \rightarrow \mathbb{P}_T^N$  tel que  $f(Z) = Z'$ .*

**Preuve.** L'équivalence entre les deux premières assertions résulte du critère 1.3.2. L'équivalence entre les deux dernières est exactement le critère valuatif de propreté appliqué au morphisme  $G \times H \rightarrow H \times H$  (on peut se restreindre aux corps résiduels algébriquement clos par la remarque 7.3.9 (i) de [20]).  $\square$

Remarquons qu'il est nécessaire d'exclure le cas des quadriques ( $c = 1$  et  $d_1 = 2$ ). Par exemple, la condition (ii) ci-dessus n'est pas vérifiée :  $G$  ne peut agir proprement sur  $H$  car les stabilisateurs de cette action, qui sont des groupes orthogonaux, ne sont pas propres. On peut aussi proposer un contre-exemple explicite à (iii) : on prend  $R = k[[t]]$ ,  $Z = Z'$  définis par l'équation  $X_0 X_N + Q(X_1, \dots, X_{N-1}) = 0$  où  $Q$  est une forme quadratique ordinaire sur  $k$ , et on choisit pour  $f_\eta$  l'automorphisme de  $\mathbb{P}_\eta^N$  donné par l'équation  $f_\eta([x_0 : \dots : x_N]) = [t^{-1}x_0 : x_1 : \dots : x_{N-1} : tx_N]$ .

Enfin, plusieurs cas du théorème 3.1.1 sont déjà connus.

Le cas  $c = 1$  et  $d_1 \geq 3$  sous sa forme (ii) est conséquence de [57] Corollary 2.5 appliqué à [57] Proposition 4.2. Dans cette référence, la base est un corps de caractéristique nulle, mais ces arguments fonctionnent sur une base quelconque (par exemple  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ ) comme expliqué dans [66] (voir aussi [57] Appendix 1G).

Enfin, quand  $d_1 + \dots + d_c \geq N + 1$ , le fibré canonique des intersections complètes considérées est ample ou trivial, de sorte qu'elles ne peuvent être birationnellement réglées. On peut alors appliquer le théorème 0.1.2 de Matsusaka et Mumford [53].

### 3.1.3 Conjecture de Pukhlikov

Dans [61], Pukhlikov, motivé par des questions de géométrie birationnelle, considère l'énoncé ci-dessous plus général que (iii) :

- (iv) *Pour tout trait  $T$  à corps résiduel algébriquement clos, si  $Z, Z' \subset \mathbb{P}_T^N$  sont des sous- $T$ -schémas fermés réguliers et plats sur  $T$  dont les fibres géométriques sont des intersections complètes, tout automorphisme  $f_\eta : \mathbb{P}_\eta^N \rightarrow \mathbb{P}_\eta^N$  tel que  $f_\eta(Z_\eta) = Z'_\eta$  se prolonge en un automorphisme  $f : \mathbb{P}_T^N \rightarrow \mathbb{P}_T^N$  tel que  $f(Z) = Z'$ .*

Pour être précis, Pukhlikov travaille avec  $n \geq 2$  et  $R = \mathbb{C}[[t]]$ . Il montre (iv) si  $c = 1$  et  $d_1 \geq 3$ , et il conjecture que, à  $c$  fixé, si  $N$  est grand et quitte à exclure un nombre fini de multidegrés, (iv) est vrai.

Le cas  $c \geq 2$ , même dans le cas abordé ici où  $Z$  et  $Z'$  sont lisses sur  $T$ , fait apparaître la difficulté suivante par rapport au cas  $c = 1$  traité par Pukhlikov : il n'y a aucune raison pour qu'on puisse trouver  $c$  équations  $F_1, \dots, F_c$  de  $Z_\eta$  se spécialisant en  $c$  équations définissant  $Z_s$  telles que  $f_\eta^{-1*}F_1, \dots, f_\eta^{-1*}F_c$  se spécialisent en  $c$  équations définissant  $Z'_s$ . Cela empêche de montrer (iii) en comparant directement les équations de  $Z_s$  et  $Z'_s$ .

### 3.1.4 Structure de la démonstration

Les deux parties qui suivent sont consacrées à une preuve par l'absurde du théorème 3.1.1 sous sa forme (iii) ci-dessus. Dans la première, le lemme 3.2.2 fournit, à l'aide d'arguments géométriques, des restrictions a priori sur  $Z_s$  et  $Z'_s$ . Dans la seconde, on conclut en manipulant de manière explicite les équations de petit degré de  $Z_s$  et  $Z'_s$ . On distingue pour cela trois cas : le cas  $d_1 \geq 3$  est traité au paragraphe 3.3.2, le cas  $c \geq 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$  au paragraphe 3.3.3, et le cas  $c \geq 2$ ,  $d_1 = 2$ ,  $d_2 \geq 3$ , plus délicat, au paragraphe 3.3.4.

## 3.2 Automorphismes projectifs

Commençons la preuve du théorème 3.1.1. On fixe pour cela un trait  $T$  à corps résiduel algébriquement clos,  $Z, Z' \subset \mathbb{P}_T^N$  des sous- $T$ -schémas fermés plats sur  $T$  dont les fibres géométriques sont des intersections complètes lisses, et un automorphisme  $f_\eta : \mathbb{P}_\eta^N \rightarrow \mathbb{P}_\eta^N$  tel que  $f_\eta(Z_\eta) = Z'_\eta$ .

### 3.2.1 Description de l'automorphisme $f_\eta$

**Lemme 3.2.1.** *On peut supposer qu'il existe des entiers  $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$  tels que  $f_\eta$  soit donné par la formule  $f_\eta([x_0 : \dots : x_N]) = [t^{\alpha_0}x_0 : \dots : t^{\alpha_N}x_N]$ .*

**Preuve.** L'automorphisme  $f_\eta$  est induit par un automorphisme linéaire  $f_K : K^{N+1} \rightarrow K^{N+1}$ . Quitte à composer  $f_K$  avec une homothétie, on peut supposer que  $f_K$  induit  $f_R : R^{N+1} \rightarrow R^{N+1}$   $R$ -linéaire. Comme  $f_R \otimes K$  est surjective,  $\text{Coker}(f_R)$  est de torsion, de sorte que  $f_R$  est injective et  $\text{Im}(f_R)$  est un sous- $R$ -module de rang maximal. Par le théorème de la base adaptée, on peut trouver des éléments  $e_0, \dots, e_N$  de  $R^{N+1}$ ,  $f_0, \dots, f_N$  de  $R^{N+1}$  et  $\lambda_0, \dots, \lambda_N$  de  $R$  tels que  $(f_R(e_i))$  soit une base de  $\text{Im}(f_R)$ ,  $(f_i)$  soit une base de  $R^{N+1}$  et  $f_R(e_i) = \lambda_i f_i$ . Comme tout élément de  $R$  s'écrit comme une unité fois une puissance de l'uniformisante, on peut supposer  $\lambda_i = t^{\alpha_i}$ . Quitte à réordonner les  $e_i$  et les  $f_i$ , on peut supposer que  $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$ . Remarquons enfin que comme  $f_R$  est injective, les  $e_i$  forment une base de  $R^{N+1}$ .

On a montré que quitte à composer à la source et au but par un automorphisme de  $\mathbb{P}_T^N$ ,  $f_\eta$  est de la forme voulue.  $\square$

Désormais, on suppose que  $f_\eta$  est donné par une telle formule.

Si  $\alpha_0 = \dots = \alpha_N$ ,  $f_\eta$  est l'identité et se prolonge donc en l'identité  $f : \mathbb{P}_T^N \rightarrow \mathbb{P}_T^N$ . Comme, par platitude,  $Z$  et  $Z'$  sont les adhérences de  $Z_\eta$  et  $Z'_\eta$ , et que  $f_\eta(Z_\eta) = Z'_\eta$ , on a  $f(Z) = Z'$  comme voulu.

Dans toute la suite, on suppose au contraire que  $\alpha_0 < \alpha_N$ , et on cherche à obtenir une contradiction.

### 3.2.2 Spécialisation de l'automorphisme $f_\eta$

On définit  $p_*$  et  $p^*$  de sorte que  $\alpha_0 = \dots = \alpha_{p_*} < \alpha_{p_*+1}$  et  $\alpha_N = \dots = \alpha_{N-p^*} > \alpha_{N-p^*-1}$ . On note :

$$\begin{aligned} P_* &= \{X_{p_*+1} = \dots = X_N = t = 0\}, \\ P^* &= \{X_0 = \dots = X_{N-p^*-1} = t = 0\}, \\ L_* &= \{X_{N-p^*} = \dots = X_N = t = 0\}, \\ L^* &= \{X_0 = \dots = X_{p_*} = t = 0\}. \end{aligned}$$

Ce sont des sous-espaces linéaires de  $\mathbb{P}_k^N$ .

**Lemme 3.2.2.** *On a  $P_* \subset Z'_s$ . De même,  $P^* \subset Z_s$ .*

**Preuve.** On montre l'énoncé concernant  $Z'_s$ ; l'autre est symétrique.

L'isomorphisme  $f_\eta$  induit une application rationnelle  $f : \mathbb{P}_T^N \dashrightarrow \mathbb{P}_T^N$ . L'expression de  $f_\eta$  montre que  $f$  est définie hors de  $L^*$  et que sa restriction  $f_s$  à la fibre spéciale est la projection depuis  $L^*$  sur  $P_*$ .

Notons  $W$  l'adhérence de  $f_s(Z_s \setminus (Z_s \cap L^*))$ , munie de sa structure réduite. Par description de  $f_s$ ,  $W \subset P_*$ . Comme, par platitude,  $Z$  et  $Z'$  sont les adhérences de  $Z_\eta$  et  $Z'_\eta$ , et que  $f_\eta(Z_\eta) \subset Z'_\eta$ , on a  $f(Z \setminus (Z \cap L^*)) \subset Z'$ . En se restreignant aux fibres spéciales, il vient :  $W \subset Z'_s$ . Si  $W = P_*$ , on peut conclure ; on suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas.

Remarquons que  $Z_s$  n'est pas ensemblistement inclus dans  $L^*$ . Si c'était le cas, comme  $Z_s$  est réduit, il serait schématiquement inclus dans  $L^*$ , donc dans un hyperplan de  $\mathbb{P}_k^N$ , et cela contredit la proposition 2.1.9 (ii). Ainsi,  $(Z_s \cap L^*) \neq Z_s$  de sorte que,  $Z_s$  étant intègre par la proposition 2.1.9 (i),  $Z_s \setminus (Z_s \cap L^*)$  est dense dans  $Z_s$ , donc de dimension  $n$ .

Si  $f_s : Z_s \setminus (Z_s \cap L^*) \rightarrow W$  était génériquement finie,  $W$  serait de dimension  $n$ . Comme  $W \subset Z'_s$ ,  $W$  serait une composante irréductible de  $Z'_s$ , et comme  $Z'_s$  est intègre par la proposition 2.1.9 (i), on aurait  $Z'_s = W$ , donc  $Z'_s \subset P_*$ . Alors  $Z'_s$  serait schématiquement inclus dans un hyperplan de  $\mathbb{P}_k^N$ , ce qui contredit la proposition 2.1.9 (ii). On a montré que  $f_s : Z_s \setminus (Z_s \cap L^*) \rightarrow W$  n'est pas génériquement finie.

Soit maintenant  $w$  un point fermé de  $W$  ; on choisit  $w$  général de sorte que  $w$  est un point lisse de  $W$ , et que la fibre  $F$  de  $f_s : Z_s \setminus (Z_s \cap L^*) \rightarrow W$  en  $w$  est de dimension  $\geq 1$ . Comme  $w$  est un point lisse de  $W$  et que  $W \neq P_*$ , il résulte que  $T_w W$  est un sous-espace linéaire strict de  $P_*$ . Notons  $C$  le cône réduit de sommet  $L^*$  et de base  $W$  : on a  $Z_s \subset C$  ensemblistement car  $f_s(Z_s \setminus (Z_s \cap L^*)) \subset W$ , donc schématiquement car  $Z_s$  est réduit. Ainsi, pour tout  $f \in F$ , comme

$T_f C = \langle T_w W, L^* \rangle$ , on a  $T_f Z_s \subset \langle T_w W, L^* \rangle$ . Comme  $T_w W$  est un sous-espace linéaire strict de  $P_*$ ,  $\langle T_w W, L^* \rangle$  est un sous-espace linéaire strict de  $\mathbb{P}_k^N$ . On obtient une contradiction car, par [48] 6.3.5, 6.3.6, un sous-espace linéaire strict de  $\mathbb{P}_k^N$  ne peut pas être tangent à  $Z_s$  le long d'une sous-variété de dimension  $\geq 1$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.3.** *Si  $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$  fait partie d'une suite régulière globale définissant  $Z_s$ ,  $\{F = 0\}$  contient  $P^*$  et  $y$  est lisse.*

*De même, si  $F' \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$  fait partie d'une suite régulière globale définissant  $Z'_s$ ,  $\{F' = 0\}$  contient  $P_*$  et  $y$  est lisse.*

**Preuve.** C'est une conséquence du lemme 3.2.2 et de la proposition 2.1.5.  $\square$

### 3.3 Étude des équations de petit degré

Notons  $\mathfrak{M}_d$  l'ensemble des monômes de degré  $d$  en  $X_0, \dots, X_N$ . Si  $M = X_0^{e_0} \dots X_N^{e_N}$ , on note  $\deg_\alpha(M) = \sum_i \alpha_i e_i$  : c'est le  $\alpha$ -degré du monôme  $M$ . Si  $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$ , on dit qu'un monôme  $M$  intervient dans  $F$  si le coefficient de  $M$  dans  $F$  n'est pas nul. On dit qu'une variable  $X_i$  intervient dans  $F$  si un monôme qu'elle divise intervient dans  $F$ .

#### 3.3.1 Spécialisation d'équations

Soit  $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$  une équation de degré  $d$  non nulle de  $Z_s$ . Par la proposition 2.1.12, on peut la relever en  $\tilde{F} = \sum_{M \in \mathfrak{M}_d} a_M M \in H^0(\mathbb{P}_T^N, \mathcal{O}(d))$ , une équation de degré  $d$  non nulle de  $Z$ . Vu l'expression de  $f_\eta$ ,  $\sum t^{-\deg_\alpha(M)} a_M M$  est une équation de degré  $d$  non nulle de  $Z'_\eta$ . Notons  $r_{\tilde{F}} = \min_{M \in \mathfrak{M}_d} (v(a_M) - \deg_\alpha(M))$ , considérons  $\tilde{F}' = \sum t^{-\deg_\alpha(M) - r_{\tilde{F}}} a_M M \in H^0(\mathbb{P}_T^N, \mathcal{O}(d))$  et notons  $F' = \pi(\tilde{F}') \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d))$ . Par choix de  $r_{\tilde{F}}$ ,  $F'$  est non nulle. Comme  $Z'_\eta \subset \{\tilde{F}' = 0\}$ , et que  $Z'$  est son adhérence par platitude,  $Z' \subset \{\tilde{F}' = 0\}$ . Prenant les fibres spéciales, on obtient  $Z'_s \subset \{F' = 0\}$  :  $F'$  est une équation de degré  $d$  non nulle de  $Z'_s$ .

#### 3.3.2 Équations de degré $d \geq 3$

On garde les notations du paragraphe 3.3.1.

**Lemme 3.3.1.** *Supposons que  $d \geq 3$  et que  $F$  fasse partie d'une suite régulière globale définissant  $Z_s$ . Alors  $\{F' = 0\}$  contient  $P_*$  et  $y$  est singulier.*

*De plus, les monômes intervenant dans  $F'$  sont de  $\alpha$ -degré  $\geq \alpha_0 + (d-1)\alpha_N$ .*

**Preuve.** Si aucun monôme  $X_{i_1} \dots X_{i_{d-1}} X_j$  avec  $N - p^* \leq i_1, \dots, i_{d-1} \leq N$  n'intervient dans  $F$ , on voit que  $P^* \subset \{F = 0\}$ , et le critère jacobien montre que  $\{F = 0\}$  est singulier le long de  $P^*$ . Cela contredit le corollaire 3.2.3.

Soit donc  $M$  un monôme de cette forme intervenant dans  $F$ . Alors  $r_{\tilde{F}} \leq v(a_M) - \deg_\alpha(M) = -\deg_\alpha(M) \leq -(\alpha_0 + (d-1)\alpha_N)$ .

Soit maintenant  $M'$  un monôme intervenant dans  $F'$ , de sorte que  $v(a_{M'}) - \deg_\alpha(M') - r_{\hat{F}} = 0$ . Alors  $\deg_\alpha(M') = v(a_{M'}) - r_{\hat{F}} \geq -r_{\hat{F}} \geq \alpha_0 + (d-1)\alpha_N$ . Comme  $d \geq 3$ , et que  $\alpha_0 < \alpha_N$ , cela implique  $\deg_\alpha(M') > (d-1)\alpha_0 + \alpha_N$ . En particulier, aucun monôme de la forme  $X_{j_1} \dots X_{j_{d-1}} X_i$  avec  $0 \leq j_1, \dots, j_{d-1} \leq p_*$  n'intervient dans  $F'$ . Cela implique que  $\{F' = 0\}$  contient  $P_*$  et le critère jacobien montre que  $\{F' = 0\}$  est singulier le long de  $P_*$ .  $\square$

On peut à présent montrer le théorème 3.1.1 si  $d_1 \geq 3$ .

### Preuve du théorème 3.1.1 si $d_1 \geq 3$ .

On prend pour  $F$  une équation de degré  $d_1$  de  $Z_s$  qui fait partie d'une suite régulière globale définissant  $Z_s$ . Alors, par le lemme 3.3.1,  $\{F' = 0\}$  contient  $P_*$  et  $y$  est singulier.

Comme  $F'$  est une équation non nulle de degré  $d_1$  de  $Z'_s$ , par 2.1.9 (iii), elle fait partie d'une suite régulière globale définissant  $Z'_s$ . Cela contredit le corollaire 3.2.3.  $\square$

### 3.3.3 Équations de degré 2

On garde les notations du paragraphe 3.3.1.

#### Lemme 3.3.2. *Supposons que $d = d_1 = 2$ .*

*Alors, si  $N - p^* \leq i \leq N$ , la variable  $X_i$  intervient dans  $F$ , mais seulement dans des monômes de la forme  $X_i X_j$  avec  $0 \leq j \leq p_*$ .*

*De même, si  $0 \leq j \leq p_*$ , la variable  $X_j$  intervient dans  $F'$ , mais seulement dans des monômes de la forme  $X_i X_j$  avec  $N - p^* \leq i \leq N$ .*

*De plus,  $r_{\hat{F}} = -\alpha_0 - \alpha_N$ .*

**Preuve.** Par la proposition 2.1.9 (iii),  $F$  fait partie d'une suite régulière globale définissant  $Z_s$ . En particulier, par le corollaire 3.2.3,  $\{F = 0\}$  contient  $P^*$  et  $y$  est lisse. Si  $N - p^* \leq i \leq N$  est tel que  $X_i$  n'intervient pas dans  $F$ , le critère jacobien montre que  $\{F = 0\}$  est singulier en le point de  $P^*$  ayant toutes ses coordonnées nulles sauf la  $i$ -ème : c'est absurde. De même, si  $0 \leq j \leq p_*$ , la variable  $X_j$  apparaît dans  $F'$ .

Soient maintenant  $N - p^* \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq p_*$ ,  $M$  un monôme intervenant dans  $F$  divisible par  $X_i$  et  $M'$  un monôme intervenant dans  $F'$  divisible par  $X_j$ . On a  $r_{\hat{F}} \leq v(a_M) - \deg_\alpha(M) = -\deg_\alpha(M) \leq -\alpha_0 - \alpha_N$  d'une part et  $r_{\hat{F}} = v(a_{M'}) - \deg_\alpha(M') \geq -\deg_\alpha(M') \geq -\alpha_0 - \alpha_N$  d'autre part. Ces inégalités sont donc des égalités. En particulier,  $\deg_\alpha(M) = \deg_\alpha(M') = \alpha_0 + \alpha_N$ , ce qui montre les restrictions voulues sur les monômes intervenant dans  $F$  et  $F'$ , et  $r_{\hat{F}} = -\alpha_0 - \alpha_N$ .  $\square$

Montrons à présent le théorème 3.1.1 si  $c \geq 2$  et  $d_1 = d_2 = 2$ .

#### Preuve du théorème 3.1.1 si $c \geq 2$ et $d_1 = d_2 = 2$ .

On peut supposer, quitte à échanger  $Z$  et  $Z'$ , que  $p^* \geq p_*$ . Soit  $(F_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$  un pinceau d'équations de degré 2 de  $Z_s$ . Comme  $F_t$  fait partie d'une suite régulière globale définissant  $Z_s$  par la proposition 2.1.9 (iii), le corollaire 3.2.3 montre que



$\{F_t = 0\}$  contient  $P^*$  et y est lisse. De plus, les restrictions sur les monômes de  $F_t$  obtenues dans le lemme 3.3.2 montrent que si  $x \in P^*$ , on a  $L^* \subset T_x\{F_t = 0\}$ . L'ensemble des hyperplans de  $\mathbb{P}_k^N$  contenant  $L^*$  s'identifie naturellement au dual  $(P_*)^\vee$  de  $P_*$ , et on obtient un morphisme  $\Gamma : \mathbb{P}^1 \times P^* \rightarrow (P_*)^\vee$  défini par  $\Gamma(t, x) = T_x\{F_t = 0\}$ .

Comme  $\dim(\mathbb{P}^1 \times P^*) = p^* + 1 > p_* = \dim((P_*)^\vee)$ , on peut trouver un hyperplan  $H \in (P_*)^\vee$ , et  $C$  une courbe irréductible dans  $\mathbb{P}^1 \times P^*$  tels que  $\Gamma(t, x) = H$  pour  $(t, x) \in C$ . Si la projection  $C \rightarrow P^*$  n'est pas constante, son image est une courbe, et  $H$  est tangent à  $Z_s$  le long de cette courbe, ce qui contredit [48] 6.3.5, 6.3.6. Sinon,  $C = \mathbb{P}^1 \times \{x\}$  pour  $x \in P^*$ , et tous les  $\{F_t = 0\}$  ont espace tangent  $H$  en  $x$ . En particulier, les équations  $F_0$  et  $F_1$  ne sont pas transverses en  $x$ . Comme, par la proposition 2.1.9 (iii), elles font partie d'une suite régulière globale définissant  $Z_s$ , cela contredit la proposition 2.1.5.  $\square$

### 3.3.4 Fin de la preuve

Il reste à prouver le théorème 3.1.1 si  $c \geq 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 \geq 3$ .

#### Preuve du théorème 3.1.1 si $c \geq 2$ , $d_1 = 2$ et $d_2 \geq 3$ .

Soient  $F \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(2))$  et  $G \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d_2))$  des équations de  $Z_s$  faisant partie d'une suite régulière globale la définissant. Appliquant la discussion du paragraphe 3.3.1 à  $F$  et  $G$ , on obtient d'une part des équations  $\tilde{F}, \tilde{F}', F'$  et un entier  $r_{\tilde{F}}$ , d'autre part des équations  $\tilde{G}, \tilde{G}', G'$  et un entier  $r_{\tilde{G}}$ . Par le lemme 3.3.2,  $r_{\tilde{F}} = -\alpha_0 - \alpha_N$ .

Par le lemme 3.3.1,  $G'$  est singulier le long de  $P_*$ , de sorte que, par le corollaire 3.2.3,  $G'$  ne peut faire partie d'une suite régulière globale définissant  $Z'_s$ . Par la proposition 2.1.9 (iv), cela signifie qu'il existe  $Q \in H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(d_2 - 2))$  tel que  $G' = QF'$ .

Par le lemme 3.3.2, la variable  $X_0$  intervient dans  $F'$ . Par le lemme 3.3.1, tous les monômes intervenant dans  $G'$  ont un  $\alpha$ -degré  $\geq \alpha_0 + (d_2 - 1)\alpha_N$ . Ces deux faits impliquent que tous les monômes intervenant dans  $Q$  ont  $\alpha$ -degré  $(d_2 - 2)\alpha_N$ , et que  $G'$  fait intervenir au moins un monôme de  $\alpha$ -degré  $\alpha_0 + (d_2 - 1)\alpha_N$ . En particulier, on a égalité dans les inégalités de la démonstration du lemme 3.3.1, ce qui montre  $r_{\tilde{G}} = -\alpha_0 - (d_2 - 1)\alpha_N$ .

Soit  $\tilde{Q}$  un relevé de  $Q$  à  $H^0(\mathbb{P}_T^N, \mathcal{O}(d_2 - 2))$  ne faisant intervenir que des monômes de  $\alpha$ -degré  $(d_2 - 2)\alpha_N$ . Posons  $H = G - QF$ . Comme  $\{F = G = 0\} = \{F = H = 0\}$ ,  $F$  et  $H$  font partie d'une suite régulière globale définissant  $Z_s$ . On applique la discussion du paragraphe 3.3.1 à  $H$  et à son relevé  $\tilde{H} = \tilde{G} - \tilde{Q}\tilde{F}$ . Comme le raisonnement effectué ci-dessus pour  $F$  et  $G$  vaut aussi pour  $F$  et  $H$ , on a  $r_{\tilde{H}} = -\alpha_0 - (d_2 - 1)\alpha_N$ .

Calculons  $\tilde{H}'$ . On note  $a_M^{\tilde{F}}$  le coefficient du monôme  $M$  dans  $\tilde{F}$ , et on utilise des notations analogues pour  $\tilde{G}, \tilde{H}$  et  $\tilde{Q}$ . Comme le  $\alpha$ -degré d'un produit de monômes est la somme des  $\alpha$ -degrés de ces monômes, il vient :

$$\begin{aligned}
\tilde{H}' &= t^{-r_{\tilde{H}}} \left( \sum_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{H}} M \right) \\
&= t^{-r_{\tilde{H}}} \left( \sum_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{G}} M \right. \\
&\quad \left. - \sum_{M \in \mathfrak{M}_{d_2-2}} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{Q}} M \sum_{M \in \mathfrak{M}_2} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{F}} M \right).
\end{aligned}$$

Comme  $r_{\tilde{G}} = r_{\tilde{H}} = -\alpha_0 - (d_2 - 1)\alpha_N$ ,  $r_{\tilde{F}} = -\alpha_0 - \alpha_N$ , et que tous les monômes intervenant dans  $\tilde{Q}$  sont de  $\alpha$ -degré  $(d_2 - 2)\alpha_N$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{H}' &= t^{-r_{\tilde{G}}} \left( \sum_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{G}} M \right) - \tilde{Q} \left( t^{-r_{\tilde{F}}} \sum_{M \in \mathfrak{M}_2} t^{-\deg_\alpha(M)} a_M^{\tilde{F}} M \right) \\
&= \tilde{G}' - \tilde{Q}\tilde{F}'.
\end{aligned}$$

Spécialisant cette équation, il vient  $H' = G' - QF' = 0$ . C'est une contradiction car, dans la construction du paragraphe 3.3.1,  $r_{\tilde{H}}$  est choisi de sorte que  $H'$  soit non nul. Cela conclut la preuve.  $\square$

## Chapitre 4

# Automorphismes

Dans ce chapitre, on étudie les automorphismes des intersections complètes lisses : le théorème principal est le théorème 4.2.1. Dans la première partie, on regroupe des généralités sur les automorphismes de variétés, nécessaires pour l'énoncé et la preuve de ce théorème. La seconde partie contient l'énoncé du théorème, et la troisième sa preuve. Enfin, dans la quatrième partie, on en déduit, comme application, quand le champ de modules  $\mathcal{M}$  des intersections complètes lisses polarisées par  $\mathcal{O}(1)$  est de Deligne-Mumford.

### 4.1 Schéma en groupes des automorphismes

#### 4.1.1 Notations

Soit  $k$  un corps ; on note  $p$  sa caractéristique (on peut avoir  $p = 0$ ).

On fixe  $N \geq 2$ ,  $1 \leq c \leq N - 1$  et  $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$  des entiers. Par intersection complète, on voudra dire sous-schéma fermé de codimension  $c$  de  $\mathbb{P}_k^N$  défini par  $c$  équations homogènes de degrés  $d_1, \dots, d_c$ . On notera  $n = N - c \geq 1$  la dimension de ces intersections complètes.

Si  $Z$  et  $T$  sont des  $k$ -schémas, on notera  $Z_T$  le  $T$ -schéma  $Z \times_k T$ .

On renvoie à la partie 1.2 pour les conventions relatives au foncteurs de Picard.

#### 4.1.2 Automorphismes d'une variété

On rappelle que, si  $Z$  est un  $k$ -schéma projectif, le foncteur qui à un  $k$ -schéma  $T$  associe l'ensemble  $\text{Aut}_T(Z_T)$  des  $T$ -automorphismes de  $Z_T$  est représentable par un  $k$ -schéma en groupes noté  $\text{Aut}_k(Z)$ . Le groupe des composantes connexes de  $\text{Aut}_k(Z)$  est dénombrable et sa composante neutre est un  $k$ -schéma en groupes de type fini dont l'espace tangent en l'identité s'identifie à  $H^0(Z, T_Z)$ . Pour ces faits, on pourra consulter [65] Prop. 4.6.10.

### 4.1.3 Automorphismes d'une variété polarisée

Soient  $g : Z \rightarrow \text{Spec}(k)$  un  $k$ -schéma projectif géométriquement intègre, et  $\lambda \in \mathbf{Pic}_{Z/k}(k)$ . Considérons le foncteur qui à un  $k$ -schéma  $T$  associe l'ensemble des  $f \in \text{Aut}_T(Z_T)$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Pic}_{Z_T/T} & \xrightarrow{f^*} & \mathbf{Pic}_{Z_T/T} \\ & \swarrow \lambda_T & \searrow \lambda_T \\ & T & \end{array} \quad (4.1)$$

Ce foncteur est représentable par un sous-schéma fermé de  $\text{Aut}_k(Z)$ . En effet, si  $T$  est un  $k$ -schéma et  $f \in \text{Aut}_T(Z \times_k T)$ , le sous-schéma fermé de  $T$  défini par l'équation  $f^* \circ \lambda_T - \lambda_T = 0$  vérifie la propriété universelle requise. Il est de plus immédiat que c'est un sous-schéma en groupes. On le note  $\text{Aut}_k(Z, \lambda)$ .

### 4.1.4 Cas des intersections complètes

Supposons maintenant que  $Z \subset \mathbb{P}_k^N$  est une intersection complète lisse polarisée par  $\mathcal{O}(1)$ . On note  $i : Z \subset \mathbb{P}_k^N$  l'inclusion, et  $g$  et  $h$  les morphismes structuraux de  $Z$  et  $\mathbb{P}_k^N$ . On va donner une description plus concrète de  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ , en l'identifiant à un sous-schéma en groupes de  $PGL_{N+1,k}$ .

Rappelons que  $PGL_{N+1,k} = \text{Aut}_k(\mathbb{P}_k^N)$ , de sorte que si  $T$  est un  $k$ -schéma,  $PGL_{N+1,k}(T)$  est l'ensemble des  $T$ -automorphismes de  $\mathbb{P}_T^N$  (voir [57] 0.5b). Considérons le sous-foncteur  $G$  de  $PGL_{N+1,k}$  qui associe à un  $k$ -schéma  $T$  l'ensemble  $G(T)$  des  $f \in PGL_{N+1,k}(T)$  tels que  $f(Z_T) = Z_T$ . Vérifions que  $G$  est représentable par un sous-schéma fermé de  $PGL_{N+1,k}$ . Pour cela, soit  $T$  un  $k$ -schéma et  $f \in PGL_{N+1,k}(T)$ . Les sous-schémas  $Z_T$  et  $f(Z_T)$  de  $\mathbb{P}_T^N$  sont plats sur  $T$  et induisent donc des sections  $T \rightarrow \text{Hilb}(\mathbb{P}_T^N/T)$  qui sont des immersions fermées par [19] 5.4.6. L'intersection de ces deux sous-schémas fermés de  $\text{Hilb}(\mathbb{P}_T^N/T)$  s'identifie à un sous-schéma fermé de  $T$  qui vérifie la propriété universelle requise. On a montré que  $G$  est représentable par un sous-schéma fermé de  $PGL_{N+1,k}$ ; que ce soit un sous-schéma en groupes est immédiat.

On va montrer que  $G$  et  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  coïncident. Si  $f \in G(T)$ , on note  $\Phi(T)(f) = f|_{Z_T}$ . Comme  $f$  préserve nécessairement la polarisation  $\mathcal{O}(1) \in \mathbf{Pic}_{\mathbb{P}_T^N/T}(T)$  de  $\mathbb{P}_T^N$ , elle préserve sa restriction à  $Z_T$ , de sorte que  $\Phi(T)(f) \in \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))(T)$ . On a ainsi construit un morphisme de foncteurs  $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ ; on vérifie aisément qu'il respecte les lois de groupes. Montrons en deux temps que c'est un isomorphisme.

Tout d'abord, montrons que  $\Phi(T)$  est injectif. Pour cela, soit  $f \in \text{Ker}(\Phi(T))$  :  $f|_{Z_T} : Z_T \rightarrow Z_T$  est l'identité. Par la proposition 2.1.7,  $i^* : H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{O}(1)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}(1))$  est un isomorphisme de sorte que par changement de base plat par  $T \rightarrow \text{Spec}(k)$ ,  $i_T^* : h_{T*}\mathcal{O}(1) \rightarrow g_{T*}\mathcal{O}(1)$  est un isomorphisme. La commutativité

du diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} g_{T^*}\mathcal{O}(1) & \xrightarrow{f|_{Z_T}^*} & g_{T^*}\mathcal{O}(1) \\ i_T^* \uparrow & & \uparrow i_T^* \\ h_{T^*}\mathcal{O}(1) & \xrightarrow{f^*} & h_{T^*}\mathcal{O}(1) \end{array}$$

montre que  $f^* : h_{T^*}\mathcal{O}(1) \rightarrow h_{T^*}\mathcal{O}(1)$  est l'identité, de sorte que  $f$  est l'identité.

Montrons enfin que  $\Phi(T)$  est surjectif. Pour cela, soit  $f : Z_T \rightarrow Z_T$  un élément de  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))(T) : f^*\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(-1)$  est trivial dans  $\mathbf{Pic}_{Z_T/T}(T) = \mathbf{Pic}_{Z/k}(T)$ , donc, par [16] Th. 9.2.5 1, dans  $\text{Pic}_{Z/k}(T)$ . Il existe donc  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(T)$  tel que  $f^*\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}(1) \otimes g_T^*\mathcal{L}$ . Par conséquent,  $f^*$  induit un isomorphisme entre  $g_{T^*}\mathcal{O}(1)$  et  $g_{T^*}\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{L}$ . Composant avec  $i_T^*$ , on obtient un isomorphisme entre  $h_{T^*}\mathcal{O}(1)$  et  $h_{T^*}\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{L}$ , donc entre les fibrés projectifs associés : c'est un isomorphisme  $\mathbb{P}_T^N \rightarrow \mathbb{P}_T^N$ . Par construction, c'est un élément de  $G(T)$  qui est un antécédent de  $f$  par  $\Phi(T)$ .

Ainsi, suivant la situation, on pourra considérer  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  comme un sous-schéma en groupes fermé de  $\text{Aut}_k(Z)$  ou de  $PGL_{N+1,k}$ .

## 4.2 Automorphismes des intersections complètes lisses

### 4.2.1 Énoncé du théorème

Le but de ce chapitre est de montrer que, si  $Z$  est une intersection complète lisse,  $\text{Aut}_k(Z)$  et  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  sont, sauf pour un petit nombre d'exceptions qu'on explique, des schémas en groupes finis réduits.

Le théorème principal est le suivant :

**Théorème 4.2.1.** *Les schémas en groupes  $\text{Aut}_k(Z)$  et  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  coïncident et sont finis réduits, sauf dans les cas suivants :*

- (i) **Quadriques** : si  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ ,  $\text{Aut}_k(Z) = \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  est lisse de dimension  $\frac{N(N+1)}{2}$ .
- (ii) **Courbes de genre 1** : si  $N = 2$ ,  $c = 1$  et  $d_1 = 3$  ou si  $N = 3$ ,  $c = 2$  et  $d_1 = d_2 = 2$ ,  $\text{Aut}_k(Z)$  est de type fini et sa composante neutre est une courbe elliptique. De plus  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  est fini ; il est aussi réduit sauf si  $N = 2$ ,  $c = 1$ ,  $d_1 = 3$  et  $p = 3$  ou si  $N = 3$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$  et  $p = 2$ .
- (iii) **Courbes de genre  $\geq 2$**  : dans les autres cas où  $n = 1$ ,  $\text{Aut}_k(Z)$  et  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  sont tous deux finis réduits, mais peuvent ne pas coïncider.
- (iv) **Surfaces K3** : si  $N = 3$ ,  $c = 1$  et  $d_1 = 4$ , si  $N = 4$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 3$  ou si  $N = 5$ ,  $c = 3$  et  $d_1 = d_2 = d_3 = 2$ ,  $\text{Aut}_k(Z)$  est de

dimension nulle, réduit et au plus dénombrable tandis que  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  est fini réduit.

(v) **Intersections de deux quadriques** : si  $N \geq 5$  est impair,  $c = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$  et  $p = 2$ ,  $\text{Aut}_k(Z) = \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  est fini non réduit.

### 4.2.2 Cas des hypersurfaces

Le cas des hypersurfaces est classique. En caractéristique nulle, il est traité par Kodaira et Spencer dans [39] 14.2. En caractéristique positive, la finitude des groupes d'automorphismes est étudiée dans [51]. On trouvera une discussion très détaillée incluant les problèmes de réduction dans [33] 11.5, 11.6, 11.7.

### 4.2.3 Codimension supérieure

Les arguments en codimension supérieure sont analogues. D'une part, il faut étendre aux intersections complètes lisses le calcul fait dans [39] des champs de vecteurs sur une hypersurface lisse. C'est l'objet du paragraphe 4.3.1. D'autre part, un phénomène nouveau apparaît : la non réduction de  $\text{Aut}_k(Z)$  quand  $N \geq 5$  est impair,  $c = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$  et  $p = 2$  (cas (v) ci-dessus). On traite ce cas à l'aide de calculs explicites au paragraphe 4.3.3. La preuve proprement dite du théorème 4.2.1 se trouve au paragraphe 4.3.4.

Dans le cas (ii) ci-dessus, les automorphismes infinitésimaux sont facilement explicables : ce sont des automorphismes de translation de la courbe de genre 1. Il serait intéressant d'obtenir également dans le cas (v) une description géométrique de ces automorphismes infinitésimaux. Pourrait-on même identifier la composante connexe de l'identité de  $\text{Aut}_k(Z)$  ?

## 4.3 Preuve du théorème

### 4.3.1 Champs de vecteurs sur les intersections complètes lisses

Soit  $Z$  une intersection complète lisse sur  $k$ . L'objectif de ce paragraphe est la proposition 4.3.5 : on montre que, à quelques exceptions éventuelles près,  $Z$  n'admet pas de champs de vecteurs globaux non triviaux. La preuve, qui étend celle de [39] pour les hypersurfaces, consiste en un calcul de cohomologie de faisceaux de formes différentielles.

Rappelons tout d'abord le théorème d'annulation suivant sur  $\mathbb{P}^N$ . En caractéristique 0, c'est une conséquence du théorème d'annulation de Bott. On peut en trouver une preuve de Deligne, indépendante de la caractéristique, dans [1] Exposé XI, Th. 1.1.

**Lemme 4.3.1.** *On a  $H^q(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^p(l)) = 0$  sauf dans les trois cas suivants :*

(i)  $p = q$  et  $l = 0$ ,

(ii)  $q = 0$  et  $l > p$ ,

(iii)  $q = N$  et  $l < p - N$ .

On peut en déduire des théorèmes d'annulation sur  $Z$ .

**Lemme 4.3.2.** *Soit  $Z$  une intersection complète lisse sur  $k$ .*

*Si  $p + q > n$  et  $l > p - q$ , on a  $H^q(Z, \Omega_Z^p(l)) = 0$ .*

**Preuve.** On raisonne par récurrence sur  $q$ . Si  $q = 0$ , on a  $p > n$ , de sorte que  $\Omega_Z^p = 0$  et l'annulation est évidente.

Considérons la  $(p + c)$ -ème puissance extérieure de la suite exacte courte  $0 \rightarrow N_{Z/\mathbb{P}_k^N}^* \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_k^N}|_Z \rightarrow \Omega_Z \rightarrow 0$ . On obtient une filtration de  $\Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}|_Z$  dont les gradués successifs sont les faisceaux localement libres :

$$\Omega_Z^{p+t} \otimes \bigwedge_{1 \leq j_1 < \dots < j_{c-t} \leq c}^{c-t} N_{Z/\mathbb{P}_k^N}^* = \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_{c-t} \leq c} \Omega_Z^{p+t}(-d_{j_1} - \dots - d_{j_{c-t}}), \quad t \geq 0.$$

Tensorisons ce faisceau localement libre filtré par  $\mathcal{O}(l + d_1 + \dots + d_c)$ , de sorte que le gradué correspondant à  $t = 0$  soit  $\Omega_Z^p(l)$ . En dévissant cette filtration en suite exactes courtes de faisceaux localement libres, et en écrivant les suites exactes longues de cohomologie associées à ces suites exactes courtes, on est ramenés, pour montrer l'annulation désirée, à vérifier les annulations suivantes :

- (i) Pour  $t \geq 1$  et  $1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq c$ ,  $H^{q-1}(Z, \Omega_Z^{p+t}(d_{j_1} + \dots + d_{j_t} + l)) = 0$ .
- (ii)  $H^q(Z, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}|_Z(l + d_1 + \dots + d_c)) = 0$ .

Pour les premières annulations, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Les hypothèses sont vérifiées car  $p + t + q - 1 \geq p + q > n$  et  $d_{j_1} + \dots + d_{j_t} + l \geq l + t + 1 > p + t - q + 1$ .

Pour la seconde annulation, on dispose de la résolution de Koszul de  $\mathcal{O}_Z$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{K}^{-c} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{K}^0 \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0,$$

où  $\mathcal{K}^{-r} = \bigwedge^r(\bigoplus_{i=1}^c \mathcal{O}(-d_i)) = \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq c} \mathcal{O}(-d_{j_1} - \dots - d_{j_r})$ . Tensorisons cette résolution par le faisceau localement libre  $\Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}(l + d_1 + \dots + d_c)$ , et considérons la suite spectrale d'hypercohomologie associée :

$$E_1^{r,s} = H^s(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{K}^r \otimes \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}(l + d_1 + \dots + d_c)) \Rightarrow H^{r+s}(Z, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}|_Z(l + d_1 + \dots + d_c)).$$

Il s'ensuit que pour montrer l'annulation voulue, il suffit de vérifier l'annulation des  $H^{q+r}(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{p+c}(l + d_{j_1} + \dots + d_{j_{c-r}}))$  pour  $0 \leq r \leq c$  et  $1 \leq j_1 < \dots < j_{c-r} \leq c$ . Pour cela, montrons que le lemme 4.3.1 s'applique.

Si l'on était dans le cas (i), on pourrait écrire  $l = -d_{j_1} - \dots - d_{j_{c-r}} \leq -2(c - r) = (p - q) - (c - r) \leq p - q$ , ce qui est absurde. Si l'on était dans le cas (ii), on aurait  $q + r = 0$  donc  $q = 0$ , mais ce cas a été traité comme initialisation de la récurrence. Enfin, si l'on était dans le cas (iii), il viendrait :  $p - q < l \leq l + d_{j_1} + \dots + d_{j_{c-r}} < p + c - N = p - n$ , de sorte que  $q > n$  et que l'annulation de  $H^q(Z, \Omega_Z^p(l))$  était évidente.  $\square$

La stratégie de démonstration du lemme ci-dessus permet de montrer l'annulation d'autres groupes de cohomologie. Les deux lemmes qui suivent en sont des exemples, dont on aura besoin. Le premier de ces lemmes concerne les hypersurfaces cubiques de dimension au moins 2.

**Lemme 4.3.3.** *Supposons que  $c = 1$ ,  $d_1 = 3$  et  $N \geq 3$ . Soit  $Z$  une intersection complète lisse sur  $k$ .*

$$\text{Alors } H^{N-1}(Z, \Omega_Z^1(2-N)) = 0.$$

**Preuve.** On procède de la même manière que dans la preuve du lemme 4.3.2. Par l'argument de filtration, on est ramenés à montrer l'annulation des deux groupes de cohomologie  $H^{N-2}(Z, \Omega_Z^2(5-N))$  et  $H^{N-1}(Z, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^2|_Z(5-N))$ . Pour le premier, on peut appliquer le lemme 4.3.2. Pour le second, on procède de la même manière qu'en 4.3.2 : par l'argument de suite spectrale de Koszul, on est ramenés à montrer l'annulation des deux groupes de cohomologie  $H^{N-1}(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^2(5-N))$  et  $H^N(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^2(2-N))$ . Le lemme 4.3.1 montre qu'ils s'annulent, sauf le second si  $N = 2$ .  $\square$

Le second de ces lemmes concerne les intersections de deux quadriques de dimension paire.

**Lemme 4.3.4.** *Supposons que  $c = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$  et que  $N$  est pair. Soit  $Z$  une intersection complète lisse sur  $k$ .*

$$\text{Alors } H^{N-2}(Z, \Omega_Z^1(3-N)) = 0.$$

**Preuve.** On va en fait prouver l'énoncé plus général suivant : si  $c = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$  et  $i \geq 0$ ,  $H^{N-2-i}(Z, \Omega_Z^{1+i}(3+2i-N)) = 0$ , de sorte qu'on obtient le résultat voulu en faisant  $i = 0$ . La preuve procède par récurrence descendante sur  $i$ . L'initialisation de la récurrence est facile : si  $i \geq N - 2$ , le faisceau  $\Omega_Z^{1+i}$  est nul par dimension. Supposons l'annulation vérifiée pour  $i + 1$ , et cherchons à la montrer pour  $i$ .

On procède de la même manière que dans la preuve du lemme 4.3.2. Par l'argument de filtration, on est ramenés à montrer l'annulation des trois groupes de cohomologie  $H^{N-3-i}(Z, \Omega_Z^{2+i}(5+2i-N))$ ,  $H^{N-3-i}(Z, \Omega_Z^{3+i}(7+2i-N))$  et  $H^{N-2-i}(Z, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{3+i}|_Z(7+2i-N))$ . Le premier s'annule par hypothèse de récurrence, le second s'annule par le lemme 4.3.2. Pour montrer l'annulation du troisième, on procède toujours comme dans la preuve du lemme 4.3.2 : en utilisant la suite spectrale de Koszul, on est ramenés à montrer l'annulation des trois groupes de cohomologie suivants :  $H^{N-2-i}(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{3+i}(7+2i-N))$ ,  $H^{N-1-i}(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{3+i}(5+2i-N))$  et  $H^{N-i}(\mathbb{P}_k^N, \Omega_{\mathbb{P}_k^N}^{3+i}(3+2i-N))$ . Pour cela, appliquons le lemme 4.3.1. Le cas (i) n'arrive que pour le troisième de ces groupes et  $N = 2i + 3$ , ce qui est impossible car  $N$  est supposé pair. Le cas (ii) n'intervient pas car  $i < N - 2$ , et on vérifie facilement qu'on n'est jamais dans le cas (iii). Cela conclut.  $\square$

On peut finalement montrer :



**Proposition 4.3.5.** *Supposons qu'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ , ni  $N = 2$ ,  $c = 1$  et  $d_1 = 3$ , ni  $N$  impair,  $c = 2$  et  $d_1 = d_2 = 2$ . Soit  $Z$  une intersection complète lisse sur  $k$ .*

*Alors  $H^0(Z, T_Z) = 0$ .*

**Preuve.** Par dualité de Serre,  $H^0(Z, T_Z) = H^n(Z, \Omega_Z^1(d_1 + \dots + d_c - N - 1))^\vee$ . Cherchons à annuler ce groupe de cohomologie à l'aide du lemme 4.3.2. La première condition  $p + q = 1 + n > n$  est trivialement vérifiée. Pour la seconde, on remarque que  $l + q - p = d_1 + \dots + d_c - c - 1 > 0$  sauf si  $c = 1$  et  $d_1 = 2$  ou 3, ou si  $c = 2$  et  $d_1 = d_2 = 2$ .

Si  $c = 1$ ,  $d_1 = 3$  et  $N \geq 3$ , on peut appliquer le lemme 4.3.3. Si  $c = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$  et  $N$  est pair, on peut appliquer le lemme 4.3.4.  $\square$

### 4.3.2 Quadriques

On calcule dans ce paragraphe le groupe des automorphismes d'une quadrique lisse. Pour cela, on le compare au groupe des automorphismes linéaires de la forme quadratique correspondante. On utilise à cet effet les résultats classiques sur le groupe orthogonal se trouvant dans le livre [38], dont on conserve les notations, notamment celles introduites p.348.

Cette proposition est bien sûr classique; on détaille sa preuve faute de référence.

**Proposition 4.3.6.** *Soient  $k$  un corps,  $N \geq 2$  et  $Z = \{q = 0\} \subset \mathbb{P}_k^N$  une quadrique lisse.*

(i) *Si  $N$  est pair,  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1)) = \mathbf{O}^+(q)$ .*

(ii) *Si  $N$  est impair, on a une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow \mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{O}^+(q) \rightarrow \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1)) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

*En particulier,  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  est lisse sur  $k$  de dimension  $\frac{N(N+1)}{2}$ .*

**Preuve.** La lissité de  $Z$  est équivalente à l'ordinarité de la forme quadratique  $q$ . On note  $PG = \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  et  $G$  son image réciproque dans  $GL_{N+1}$ . Le groupe  $G$  préserve la quadrique, donc agit via un caractère sur son équation  $q$ . Le noyau de ce caractère est exactement le sous-schéma en groupes  $\mathbf{O}(q)$  de  $GL_{N+1}$  constitué des transformations linéaires préservant la forme quadratique. On a donc deux suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow G \rightarrow PG \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathbf{O}(q) \rightarrow G \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 0.$$

Comme la composée  $\mathbb{G}_m \rightarrow G \rightarrow \mathbb{G}_m$  est l'élevation au carré, on obtient une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathbf{O}(q) \rightarrow PG \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Supposons tout d'abord  $N$  pair. Par définition de  $\mathbf{O}^+(q)$ , on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbf{O}^+(q) \rightarrow \mathbf{O}(q) \xrightarrow{\det} \mu_2 \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Comme la composée  $\mu_2 \rightarrow \mathbf{O}(q) \rightarrow \mu_2$  des flèches de (4.2) et (4.3) est l'élévation à la puissance  $N + 1$ , donc l'identité de  $\mu_2$ , la composée  $\mathbf{O}^+(q) \rightarrow \mathbf{O}(q) \rightarrow PG$  des flèches de (4.2) et (4.3) est un isomorphisme.

Supposons ensuite  $N$  impair et  $k$  de caractéristique  $\neq 2$ . On a encore la suite exacte (4.3), mais la composée  $\mu_2 \rightarrow \mathbf{O}(q) \rightarrow \mu_2$  des flèches de (4.2) et (4.3) est l'élévation à la puissance  $N + 1$ , et est donc nulle. Ainsi, la composée  $\mathbf{O}^+(q) \rightarrow \mathbf{O}(q) \rightarrow PG$  des flèches de (4.2) et (4.3) a image d'indice deux dans  $PG$ , et noyau isomorphe à  $\mu_2$ . Par [38] Th. 25.12,  $\mathbf{O}^+(q)$  a un unique quotient central par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : \mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{O}^+(q)$ .

Enfin, si  $N$  est impair et  $k$  de caractéristique 2,  $\mathbf{O}^+(q)$  est le noyau de l'invariant de Dickson  $\Delta$  : on a une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \mathbf{O}^+(q) \rightarrow \mathbf{O}(q) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

La composée  $\mu_2 \rightarrow \mathbf{O}(q) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  des flèches de (4.2) et (4.4) est nécessairement nulle. Le même raisonnement que dans le cas précédent s'applique alors ; cela conclut.  $\square$

Remarquons que, si le groupe des automorphismes  $\mathbf{O}(q)$  de la forme quadratique est non réduit en caractéristique 2 pour  $N$  pair, le groupe des automorphismes de la quadrique est, lui, réduit.

### 4.3.3 Intersections de deux quadriques

Dans ce paragraphe, on effectue des calculs sur les intersections de deux quadriques par manipulation explicite de leurs équations.

**Proposition 4.3.7.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $\neq 2$ ,  $N \geq 3$  et  $Z \subset \mathbb{P}_k^N$  une intersection complète lisse de deux quadriques. Alors l'espace tangent en  $\text{Id}$  de  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  est trivial.*

**Preuve.** Par Bertini, un membre général du pinceau de quadriques définissant  $Z$  est lisse. On peut donc écrire  $Z = \{q = q' = 0\}$  où  $q$  et  $q'$  sont des formes quadratiques non dégénérées. Diagonalisant  $q'$  en base orthonormée pour  $q$ , on obtient un système de coordonnées dans lequel  $q = X_0^2 + \cdots + X_N^2$  et  $q' = a_0 X_0^2 + \cdots + a_N X_N^2$ . Par critère jacobien, la lissité de  $Z$  signifie que les  $a_i$  sont distincts.

Notons  $PG = \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  et  $G$  son image réciproque dans  $GL_{N+1}$  : on a une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow G \rightarrow PG \rightarrow 0$ . On note  $A = k[\varepsilon]/\varepsilon^2$  les nombres duaux de sorte que l'espace tangent à  $GL_{N+1}$  en  $\text{Id}$  s'identifie aux matrices de la forme  $(\text{Id} + \varepsilon M) \in GL_{N+1}(A)$ . Soit  $v$  un vecteur tangent à  $PG$  en  $\text{Id}$ . Par lissité de  $G \rightarrow PG$ , on le relève en  $g = \text{Id} + \varepsilon M \in G(A)$  un vecteur tangent à  $G$  en  $\text{Id}$ . On note  $(m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N} \in k$  les coefficients de la matrice  $M$ .

Par la proposition 2.1.7 (ii),  $H^0(\mathbb{P}_k^N, \mathcal{I}_Z(2))$  est de dimension 2, engendré par  $q$  et  $q'$ . Ainsi, par changement de base par le morphisme plat  $k \rightarrow A$ ,  $H^0(\mathbb{P}_A^N, \mathcal{I}_{Z_A}(2))$  est un  $A$ -module libre de rang 2, engendré par  $q$  et  $q'$ . La matrice  $g = \text{Id} + \varepsilon M$  agit sur  $H^0(\mathbb{P}_A^N, \mathcal{O}(2))$  en préservant ce sous-module, de sorte que  $q \circ g$  et  $q' \circ g$  sont combinaisons à coefficients dans  $A$  de  $q$  et  $q'$ . En calculant les termes constants (sans  $\varepsilon$ ), on voit qu'il existe  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$  tels que ces relations soient de la forme suivante :

$$q \circ g = (1 + \varepsilon\alpha)q + \varepsilon\beta q' \quad (4.5)$$

$$q' \circ g = \varepsilon\gamma q + (1 + \varepsilon\delta)q' \quad (4.6)$$

Comme aucun monôme  $X_i X_j$  avec  $i \neq j$  n'intervient dans le terme de droite de (4.5), on obtient  $m_{i,j} + m_{j,i} = 0$  pour  $i \neq j$ . Procédant de même avec (4.6), on obtient  $a_i m_{i,j} + a_j m_{j,i} = 0$  pour  $i \neq j$ . Comme  $a_i \neq a_j$  pour  $i \neq j$ , cela montre  $m_{i,j} = 0$  pour  $i \neq j$ .

La relation (4.5) s'écrit alors  $m_{i,i} = \alpha + \beta a_i$  pour  $0 \leq i \leq N$ . De même, la relation (4.6) s'écrit  $a_i m_{i,i} = \gamma + \delta a_i$  pour  $0 \leq i \leq N$ . De ces deux relations, il vient que, pour  $0 \leq i \leq N$ ,  $\beta a_i^2 + (\alpha - \delta)a_i - \gamma = 0$ . Les  $a_i$  sont alors  $N + 1$  racines distinctes d'un polynôme de degré 2. Ce polynôme est donc nul : en particulier,  $\beta = 0$  et  $m_{i,i} = \alpha$  pour tout  $i$ .

On a montré que  $M$  est une homothétie, donc que  $g$  est en fait tangent à  $\mathbb{G}_m$ . Par conséquent,  $v = 0$ , et l'espace tangent de  $PG$  en  $\text{Id}$  est bien trivial.  $\square$

**Proposition 4.3.8.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique 2,  $N \geq 3$  impair, et  $Z \subset \mathbb{P}_k^N$  une intersection complète lisse de deux quadriques. Alors l'espace tangent en  $\text{Id}$  de  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  est de dimension  $\geq \frac{N-1}{2}$ .*

**Preuve.** Soient  $Z = \{q = q' = 0\}$  des équations de  $Z$ . Notons  $b$  et  $b'$  les formes bilinéaires symétriques associées aux formes quadratiques  $q$  et  $q'$ . Comme la caractéristique de  $k$  est 2, le polynôme  $\det(\lambda b + \mu b')$ , homogène de degré  $N + 1$  en  $\lambda$  et  $\mu$ , est le carré du pfaffien  $\text{pfaff}(\lambda b + \mu b')$ . Comme il suffit de montrer la proposition pour  $Z$  générale, on peut supposer que les racines de ce pfaffien sont distinctes.

Dans ce cas, on peut appliquer [7] Coro. 2.10 : en notant  $N + 1 = 2r$ , il existe un système de coordonnées dans lequel  $Z = \{q = q' = 0\}$  avec  $q = \sum_{i=1}^r X_i Y_i$  et  $q' = \sum_{i=1}^r a_i X_i Y_i + c_i X_i^2 + d_i Y_i^2$ .

On raisonne alors comme dans la preuve de la proposition précédente, dont on conserve les notations. Un vecteur tangent à  $GL_{N+1}$  en  $\text{Id}$  est un élément  $g = \text{Id} + \varepsilon M \in GL_{N+1}(A)$ . S'il préserve le sous- $A$ -module libre de rang 2 de  $H^0(\mathbb{P}_A^N, \mathcal{O}(2))$  engendré par  $q$  et  $q'$ , il préserve  $Z_A = \{q = q' = 0\}$  et est donc tangent à  $G$  en  $\text{Id}$ . Or, si  $D \in M_r(k)$  est diagonale, et si on note

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

on vérifie par calcul que  $g = \text{Id} + \varepsilon M$  préserve ce sous-module, de sorte que  $g$  est tangent à  $G$  en  $\text{Id}$ . Ceci montre que l'espace de tangent de  $G$  en  $\text{Id}$  est de

dimension  $\geq r = \frac{N+1}{2}$ . De la suite exacte  $0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow G \rightarrow PG \rightarrow 0$ , on déduit que l'espace tangent de  $PG$  en  $\text{Id}$  est de dimension  $\geq \frac{N-1}{2}$ , comme voulu.  $\square$

### 4.3.4 Fin de la preuve

Montrons finalement le théorème 4.2.1.

#### Preuve du théorème 4.2.1.

On se ramène au cas où  $k$  est algébriquement clos ; pour cela, on note  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ . Par description de leurs foncteurs des points,  $\text{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}}) = \text{Aut}_k(Z)_{\bar{k}}$ . Ainsi, le  $k$ -schéma en groupes  $\text{Aut}_k(Z)$  est de dimension nulle (resp. fini, resp. lisse, resp. de dimension nulle et réduit) si et seulement si le  $\bar{k}$ -schéma en groupes  $\text{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}})$  l'est. Le seul point non trivial dans cette assertion est le fait que si  $\text{Aut}_k(Z)$  est réduit de dimension nulle,  $\text{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}})$  est réduit. Mais si c'est le cas, la composante connexe de l'identité de  $\text{Aut}_k(Z)$  est un  $k$ -schéma connexe de dimension nulle donc ponctuel, réduit donc isomorphe au spectre d'un corps, avec un  $k$ -point donc  $k$ -isomorphe à  $\text{Spec}(k)$ . Par conséquent, la composante connexe de l'identité de  $\text{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}})$  est  $\text{Spec}(\bar{k})$ . Par homogénéité sous l'action des  $\bar{k}$ -points de  $\text{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}})$ , toutes ses composantes connexes sont isomorphes à  $\text{Spec}(\bar{k})$ , donc réduites. Le même raisonnement permet de comparer  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  et  $\text{Aut}_{\bar{k}}(Z_{\bar{k}}, \mathcal{O}(1))$ . Dans la suite, on suppose donc  $k$  algébriquement clos.

Commençons par montrer que si  $n \geq 2$  et si l'on n'est pas dans le cas (iv),  $\text{Aut}_k(Z) = \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ . Pour cela, soient  $T$  un  $k$ -schéma et  $f \in \text{Aut}_k(Z)(T)$  un  $T$ -automorphisme de  $Z_T$ . Il faut montrer que le diagramme (4.1) commute. Raisonnant composante connexe par composante connexe, on peut supposer  $T$  connexe. Remarquons tout d'abord que, comme  $n \geq 2$ , la proposition 2.1.6 montre que l'espace tangent en l'identité  $H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$  à  $\mathbf{Pic}_{Z/k}$  est nul, de sorte que  $\mathbf{Pic}_{Z_T/T}$  est réunion de composantes connexes  $T$ -isomorphes à  $T$ . Les sections  $\lambda_T$  et  $f^* \circ \lambda_T$  sont nécessairement des isomorphismes sur l'une de ces composantes connexes : ainsi, pour qu'elles coïncident, il suffit qu'elles coïncident en un point géométrique. On est donc ramenés à vérifier que, sous nos hypothèses, un automorphisme  $f$  d'une intersection complète lisse  $Z$  sur un corps algébriquement clos préserve  $\mathcal{O}(1)$ . Si  $n \geq 3$ , par théorème de Lefschetz,  $\mathcal{O}(1)$  est l'unique générateur ample du groupe de Picard de  $Z$ , et est donc préservé par  $f$ . Si  $n = 2$ , mais qu'on n'est pas dans le cas (iv), [1] Exposé XI, Th. 1.8 montre que  $\mathcal{O}(1)$  est l'unique générateur ample du sous-groupe du groupe de Picard de  $Z$  constitué des fibrés en droites dont un multiple est proportionnel au diviseur canonique ; cette caractérisation montre qu'il est préservé par  $f$ .

D'autre part, par la proposition 4.3.5, si l'on n'est pas dans un des cas (i), (ii) ou (v),  $H^0(Z, T_Z) = 0$ . Comme cet espace vectoriel s'identifie à l'espace tangent en l'identité de  $\text{Aut}_k(Z)$ ,  $\text{Aut}_k(Z)$  est alors un schéma en groupes réduit de dimension 0.

Ces deux faits, combinés aux résultats généraux du paragraphe 4.1, montrent le théorème sauf dans les cas (i), (ii), (iii) et (v) qu'on discute à présent.

Le cas (i) des quadriques est conséquence de la proposition 4.3.6.

Le cas (iii) des courbes de genre  $\geq 2$  est également classique, mais donnons un argument. Comme  $T_Z$  est un fibré en droites anti-ample,  $H^0(Z, T_Z) = 0$ , de sorte que  $\text{Aut}_k(Z)$  est réduit de dimension 0. Pour montrer que ce schéma en groupes est fini, on peut remarquer que, comme un automorphisme préserve  $3K_Z$ ,  $\text{Aut}_k(Z) = \text{Aut}_k(Z, 3K_Z)$ . Alors, en considérant le plongement tricanonique de  $Z$  et en procédant comme au paragraphe 4.1.4, on réalise  $\text{Aut}_k(Z)$  comme un sous-schéma en groupes d'un groupe linéaire, de sorte qu'il est de type fini, donc fini. Enfin,  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  est fini réduit comme sous-schéma en groupes de  $\text{Aut}_k(Z)$ .

Dans le cas (ii),  $Z$  est une courbe de genre 1. La courbe elliptique  $E$  sous-jacente agit par translations sur  $Z$ . Comme  $h^0(Z, T_Z) = h^0(Z, \mathcal{O}_Z) = 1$ , on voit que  $E$  s'identifie à la composante connexe de l'identité de  $\text{Aut}_k(Z)$ . Finalement, le groupe des composantes connexes de  $\text{Aut}_k(Z)$  est fini par [67], Theorem 10.1. Il reste à déterminer le schéma en groupes  $E \cap \text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$ . Il est expliqué dans [33] 11.7 p. 342 que c'est  $E[3]$  (resp.  $E[4]$ ) si  $N = 2$ ,  $c = 1$  et  $d_1 = 3$  (resp. si  $N = 3$ ,  $c = 2$  et  $d_1 = d_2 = 2$ ). Le Corollary 6.4 de [67] permet de comparer le degré et le cardinal de ce sous-groupe, et donc de vérifier qu'il est non réduit si et seulement si  $p = 3$  (resp.  $p = 2$ ).

Traitons enfin le cas (v). On note  $H$  le schéma de Hilbert des intersections complètes lisses construit en 2.2. Le théorème 3.1.1 montre la propriété de l'action de  $PGL_{N+1}$  sur  $H$ . La description de  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  comme sous-groupe de  $PGL_{N+1}$  montre qu'il s'identifie au stabilisateur de  $[Z] \in H(k)$  pour cette action : il est donc propre. Comme il est affine comme sous-groupe fermé d'un groupe affine, il est fini. La proposition 4.3.7 montre que si  $p \neq 2$ , l'espace tangent en l'identité de  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  est trivial, de sorte que ce schéma en groupes est fini et réduit. La proposition 4.3.8 montre, elle, que si  $p = 2$ , l'espace tangent en l'identité de ce groupe est non trivial, de sorte que ce schéma en groupes est fini mais non réduit.  $\square$

## 4.4 Propriété de Deligne-Mumford

On note  $\mathcal{M}$  le champ de modules des intersections complètes lisses polarisées par  $\mathcal{O}(1)$ . On étudie ici quand il est de Deligne-Mumford.

**Proposition 4.4.1.** *Le champ  $\mathcal{M}$  est de Deligne-Mumford sauf dans les cas suivants :*

- (i) Si  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ .
- (ii) Si  $N = 2$ ,  $c = 1$ ,  $d_1 = 3$ , auquel cas il est de Deligne-Mumford au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{3}])$ .
- (iii) Si  $N = 3$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$ , auquel cas il est de Deligne-Mumford au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ .
- (iv) Si  $N \geq 5$  est impair,  $c = 2$ ,  $d_1 = d_2 = 2$ , auquel cas il est de Deligne-Mumford au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ .

**Preuve.** Soient  $k$  un corps algébriquement clos et  $Z$  une intersection complète lisse sur  $k$ . La description de  $\text{Aut}_k(Z, \mathcal{O}(1))$  comme sous-groupe de  $PGL_{N+1}$  montre qu'il s'identifie au stabilisateur de  $[Z] \in H(k)$  pour l'action de  $PGL_{N+1}$  par changement de coordonnées. Le théorème 4.2.1 permet de décider quand ce schéma en groupes sur  $k$  est fini et réduit, et donc d'appliquer le critère 1.3.3 pour montrer la proposition.  $\square$

# Chapitre 5

## Quasi-projectivité

### 5.1 Introduction

#### 5.1.1 Conventions

Dans ce chapitre, sauf s'il est explicitement fait mention du contraire, tous les schémas que nous considérerons seront définis sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . En particulier,  $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^N$ .

Par abus de notation, quand on sera amenés à manipuler un point géométrique, on notera toujours  $K$  le corps algébriquement clos sur lequel il est défini.

Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau localement libre sur un schéma, le fibré vectoriel géométrique associé à  $\mathcal{F}$  est celui dont le faisceau des sections est  $\mathcal{F}^\vee$ . Par  $\mathbb{G}(r, \mathcal{F})$ , on désignera la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de rang  $r$  de ce fibré vectoriel géométrique. Quand  $r = 1$ , on notera aussi ce schéma  $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ .

#### 5.1.2 Énoncé des théorèmes principaux

On fixe  $N \geq 2$ ,  $1 \leq c \leq N - 1$  et  $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$  des entiers. En l'absence d'indication contraire, une intersection complète sur un corps  $k$ , sera toujours de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}_k^N$  et de degrés  $d_1, \dots, d_c$ .

Notons  $H$  le schéma de Hilbert des intersections complètes lisses, et  $\mathcal{M} = [PGL_{N+1} \backslash H]$  le champ de modules des intersections complètes lisses polarisées par  $\mathcal{O}(1)$  (voir les parties 2.2 et 2.3). Si l'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ , le théorème 3.1.1 montre que le champ  $\mathcal{M}$  est séparé. De manière équivalente, par le lemme 3.1.3,  $PGL_{N+1}$  agit proprement sur  $H$ .

Comme expliqué dans le corollaire 3.1.2, le théorème de Keel et Mori montre alors que  $\mathcal{M}$  admet un espace de modules grossier  $M$ . De plus,  $M$  est un quotient géométrique de  $H$  par  $PGL_{N+1}$  (voir par exemple [62]). On s'intéresse dans ce texte aux propriétés de l'espace algébrique  $M$  : est-ce un schéma ? Un schéma quasi-projectif ? Un schéma affine ?

Les deux résultats que l'on montre dans cette direction sont les suivants.

**Théorème 5.1.1.** *Supposons que  $d_1 = \dots = d_c$  et que l'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ . Alors  $M$  est un schéma affine.*

**Théorème 5.1.2.** *Supposons que  $c \geq 2$ , que  $d_1 < d_2 = \dots = d_c$  et que*

$$d_2(N - c + 2) > d_1((c - 1)(d_2 - d_1) + 1).$$

*Alors  $M$  est un schéma quasi-projectif.*

En caractéristique nulle, la quasi-projectivité d'un espace de modules de variétés polarisées dont le fibré canonique est ample est connue par les travaux de Viehweg [69].

Montrons que si  $c \geq 2$  et  $d_1 < d_2 = \dots = d_c$ , et que le fibré canonique des intersections complètes considérées n'est pas ample, l'hypothèse du théorème 5.1.2 est vérifiée. En effet, on a  $N+1 \geq (c-1)d_2+d_1 \geq (c-1)(d_2-d_1)+(c-1)+d_1$ . Ainsi,  $d_2(N - c + 2) \geq d_2(c - 1)(d_2 - d_1) + d_2d_1 > d_1((c - 1)(d_2 - d_1) + 1)$ .

On déduit donc des résultats de Viehweg et des deux théorèmes 5.1.1 et 5.1.2 le corollaire suivant :

**Corollaire 5.1.3.** *En caractéristique nulle, si  $d_1 \leq d_2 = \dots = d_c$  et si l'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ ,  $M$  est un schéma quasi-projectif.*

### 5.1.3 Stratégie de la preuve

Remarquons avant tout que, comme  $SL_{N+1} \rightarrow PGL_{N+1}$  est un morphisme fini,  $SL_{N+1}$  agit proprement sur  $H$ . De plus, il est immédiat que  $M$  est également un quotient grossier et un quotient géométrique pour cette action. Pour ces raisons, on considérera dans la suite de ce chapitre l'action de  $SL_{N+1}$  au lieu de celle de  $PGL_{N+1}$ , car elle sera plus facile à manipuler.

Pour montrer le théorème 5.1.1 (resp. 5.1.2), on va construire, à l'aide de la théorie géométrique des invariants, un quotient géométrique affine (resp. quasi-projectif) de  $H$  par  $SL_{N+1}$ . On conclut grâce à un résultat de Kollár ([41] Corollary 2.15) : un quotient géométrique pour une action propre est unique. Notre référence pour la théorie géométrique des invariants sur un corps de caractéristique 0 est [57]. Le fait que les résultats de ce livre restent valable sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  est conséquence de [66]. À ce sujet, on pourra consulter [57] Appendix 1G.

Tout d'abord, si  $d_1 \leq d_2 = \dots = d_c$ , on verra que la construction explicite de  $H$  réalisée au paragraphe 2.2.2 fournit une compactification équivariante de  $H$ , qu'on notera  $\bar{H}$ . L'existence de cette compactification est la raison pour laquelle on se limite, dans les théorèmes 5.1.1 et 5.1.2, à des intersections complètes vérifiant  $d_1 \leq d_2 = \dots = d_c$ .

Sous les hypothèses du théorème 5.1.1, la description explicite de  $H$  et  $\bar{H}$  montre que  $H$  est affine (car  $\bar{H} \setminus H$  est un diviseur ample dans  $\bar{H}$ ), et la théorie géométrique des invariants permet de construire un quotient géométrique affine de  $H$  par  $SL_{N+1}$ . En revanche, on verra au paragraphe 5.4.3.1 que cet argument ne permet pas de démontrer le théorème 5.1.2 (plus précisément, si  $c = 2$  et  $d_1 < d_2$ ,  $\bar{H} \setminus H$  n'est jamais un diviseur ample dans  $\bar{H}$ ).



Pour prouver le théorème 5.1.2, on va construire un quotient géométrique quasi-projectif de  $H$  par  $SL_{N+1}$  en appliquant le critère d'Hilbert-Mumford. Il faut pour cela faire le choix d'une compactification équivariante de  $H$  et d'un fibré en droites ample  $SL_{N+1}$ -linéarisé sur celle-ci. On choisit la compactification  $\bar{H}$  mentionnée ci-dessus ; les fibrés en droites sur celle-ci possèdent une unique linéarisation (paragraphe 5.4.1.3). On détermine quels sont les fibrés en droites amples sur  $\bar{H}$  (proposition 5.4.6). Il reste à décider s'il existe un fibré en droites ample sur  $\bar{H}$  rendant tous les points de  $H$  stables. Le critère d'Hilbert-Mumford permet de décider exactement pour quelles valeurs des degrés  $d_i$  cela se produit (proposition 5.4.13) ; c'est l'origine de l'hypothèse artificielle sur les degrés dans l'énoncé du théorème 5.1.2.

Ces arguments n'utilisent pas la séparation de  $\mathcal{M}$ . Par [57] Corollary 2.5, ils permettent en fait de la redémontrer sous les hypothèses des théorèmes 5.1.1 ou 5.1.2 (voir les remarques 5.3.1 et 5.4.14).

### 5.1.4 Plan du chapitre

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on montre le théorème 5.2.1. C'est une inégalité qui interviendra dans les trois parties suivantes ; c'est notamment elle qui permettra de vérifier le critère d'Hilbert-Mumford.

La troisième partie est consacrée à la preuve du théorème 5.1.1. L'argument est dû à Mumford ([57] Prop. 4.2) dans le cas des hypersurfaces. On remarque également rapidement que, si l'on avait voulu vérifier directement le critère d'Hilbert-Mumford, l'inégalité 5.2.1 serait intervenue.

La quatrième partie est consacrée à la preuve du théorème 5.1.2 suivant la stratégie décrite au paragraphe 5.1.3 . L'inégalité 5.2.1 intervient de manière cruciale dans la vérification du critère d'Hilbert-Mumford.

Enfin, dans la cinquième partie, on discute une méthode qui pourrait permettre de montrer la quasi-projectivité de  $M$  sans hypothèses sur les degrés  $d_i$ . Il s'agit de l'approche, initiée par Mumford, qui consiste à construire un quotient géométrique de  $H$  par l'action de  $SL_{N+1}$  en appliquant le critère d'Hilbert-Mumford à la compactification de  $H$  donnée par le schéma de Hilbert de  $\mathbb{P}^N$ , et aux fibrés en droites amples équivariants sur celui-ci donnés par divers plongements de Plücker. Autrement dit, on se demande si les intersections complètes lisses sont Hilbert-stables. Je ne connais pas la réponse à cette question, mais on remarque que l'inégalité qu'il faudrait prouver pour le vérifier est plus forte que l'inégalité 5.2.1. Autrement dit, le théorème 5.2.1 est un résultat positif dans cette direction.

## 5.2 Minoration du $\alpha$ -degré

### 5.2.1 Notations

On fixe un corps algébriquement clos  $K$ .

Dans cette partie et dans cette partie seulement, on peut autoriser  $N \geq 1$  et  $1 \leq c \leq N$ . On rappelle que  $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$  sont des entiers, et qu'une intersection complète sur un corps  $k$  est, sauf mention explicite du contraire, de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}_k^N$  et de degrés  $d_1, \dots, d_c$ .

Si  $\alpha$  est la donnée d'entiers  $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$  non tous nuls de somme nulle, le  $\alpha$ -degré d'un monôme  $M = X_0^{\lambda_0} \dots X_N^{\lambda_N}$  est  $\deg_\alpha(M) = \sum_i \alpha_i \lambda_i$ . Si  $F \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d))$  est une équation non nulle, on note  $\deg_\alpha(F)$  le plus grand  $\alpha$ -degré des monômes intervenant dans  $F$ . Par convention,  $\deg_\alpha(0) = -\infty$ . Soit  $F^\alpha$  la somme des termes de  $F$  de  $\alpha$ -degré  $\deg_\alpha(F)$ . On dit que  $F$  est  $\alpha$ -homogène si  $F = F^\alpha$ .

### 5.2.2 L'inégalité

Le résultat principal de cette partie est l'inégalité suivante :

**Théorème 5.2.1.** (i) Soient  $k_1, \dots, k_c$  des nombres réels tels que :

$$\min_{1 \leq i \leq c} k_i \geq \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^c k_i. \quad (5.1)$$

Alors si  $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$  sont des entiers non tous nuls de somme nulle et si  $F_1, \dots, F_c$  constituent une suite régulière globale définissant une intersection complète lisse, on a :

$$\sum_{i=1}^c k_i \frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i} \geq 0. \quad (5.2)$$

(ii) Supposons qu'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ . Alors si l'inégalité (5.1) est stricte, l'inégalité (5.2) est stricte.

(iii) Les énoncés (i) et (ii) sont optimaux au sens où ils seraient faux pour d'autres valeurs des  $k_i$ .

*Remarque 5.2.2.* Précisons le sens de (iii). Dire que l'énoncé (i) est optimal signifie que si  $k_1, \dots, k_c$  sont des réels ne vérifiant pas (5.1), il existe des entiers non tous nuls de somme nulle  $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$  et une suite régulière globale  $F_1, \dots, F_c$  définissant une intersection complète lisse tels que l'inégalité (5.2) soit fausse. L'assertion concernant l'énoncé (ii) est analogue.

L'inégalité 5.2.1 permet de minorer les  $\alpha$ -degrés des équations d'une intersection complète lisse. Son heuristique est la suivante : si les  $\alpha$ -degrés des équations d'une intersection complète sont petits, cela signifie que beaucoup de monômes n'interviennent pas dans ces équations. Ce fait doit permettre de montrer, via le critère jacobien, que cette intersection complète est en fait singulière.

Le paragraphe 5.2.3 est constitué de résultats préliminaires autour du lien entre  $\alpha$ -degré d'une équation  $F$  et singularités de  $\{F = 0\}$  ; le paragraphe 5.2.4 est consacré à la preuve du théorème 5.2.1.

### 5.2.3 Étude d'une équation

On fixe dans tout ce paragraphe un entier  $d \geq 2$  et  $F \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d))$  une équation non nulle.

#### 5.2.3.1 Lien entre $\alpha$ -degré et singularités

Le lemme suivant permettra de faire le lien entre la géométrie de l'hypersurface  $\{F = 0\}$  et le  $\alpha$ -degré  $\deg_\alpha(F)$ .

**Lemme 5.2.3.** *Soient  $u, v$  et  $s$  des entiers tels que  $u, v \geq 0$ ,  $s \geq 0$  et  $u + v = N - s$ . Alors, si  $\deg_\alpha(F) < \alpha_u + (d - 1)\alpha_v$ ,*

$$\dim(\text{Sing}(\{F = 0\}) \cap \{X_0 = \cdots = X_{v-1} = 0\}) \geq s.$$

**Preuve.** Comme  $d \geq 2$  et les  $\alpha_i$  sont croissants, quitte à échanger  $u$  et  $v$ , on peut supposer que  $u \leq v$ .

Écrivons alors  $F = X_0 P_0 + \cdots + X_N P_N$ , où  $P_i$  ne dépend pas de  $X_0, \dots, X_{i-1}$ . L'hypothèse  $\deg_\alpha(F) < \alpha_u + (d - 1)\alpha_v$  montre que si  $i \geq u$ ,  $P_i$  ne dépend que de  $X_0, \dots, X_{v-1}$ .

Posons  $Z = \{X_0 = \cdots = X_{v-1} = P_0 = \cdots = P_{u-1} = 0\}$ . Si  $i \leq v - 1$ ,  $X_i$  est nul sur  $Z$ . Si  $i \geq v$ , on a  $i \geq u$ , de sorte que  $P_i$ , qui ne dépend que de  $X_0, \dots, X_{v-1}$ , est nul sur  $Z$ . Par conséquent  $F = \sum_{i=0}^N X_i P_i$  est nul sur  $Z$ .

De même, pour  $0 \leq j \leq N$ , on peut écrire  $\frac{\partial F}{\partial X_j} = P_j + \sum_{i=0}^N X_i \frac{\partial P_i}{\partial X_j}$ . En distinguant comme ci-dessus suivant que  $i \leq v - 1$  ou  $i \geq v$ , on voit que  $X_i \frac{\partial P_i}{\partial X_j}$  s'annule sur  $Z$ . De plus, si  $j < u$ ,  $P_j$  est nul sur  $Z$  et si  $j \geq u$ ,  $P_j$  qui ne dépend que de  $X_0, \dots, X_{v-1}$ , est également nul sur  $Z$ . Sommant, on voit que  $\frac{\partial F}{\partial X_j}$  est nul sur  $Z$ .

On a montré que  $F$  et tous les  $\frac{\partial F}{\partial X_j}$  s'annulent sur  $Z$ , de sorte que, par le critère jacobien,  $Z \subset \text{Sing}(\{F = 0\})$ . Comme, par le théorème de l'intersection projective,  $\dim(Z) \geq N - u - v = s$ , le lemme est démontré.  $\square$

#### 5.2.3.2 L'entier $s(F)$

Le lemme 5.2.3 ci-dessus motive la définition suivante.

**Définition 5.2.4.** On note  $s(F)$  le plus petit entier  $s \in \{-1, \dots, N - 1\}$  tel que, si  $u, v \geq 0$  sont des entiers avec  $u + v = N - s - 1$ , on a  $\deg_\alpha(F) \geq \alpha_u + (d - 1)\alpha_v$ .

Comme le plus petit  $\alpha$ -degré possible d'un monôme de degré  $d$  est  $d\alpha_0$ , on a  $\deg_\alpha(F) \geq d\alpha_0$ , de sorte que  $s(F)$  est bien défini.

*Remarque 5.2.5.* Le lemme 5.2.3 montre que  $\dim(\text{Sing}(\{F = 0\})) \geq s(F)$ . L'entier  $s(F)$  mesure la dimension attendue, connaissant  $\deg_\alpha(F)$ , du lieu singulier de  $\{F = 0\}$ .

On peut alors minorer le  $\alpha$ -degré des équations telles que  $s(F) = -1$ .

**Lemme 5.2.6.** *Supposons que  $s(F) = -1$ . Alors,  $\deg_\alpha(F) \geq 0$ .*

*De plus, cette inégalité est stricte si  $d \geq 3$ .*

**Preuve.** On calcule :

$$\begin{aligned} N \deg_\alpha(F) &\geq (\alpha_0 + (d-1)\alpha_N) + \cdots + (\alpha_{N-1} + (d-1)\alpha_1) \text{ car } s(F) = -1 \\ &= -\alpha_N - (d-1)\alpha_0 \text{ car } \sum_i \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{d-1} \deg_\alpha(F) &\geq \frac{1}{d-1}\alpha_0 + \alpha_N \text{ car } s(F) = -1. \end{aligned}$$

Sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$(N + \frac{1}{d-1}) \deg_\alpha(F) \geq -(d-1 - \frac{1}{d-1})\alpha_0,$$

ce qui se réécrit :

$$\deg_\alpha(F) \geq -\frac{d(d-2)}{Nd-N+1}\alpha_0.$$

Ceci prouve le lemme car  $d \geq 2$  et  $\alpha_0 < 0$  (les  $\alpha_i$  sont croissants non tous nuls de somme nulle).  $\square$

### 5.2.3.3 Les entiers $v_s(F)$

Pour minorer le  $\alpha$ -degré d'équations avec  $s(F) \geq 0$ , on introduit la définition suivante :

**Définition 5.2.7.** Supposons que  $0 \leq s \leq s(F)$ . On note  $v_s(F)$  le plus grand entier  $v \in \{0, \dots, N-s\}$  tel que

$$\deg_\alpha(F) < \alpha_{N-v_s(F)-s} + (d-1)\alpha_{v_s(F)}.$$

**Lemme 5.2.8.** Soit  $0 \leq s \leq s(F)$ . Alors  $v_s(F)$  est bien défini et

$$v_s(F) \geq \frac{N + s(F) - 2s}{2}.$$

De plus, si  $0 < s \leq s(F)$ , on a  $v_{s-1}(F) \geq v_s(F) + 1$ .

**Preuve.** Par définition de  $s(F)$ , et comme  $s(F) \geq 0$ , il existe  $u, v \geq 0$  tels que  $u + v = N - s(F)$  et  $\deg_\alpha(F) < \alpha_u + (d-1)\alpha_v$ . Comme  $d \geq 2$  et que les  $\alpha_i$  sont croissants, quitte à échanger  $u$  et  $v$ , on peut supposer  $v \geq u$ , soit  $v \geq \frac{N-s(F)}{2}$ . Alors, si  $v' = v + s(F) - s$ , comme les  $\alpha_i$  sont croissants, on a  $\deg_\alpha(F) < \alpha_u + (d-1)\alpha_{v'}$ .

Ceci montre d'une part l'existence de  $v_s(F)$  et d'autre part que  $v_s(F) \geq v' \geq \frac{N-s(F)}{2} + s(F) - s = \frac{N+s(F)-2s}{2}$ .

Finalement, supposons  $0 < s \leq s(F)$ . Comme  $\deg_\alpha(F) < \alpha_{N-s-v_s(F)} + (d-1)\alpha_{v_s(F)}$ , par croissance des  $\alpha_i$ , on obtient  $\deg_\alpha(F) < \alpha_{N-s-v_s(F)} + (d-1)\alpha_{v_s(F)+1}$ , ce qui montre que  $v_{s-1}(F) \geq v_s(F) + 1$ .  $\square$

*Remarque 5.2.9.* Le lemme 5.2.3 montre que si  $0 \leq s \leq s(F)$ ,

$$\dim(\text{Sing}(\{F = 0\}) \cap \{X_0 = \cdots = X_{v_s(F)-1} = 0\}) \geq s.$$

Les entiers  $v_s(F)$  mesurent, connaissant  $\deg_\alpha(F)$ , comment on peut s'attendre à ce que les singularités de  $\{F = 0\}$  se situent par rapport au drapeau  $\emptyset \subset \{X_0 = \cdots = X_{N-1} = 0\} \subset \cdots \subset \{X_0 = 0\} \subset \mathbb{P}_K^N$ .

On dispose de l'estimation suivante sur le  $\alpha$ -degré d'équations avec  $s(F) \geq 0$  :

**Lemme 5.2.10.** *Supposons que  $s(F) \geq 0$ . Alors,*

$$\frac{\deg_\alpha(F)}{d} \geq -\frac{\sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}}{N - s(F)}.$$

**Preuve.** Par définition de  $v_0(F)$ , on a :

$$(N - v_0(F)) \deg_\alpha(F) \geq (\alpha_0 + (d-1)\alpha_N) + \cdots + (\alpha_{N-v_0(F)-1} + (d-1)\alpha_{v_0(F)+1}). \quad (5.3)$$

Pour  $0 < s \leq s(F)$ , par définition de  $v_s(F)$ , et comme  $v_{s-1}(F) \geq v_s(F) + 1$  par le lemme 5.2.8, on a :

$$(v_{s-1}(F) - v_s(F) - 1) \deg_\alpha(F) \geq (\alpha_{N-s-v_{s-1}(F)+1} + (d-1)\alpha_{v_{s-1}(F)-1}) + \cdots + (\alpha_{N-s-v_s(F)-1} + (d-1)\alpha_{v_s(F)+1}). \quad (5.4)$$

Le lemme 5.2.8 montre que  $2v_s(F) + s(F) - N \geq 0$ . Ceci permet d'écrire, utilisant la définition de  $s(F)$  :

$$(2v_s(F) + s(F) - N) \deg_\alpha(F) \geq (\alpha_{N-s(F)-v_s(F)} + (d-1)\alpha_{v_s(F)-1}) + \cdots + (\alpha_{v_s(F)-1} + (d-1)\alpha_{N-s(F)-v_s(F)}). \quad (5.5)$$

Sommant deux fois l'inégalité (5.3), deux fois les inégalités (5.4) et l'inégalité (5.5), on obtient :

$$(N - s(F)) \deg_\alpha(F) \geq 2(\alpha_0 + \cdots + \alpha_{N-s(F)-v_s(F)-1}) + d(\alpha_{N-s(F)-v_s(F)} + \cdots + \alpha_{v_s(F)-1}) + (2d-2)(\alpha_{v_s(F)} + \cdots + \alpha_N) - (2d-2) \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}. \quad (5.6)$$

Remarquons alors que :

$$0 \geq [\alpha_0 + \cdots + \alpha_{N-s(F)-v_s(F)-1}] - [\alpha_{v_s(F)} + \cdots + \alpha_N - \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}].$$

En effet, chacun des crochets est une somme de  $N - s(F) - v_s(F)$  des  $\alpha_i$ . Les indices intervenant dans le premier crochet sont tous plus petits que les

indices intervenant dans le second, de sorte que l'on conclut par croissance des  $\alpha_i$ .

Multipliant cette équation par  $(d-2) \geq 0$ , et l'ajoutant à (5.6), on obtient :

$$(N - s(F)) \deg_{\alpha}(F) \geq d(\alpha_0 + \cdots + \alpha_N) - d \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}.$$

Comme les  $\alpha_i$  sont de somme nulle, cela prouve l'inégalité recherchée :

$$\frac{\deg_{\alpha}(F)}{d} \geq - \frac{\sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}}{N - s(F)}.$$

□

Finalement, montrons une propriété de positivité des  $\alpha_{v_s(F)}$  qui sera cruciale dans la preuve de l'inégalité 5.2.1.

**Lemme 5.2.11.** *Supposons que  $s(F) \geq 0$ . Alors*

$$\alpha_{v_s(F)} + \frac{\sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}}{N - s(F)} > 0.$$

**Preuve.** En sommant les inégalités (5.3) et (5.4) de la preuve du lemme 5.2.10, on obtient :

$$\begin{aligned} (N - s(F) - v_s(F)) \deg_{\alpha}(F) &\geq (\alpha_0 + \cdots + \alpha_{N-s(F)-v_s(F)-1}) \\ &+ (d-1)(\alpha_{v_s(F)} + \cdots + \alpha_N) - (d-1) \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Par définition de  $v_s(F)$ ,  $\deg_{\alpha}(F) < \alpha_{N-s(F)-v_s(F)} + (d-1)\alpha_{v_s(F)}$ . Comme, par le lemme 5.2.8,  $N - s(F) - v_s(F) \leq v_s(F)$ , la croissance des  $\alpha_i$  montre  $\deg_{\alpha}(F) < d\alpha_{v_s(F)}$ . Combinons ce fait avec l'inégalité (5.7), puis utilisons le fait que  $d \geq 2$  et que les  $\alpha_i$  sont croissants.

$$\begin{aligned} (N-s(F) - v_s(F))d\alpha_{v_s(F)} + (d-1) \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)} \\ &> (\alpha_0 + \cdots + \alpha_{N-s(F)-v_s(F)-1}) + (d-1)(\alpha_{v_s(F)} + \cdots + \alpha_N) \\ &\geq (d-1)(\alpha_0 + \cdots + \alpha_{N-s(F)-v_s(F)-1} + \alpha_{v_s(F)} + \cdots + \alpha_N) \\ &\quad - (N - s(F) - v_s(F))(d-2)\alpha_{v_s(F)}. \end{aligned}$$

Utilisant que les  $\alpha_i$  sont de somme nulle, puis à nouveau leur croissance, on

obtient :

$$\begin{aligned} & (N-s(F) - v_s(F)(F))(2d-2)\alpha_{v_s(F)(F)} + (d-1) \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)} \\ & > -(d-1)(\alpha_{N-s(F)-v_s(F)(F)} + \cdots + \alpha_{v_s(F)(F)-1}) \\ & \geq -(2v_s(F)(F) + s(F) - N)(d-1)\alpha_{v_s(F)(F)}. \end{aligned}$$

Après division par  $(d-1)(N-s(F)) > 0$ , ceci se réécrit comme voulu :

$$\alpha_{v_s(F)(F)} + \frac{\sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}}{N-s(F)} > 0.$$

□

### 5.2.4 Équations d'une intersection complète lisse

On utilise les résultats du paragraphe précédent pour montrer le théorème 5.2.1. On procède en trois temps en prouvant successivement les énoncés (i), (ii) et (iii).

#### 5.2.4.1 Inégalité large

**Preuve du théorème 5.2.1 (i).**

Tout d'abord, en sommant pour  $i \in \{1, \dots, c\}$  les inégalités  $k_i \geq \frac{k_1 + \dots + k_c}{N+1}$ , on montre  $(N+1-c)(k_1 + \dots + k_c) \geq 0$ , donc  $k_1 + \dots + k_c \geq 0$ , et finalement,  $k_i \geq 0$  pour  $i \in \{1, \dots, c\}$ .

On va distinguer deux cas pour montrer le théorème. Le premier est facile : si  $s(F_i) = -1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, c\}$ , le lemme 5.2.6 montre que  $\deg_\alpha(F_i) \geq 0$ . Ainsi,

$$\sum_{i=1}^c k_i \frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i} \geq 0.$$

Supposons au contraire qu'il existe  $l$  tel que  $s(F_l) \geq 0$ . On choisit un tel  $l$  de sorte que  $\frac{\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}}{N-s(F_l)}$  soit maximal. On va construire des entiers  $j_0, \dots, j_s(F_l) \in \{1, \dots, c\}$  distincts tels que, pour  $0 \leq s \leq s(F_l)$ ,

$$\frac{\deg_\alpha(F_{j_s})}{d_{j_s}} \geq \alpha_{v_s(F_l)}. \quad (5.8)$$

Supposons  $j_0, \dots, j_{s-1}$  convenables, et construisons  $j_s$ . Par la remarque 5.2.9,  $\dim(\text{Sing}(\{F_l = 0\}) \cap \{X_0 = \dots = X_{v_s(F_l)-1} = 0\}) \geq s$ . Par le théorème de l'intersection projective, cela implique que  $\dim(\text{Sing}(\{F_l = 0\}) \cap \{X_0 = \dots = X_{v_s(F_l)-1} = F_{j_0} = \dots = F_{j_{s-1}} = 0\}) \geq 0$ . Ce fermé est donc non vide ; on y choisit un point fermé  $P$ . Comme  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$  est une intersection complète lisse, elle ne peut contenir le point singulier  $P$  de  $\{F_l = 0\}$  : il existe  $j_s$  tel que  $F_{j_s}$  soit non nul en  $P$ . Comme  $F_{j_0}, \dots, F_{j_{s-1}}$  s'annulent en

$P, j_s \notin \{j_0, \dots, j_{s-1}\}$ . Enfin, comme  $P \in \{X_0 = \dots = X_{v_s(F_l)-1} = 0\}$ , on a  $\{X_0 = \dots = X_{v_s(F_l)-1} = 0\} \not\subset \{F_{j_s} = 0\}$ . En considérant les monômes intervenant dans  $F_{j_s}$ , on voit que cela implique  $\deg_\alpha(F_{j_s}) \geq d_{j_s} \alpha_{v_s(F_l)}$ , comme voulu.

Soit maintenant  $i \in \{1, \dots, c\}$  quelconque. Montrons que :

$$\frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i} \geq -\frac{\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}}{N - s(F_l)}. \quad (5.9)$$

Si  $s(F_i) \geq 0$ , cela résulte du lemme 5.2.10 et du choix de  $l$ . Si  $s(F_i) = -1$ , on raisonne comme suit. Par le lemme 5.2.11,  $\alpha_{v_{s(F_l)}(F_l)} + \frac{\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}}{N - s(F_l)} > 0$ . Comme, par le lemme 5.2.8,  $\alpha_{v_{s(F_l)}(F_l)}$  est le plus petit des  $(\alpha_{v_s(F_l)})_{0 \leq s \leq s(F_l)}$ , on en déduit :  $\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)} > 0$ . Appliquant le lemme 5.2.6, il vient :  $\frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i} \geq 0 \geq -\frac{\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}}{N - s(F_l)}$ .

On peut alors conclure. Notons  $I = \{j_0, \dots, j_{s(F_l)}\}$  et utilisons les minoration (5.8) pour  $i \in I$  et (5.9) pour  $i \notin I$ . On obtient :

$$\sum_{i=1}^c k_i \frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i} \geq \sum_{s=0}^{s(F_l)} k_{j_s} \alpha_{v_s(F_l)} - \left( \sum_{i \notin I} k_i \right) \frac{\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}}{N - s(F_l)}. \quad (5.10)$$

Montrons que le terme de droite de (5.10) coïncide avec :

$$\sum_{s=0}^{s(F_l)} \left( \alpha_{v_s(F_l)} + \frac{\alpha_{v_0(F_l)} + \dots + \alpha_{v_{s(F_l)}(F_l)}}{N - s(F_l)} \right) \left( k_{j_s} - \frac{k_1 + \dots + k_c}{N + 1} \right). \quad (5.11)$$

Pour cela, on développe (5.11), et on identifie les coefficients des  $k_i$  avec ceux apparaissant dans le terme de droite de (5.10). Si  $i \notin I$ , ce coefficient vaut :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{N + 1} \sum_{s=0}^{s(F_l)} \left( \alpha_{v_s(F_l)} + \frac{\alpha_{v_0(F_l)} + \dots + \alpha_{v_{s(F_l)}(F_l)}}{N - s(F_l)} \right) \\ &= -\frac{1}{N + 1} \left( \frac{s(F_l) + 1}{N - s(F_l)} + 1 \right) \sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)} \\ &= -\frac{1}{N - s(F_l)} \sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}. \end{aligned}$$

Si  $i = j_s \in I$ , un terme supplémentaire apparaît, de sorte que ce coefficient vaut bien :

$$-\frac{1}{N - s(F_l)} \sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)} + \alpha_{v_s(F_l)} + \frac{\alpha_{v_0(F_l)} + \dots + \alpha_{v_{s(F_l)}(F_l)}}{N - s(F_l)} = \alpha_{v_s(F_l)}.$$



Il reste à montrer que (5.11) est positif ou nul. Comme, par le lemme 5.2.8,  $\alpha_{v_s(F_i)}$  est le plus petit des  $(\alpha_{v_s(F_i)})_{0 \leq s \leq s(F_i)}$ , le lemme 5.2.11 montre que le premier facteur des termes de la somme (5.11) est positif. Le second facteur des termes de cette somme est positif ou nul par hypothèse sur les  $k_i$ . On a montré comme souhaité que :

$$\sum_{i=1}^c k_i \frac{\deg_{\alpha}(F_i)}{d_i} \geq 0.$$

□

### 5.2.4.2 Inégalité stricte

**Preuve du théorème 5.2.1 (ii).**

Tout d'abord, en sommant pour  $i \in \{1, \dots, c\}$  les inégalités  $k_i > \frac{k_1 + \dots + k_c}{N+1}$ , on montre  $(N+1-c)(k_1 + \dots + k_c) > 0$ , donc  $k_1 + \dots + k_c > 0$ , et finalement,  $k_i > 0$  pour  $i \in \{1, \dots, c\}$ .

On effectue alors la même preuve qu'au paragraphe 5.2.4.1. Le second cas, où il existe  $i$  tel que  $s(F_i) \geq 0$ , fonctionne identiquement : on obtient une inégalité stricte grâce aux hypothèses plus fortes  $k_i > \frac{k_1 + \dots + k_c}{N+1}$  et à l'inégalité stricte dans le lemme 5.2.11.

Dans le premier cas, où  $s(F_i) = -1$  pour tout  $i$ , on raisonne de même pour montrer que  $\sum_{i=1}^c k_i \frac{\deg_{\alpha}(F_i)}{d_i} \geq 0$ . Comme  $k_i > 0$ , et par le cas de stricte inégalité du lemme 5.2.6, on obtient une inégalité stricte sauf éventuellement si  $d_1 = \dots = d_c = 2$ . L'étude du cas d'égalité montre qu'on peut alors supposer  $\deg_{\alpha}(F_1) = \dots = \deg_{\alpha}(F_c) = 0$  et  $\alpha_i + \alpha_{N-i} = 0$  pour  $0 \leq i \leq N$ .

Traitons ce cas directement ; rappelons que par hypothèse, on a alors  $c \geq 2$ . Soit  $0 \leq r \leq N$  le plus petit entier tel que  $\alpha_r > 0$ . Comme  $\alpha_i + \alpha_{N-i} = 0$ ,  $r' = N - r$  est le plus grand entier tel que  $\alpha_{r'} < 0$ . Comme  $\deg_{\alpha}(F_i) = 0$ , on voit que  $\{X_0 = \dots = X_{r-1} = 0\} \subset \{F_i = 0\}$ , de sorte que  $\{X_0 = \dots = X_{r-1} = 0\}$  est inclus dans l'intersection complète  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$ . Montrons qu'il existe un point de  $\{X_0 = \dots = X_{r-1} = 0\}$  en lequel  $\{F_1 = 0\}$  et  $\{F_2 = 0\}$  ont même espace tangent. Cela contredira la lissité en ce point de  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$ .

Comme  $\deg_{\alpha}(F_1) = 0$ ,  $\frac{\partial F_1}{\partial X_i}([0 : \dots : 0 : x_r : \dots : x_N])$  est nul si  $i > r'$  ; c'est une forme linéaire en  $x_r, \dots, x_N$  si  $i \leq r'$ . Notons  $A_1$  la matrice  $(r' + 1) \times (r' + 1)$  dont les lignes sont les formes linéaires  $(\frac{\partial F_1}{\partial X_i})_{0 \leq i \leq r'}$ . De même, on note  $A_2$  la matrice  $(r' + 1) \times (r' + 1)$  dont les lignes sont les formes linéaires  $(\frac{\partial F_2}{\partial X_i})_{0 \leq i \leq r'}$ . Considérons  $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)$  : c'est un polynôme homogène en  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Comme  $K$  est algébriquement clos, on peut trouver  $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$  tels que  $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = 0$ . Il existe donc  $(x_r, \dots, x_N) \neq (0, \dots, 0)$  tel que  $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(x_r, \dots, x_N) = 0$ . Alors  $\frac{\partial(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)}{\partial X_i}([0 : \dots : 0 : x_r : \dots : x_N]) = 0$  pour tout  $i$  : c'est ce qu'on voulait. □

### 5.2.4.3 Optimalité

**Preuve du théorème 5.2.1 (iii).**

Montrons l'optimalité dans le cas (i) : supposons donnés des réels  $k_1, \dots, k_c$  tels que la conclusion de (i) soit satisfaite. Fixons  $1 \leq j \leq c$ . On choisit  $\alpha_0 = \dots = \alpha_{N-1} = -1$  et  $\alpha_N = N$ . Si  $i \neq j$ , on choisit pour  $F_i$  une équation générique ne faisant pas intervenir la variable  $X_N$  : en particulier  $\deg_\alpha(F_i) = -d_i$ . Par le théorème de Bertini, l'intersection des  $\{F_i = 0\}_{i \neq j}$  a  $[0 : \dots : 0 : 1]$  comme unique point singulier. On choisit une équation  $F_j$  générique, qui évite ce point singulier. Le monôme  $X_N^{d_j}$  intervient donc dans  $F_j$  de sorte que  $\deg_\alpha(F_j) = Nd_j$ . De plus, par le théorème de Bertini,  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$  est lisse. On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^c k_i \deg_\alpha(F_i) = \sum_{i \neq j} -k_i + Nk_j \geq 0.$$

Ceci se réécrit  $k_j \geq \frac{k_1 + \dots + k_c}{N+1}$  comme voulu.

Dans le cas (ii), la même preuve fonctionne. Il faut seulement vérifier qu'il était nécessaire d'exclure le cas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ . Pour cela, on prend  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq N-1$  et  $\alpha_N = 1$ . On choisit alors  $F_1 = X_0 X_N + Q(X_1, \dots, X_{N-1})$  où  $Q$  est une forme quadratique ordinaire en  $X_1, \dots, X_{N-1}$ . Alors  $\{F_1 = 0\}$  est lisse, mais  $\deg_\alpha(F_1) = 0$ .  $\square$

### 5.3 Affinité quand $d_1 = \dots = d_c$

Dans cette partie, on se propose de démontrer le théorème 5.1.1. On suppose donc que  $d_1 = \dots = d_c$ , et qu'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ .

#### 5.3.1 Constructions

Commençons par construire le schéma de Hilbert  $H$  et une compactification  $\bar{H}$  de  $H$ .

##### L'espace des intersections complètes $\bar{H}$

Soit  $pr : \mathbb{P}^N \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  le morphisme structurel. Par la proposition 1.1.6, le faisceau  $pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_1)$  sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  est localement libre, et ses fibres géométriques s'identifient à  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_1))$ .

On note  $\bar{H} = \mathbb{G}(c, (pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_1))^\vee)$  et  $\pi : \bar{H} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  la projection. Un point géométrique de  $\bar{H}$  est un sous-espace vectoriel  $V$  de dimension  $c$  de  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_1))$ .

La description de  $\bar{H}$  comme grassmannienne montre que son groupe de Picard est de rang 1, engendré par le fibré de Plücker  $\mathcal{O}(1)$ .

##### La famille universelle $\bar{\mathcal{X}}$

On note encore  $pr : \mathbb{P}^N \times \bar{H} \rightarrow \bar{H}$  et  $\pi : \mathbb{P}^N \times \bar{H} \rightarrow \mathbb{P}^N$  les changements de base. La construction de  $\bar{H}$  fournit une injection du fibré vectoriel tautologique  $\mathcal{F} \rightarrow \pi^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)$ . Par changement de base par le morphisme plat  $\pi$ , cette injection se réécrit  $\mathcal{F} \rightarrow pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}}(d_1; 0)$ . Tirant en arrière sur  $\mathbb{P}^N \times \bar{H}$ , et

utilisant l'adjonction, on obtient un morphisme de fibrés vectoriels  $pr^*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}}(d_1; 0)$ .

Le lieu où ce morphisme est nul est un sous-schéma de  $\mathbb{P}^N \times \bar{H}$  qu'on note  $\bar{\mathcal{X}}$ . Par construction, la fibre en  $V$  de  $pr : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{H}$  est le sous-schéma  $\{(F = 0)_{F \in V}\}$ .

Notons  $H$  l'ouvert de  $\bar{H}$  constitué des points géométriques  $V$  tels que  $\{(F = 0)_{F \in V}\}$  soit lisse de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}_K^N$ . On note  $\mathcal{X} \rightarrow H$  la restriction de  $\bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{H}$  à  $H$ .

Comme la construction ci-dessus coïncide avec celle donnée au paragraphe 2.2.2,  $\mathcal{X} \rightarrow H$  (resp.  $\bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{H}$ ) s'identifie au schéma de Hilbert des intersections complètes lisses (resp. des intersections complètes) et à sa famille universelle.

### Action de $SL_{N+1}$

L'action de  $SL_{N+1}$  sur  $\mathbb{A}^{N+1}$  induit des actions de  $SL_{N+1}$  par changement de coordonnées sur tous les espaces et faisceaux décrits ci-dessus.

En particulier,  $SL_{N+1}$  agit sur le faisceau localement libre  $pr_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)$ , donc sur  $\bigwedge^c pr_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)$  et sur le fibré vectoriel géométrique qui lui est associé. L'éclaté le long de la section nulle de ce fibré vectoriel est le fibré vectoriel géométrique associé au  $\mathcal{O}(1)$  relatif sur  $\mathbb{P}(\bigwedge^c pr_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)^\vee)$  : on obtient donc une linéarisation de ce  $\mathcal{O}(1)$ . Par définition, le fibré de Plücker est le tiré en arrière de ce fibré par le plongement de Plücker  $\bar{H} \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^c pr_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)^\vee)$ . On obtient ainsi une linéarisation du fibré de Plücker sur  $\bar{H}$ .

### 5.3.2 Preuve du théorème 5.1.1

On peut à présent démontrer le théorème 5.1.1 comme suit :

#### Preuve du théorème 5.1.1.

Rappelons que, comme expliqué dans l'introduction de ce chapitre,  $SL_{N+1}$  agit proprement sur  $H$  et le quotient grossier  $M$  fourni par le théorème de Keel et Mori est également un quotient géométrique.

Le diviseur  $\Delta = \bar{H} \setminus H$  est un diviseur effectif non trivial sur la grassmannienne  $\bar{H}$ . C'est donc un multiple positif du fibré de Plücker. Ceci montre que  $\Delta$  est ample, donc que  $H$  est affine ; on note  $A$  son anneau de fonctions. De plus, le fait que le fibré de Plücker soit linéarisable montre que l'action de  $SL_{N+1}$  sur  $H$  est linéarisable.

Alors, par un théorème de Seshadri ([66] Theorem 3, [41] Theorem 7.3), comme  $SL_{N+1}$  est réductif et agit proprement sur  $H$ ,  $\text{Spec}(A^{SL_{N+1}})$  est un quotient géométrique de  $H$  par  $SL_{N+1}$ .

Par [41] Corollary 2.15, comme  $SL_{N+1}$  agit proprement sur  $H$ , un quotient géométrique est aussi un quotient catégorique dans la catégorie des espaces algébriques, et est donc unique. Les deux quotients géométriques mentionnés ci-dessus coïncident donc, de sorte que  $M$  est affine.  $\square$

*Remarque 5.3.1.* Tel quel, on a utilisé la séparation de  $\mathcal{M}$ , i.e. la propriété de l'action de  $SL_{N+1}$  sur  $H$ . Si on n'avait pas voulu supposer ceci connu, on aurait pu montrer que  $H \subset \bar{H}^s(\mathcal{O}(1))$  (où le fibré de Plücker est muni de la linéarisation

naturelle). La propriété de l'action de  $SL_{N+1}$  sur  $H$  est alors conséquence de [57] Corollary 2.5. Décrivons rapidement deux méthodes qui auraient permis de vérifier cela.

La première généralise ce qui est fait dans [57] 4.2 pour les hypersurfaces : l'existence du diviseur  $\Delta$  montre immédiatement que  $H \subset \bar{H}^{ss}(\mathcal{O}(1))$ . Comme les intersections complètes lisses considérées ont des groupes d'automorphismes projectifs finis par le théorème 4.2.1 (on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ ), l'action de  $SL_{N+1}$  sur  $H$  a des stabilisateurs finis, et est donc fermée. Par définition du lieu stable, cela montre  $H \subset \bar{H}^s(\mathcal{O}(1))$ . Signalons seulement que quand  $N$  est impair,  $c = 2$  et  $d_1 = d_2 = 2$ , le raisonnement est circulaire tel quel, car on a utilisé la séparation de  $\mathcal{M}$  pour montrer la finitude du groupe des automorphismes projectifs des intersections complètes lisses.

La seconde sera utilisée pour montrer le théorème 5.1.2 dans la partie suivante. Elle ne suppose pas connue la finitude des groupes d'automorphismes projectifs des intersections complètes lisses. Elle consiste à vérifier le critère d'Hilbert-Mumford à l'aide du théorème 5.2.1 ; comme cette méthode sera développée dans la partie suivante pour montrer le théorème 5.1.2, on ne la détaille pas plus ici.

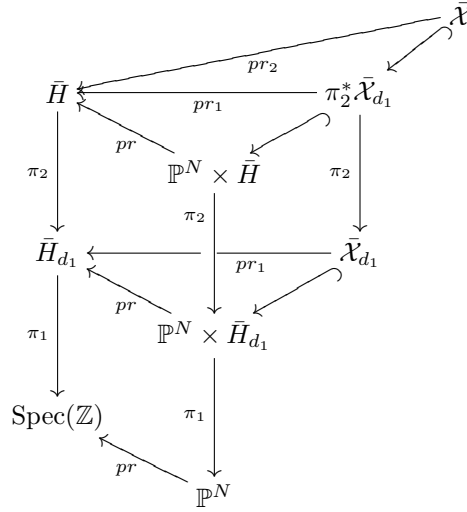
## 5.4 Quasi-projectivité quand $d_1 < d_2 = \dots = d_c$

Dans cette partie, on suppose que  $c \geq 2$  et  $d_1 < d_2 = \dots = d_c$ , et on prouve le théorème 5.1.2 comme annoncé au paragraphe 5.1.3.

### 5.4.1 Constructions

On construit tout d'abord  $H$  et  $\bar{H}$ , ainsi que les familles de sous-schémas de  $\mathbb{P}^N$  qu'ils paramètrent. On s'intéressera de plus à divers faisceaux localement libres sur ces espaces.

On utilisera notamment les notations du diagramme ci-dessous.



#### 5.4.1.1 Hypersurfaces

Soit  $d \geq 1$ . On commence par reprendre la construction du paragraphe 5.3.1 pour  $c = 1$ .

##### L'espace des hypersurfaces $\bar{H}_d$

Soit  $pr : \mathbb{P}^N \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  le morphisme structural. Par la proposition 1.1.6, le faisceau  $pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)$  sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  est localement libre, et ses fibres géométriques s'identifient à  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d))$ . On note  $\bar{H}_d = \mathbb{P}((pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d))^\vee)$  et  $\pi_1 : \bar{H} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  la projection. Un point géométrique de  $\bar{H}_d$  est une droite vectorielle  $\langle F \rangle$  de  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d))$ .

##### La famille universelle $\bar{\mathcal{X}}_d$

On note encore  $pr : \mathbb{P}^N \times \bar{H}_d \rightarrow \bar{H}_d$  et  $\pi_1 : \mathbb{P}^N \times \bar{H}_d \rightarrow \mathbb{P}^N$  les changements de base. La construction de  $\bar{H}_d$  fournit une injection du fibré en droites tautologique  $\mathcal{O}_{\bar{H}_d}(-1) \rightarrow \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)$ . Par changement de base par le morphisme plat  $\pi_1$ , cette injection se réécrit  $\mathcal{O}_{\bar{H}_d}(-1) \rightarrow pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d}(d; 0)$ . Tirant en arrière sur  $\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d$ , et utilisant l'adjonction, on obtient un morphisme de fibrés en droites  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d}(0; -1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d}(d; 0)$ .

Le lieu où ce morphisme est nul est un diviseur de Cartier  $\bar{\mathcal{X}}_d$  sur  $\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d$ . Par construction, la fibre en  $\langle F \rangle$  de  $pr_1 : \bar{\mathcal{X}}_d \rightarrow \bar{H}_d$  est le sous-schéma  $\{F = 0\}$  de  $\mathbb{P}_K^N$ .

##### Fibrés vectoriels sur $\bar{H}_d$

L'équation de  $\bar{\mathcal{X}}_d$  fournit sur  $\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d$  la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d}(-d; -1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_d} \rightarrow 0.$$

Tensorisons par  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d}(l; 0)$ , et appliquons  $pr_*$  en remarquant par calcul du  $H^1$  des fibres que  $R^1 pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d}(-d; -1) = 0$ . Utilisons la formule de projection et le changement de base par le morphisme plat  $\pi_1$  pour obtenir sur  $\bar{H}_d$  la suite exacte courte de faisceaux suivante :

$$0 \rightarrow \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(l-d) \otimes \mathcal{O}_{\bar{H}_d}(-1) \rightarrow \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(l) \rightarrow pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{X}_d}(l) \rightarrow 0. \quad (5.12)$$

Par exactitude à droite du produit tensoriel, on voit que la fibre géométrique  $(pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{X}_d}(l))_{\langle F \rangle}$  est  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l)) / \langle F \rangle$ , où l'on a noté  $\langle F \rangle = H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l-d)) \cdot F$ . Ainsi,  $pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{X}_d}(l)$  est localement libre par constance de la dimension de ses fibres, et la fibre géométrique en  $\langle F \rangle$  de la suite exacte courte de faisceaux localement libres (5.12) est :

$$0 \rightarrow \langle F \rangle \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l)) / \langle F \rangle \rightarrow 0. \quad (5.13)$$

### 5.4.1.2 Intersections complètes

#### L'espace $\bar{H}$

On a vu en 5.4.1.1 que  $pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{X}_{d_1}}(d_2)$  est un faisceau localement libre sur  $\bar{H}_{d_1}$ . On notera  $\bar{H} = \mathbb{G}_{\bar{H}_{d_1}}(c-1, (pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{X}_{d_1}}(d_2))^\vee)$  et  $\pi_2 : \bar{H} \rightarrow \bar{H}_{d_1}$  la projection. Par (5.13), les points géométriques de  $\bar{H}$  sont en bijection avec la donnée d'une droite  $\langle F_1 \rangle$  de  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_1))$  et d'un sous-espace vectoriel de dimension  $c-1$  de  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) / \langle F_1 \rangle$ . Si  $F_2, \dots, F_c \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2))$  engendrent ce sous-espace vectoriel, on notera  $[F_1, F_2, \dots, F_c]$  ce point géométrique de  $\bar{H}$ .

La description de  $\bar{H}$  comme grassmannienne relative sur un espace projectif montre que son groupe de Picard est de rang 2, engendré par  $\mathcal{O}(1, 0) = \pi_2^* \mathcal{O}(1)$  le fibré provenant de la base et  $\mathcal{O}(0, 1) = \mathcal{O}_{\pi_2}(1)$  le fibré de Plücker relatif.

#### La famille $\bar{\mathcal{X}}$

La construction de  $\bar{H}$  fournit une injection du fibré tautologique  $\mathcal{F} \rightarrow \pi_2^* pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{X}_{d_1}}(d_2)$ . Par changement de base par le morphisme  $\pi_2$  plat, cette injection se réécrit  $\mathcal{F} \rightarrow pr_{1*} \mathcal{O}_{\pi_2^* \bar{X}_{d_1}}(d_2; 0, 0)$ . Tirant en arrière sur  $\pi_2^* \bar{\mathcal{X}}_{d_1}$ , et utilisant l'adjonction, on obtient un morphisme de fibrés vectoriels  $pr_1^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_{\pi_2^* \bar{X}_{d_1}}(d_2; 0, 0)$ . Le lieu des zéros de ce morphisme est un sous-schéma  $\bar{\mathcal{X}}$  de  $\pi_2^* \bar{\mathcal{X}}_{d_1}$ . Par construction, la fibre en  $[F_1, F_2, \dots, F_c]$  de la projection  $pr_2 : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{H}$  est le sous-schéma  $\{F_1 = F_2 = \dots = F_c = 0\}$  de  $\mathbb{P}_K^N$ .

Notons  $H$  l'ouvert de  $\bar{H}$  constitué des points géométriques  $[F_1, F_2, \dots, F_c]$  tels que  $\{F_1 = F_2 = \dots = F_c = 0\}$  soit lisse de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}_K^N$ . On note  $\mathcal{X} \rightarrow H$  la restriction de  $\bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{H}$  à  $H$ .

Comme la construction ci-dessus coïncide avec celle donnée au paragraphe 2.2.2,  $\mathcal{X} \rightarrow H$  s'identifie au schéma de Hilbert des intersections complètes lisses et à sa famille universelle.

#### Fibrés vectoriels sur $\bar{H}$

Par construction de  $\bar{H}$ , on dispose d'une suite exacte courte de faisceaux localement libres sur  $\bar{H}$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \pi_2^* pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{X}_{d_1}}(d_2) \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0, \quad (5.14)$$

dont la fibre géométrique en  $[F_1, \dots, F_c]$  s'identifie à :

$$0 \rightarrow \langle F_2, \dots, F_c \rangle \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) / \langle F_1 \rangle \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) / \langle F_1, \dots, F_c \rangle \rightarrow 0. \quad (5.15)$$

Par ailleurs, par (5.12) pour  $d = d_1$  et  $l = d_2$ , on dispose d'une suite exacte courtes de faisceaux localement libres sur  $\bar{H}$  :

$$0 \rightarrow \pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2 - d_1) \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \rightarrow \pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2) \rightarrow \pi_2^* pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{X}_{d_1}}(d_2) \rightarrow 0. \quad (5.16)$$

Par (5.13), la fibre géométrique de (5.16) en  $[F_1, \dots, F_c]$  s'identifie à :

$$0 \rightarrow \langle F_1 \rangle \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) / \langle F_1 \rangle \rightarrow 0. \quad (5.17)$$

Notons  $\mathcal{E}$  le faisceau localement libre noyau de la composée des surjections  $\pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2) \rightarrow \pi_2^* pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{X}_{d_1}}(d_2) \rightarrow \mathcal{Q}$ . Les suites exactes (5.14) et (5.16) permettent d'écrire le diagramme exact de faisceaux localement libres sur  $\bar{H}$  ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2 - d_1) \otimes \mathcal{O}(-1, 0) = \pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2 - d_1) \otimes \mathcal{O}(-1, 0) & & \downarrow & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2) & \longrightarrow & \mathcal{Q} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \pi_2^* pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{X}_{d_1}}(d_2) & \longrightarrow & \mathcal{Q} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (5.18)$$

Par (5.15) et (5.17), la fibre géométrique en  $[F_1, \dots, F_c]$  de ce diagramme s'identifie à :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \langle F_1 \rangle = \langle F_1 \rangle & & \downarrow & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \langle F_1, \dots, F_c \rangle & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) / \langle F_1, \dots, F_c \rangle \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \langle F_1, \dots, F_c \rangle / \langle F_1 \rangle & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) / \langle F_1 \rangle & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) / \langle F_1, \dots, F_c \rangle \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (5.19)$$

### 5.4.1.3 Action de $SL_{N+1}$

L'action de  $SL_{N+1}$  sur  $\mathbb{A}^{N+1}$  induit des actions de  $SL_{N+1}$  par changement de coordonnées sur tous les espaces et faisceaux décrits ci-dessus.

En particulier,  $SL_{N+1}$  agit sur le faisceau localement libre  $pr_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_1)$ , donc sur le fibré vectoriel géométrique associé à ce faisceau. Comme l'éclaté le long de la section nulle de ce fibré vectoriel est le fibré vectoriel géométrique associé au faisceau  $\mathcal{O}(1)$  sur  $\bar{H}_{d_1}$ , on obtient une linéarisation de  $\mathcal{O}(1)$  sur  $\bar{H}_{d_1}$ . Par fonctorialité, on en déduit une linéarisation de  $\mathcal{O}(1,0)$  sur  $\bar{H}$ .

De même,  $SL_{N+1}$  agit sur le faisceau localement libre  $pr_{1*}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{d_1}}(d_2)$ , donc sur  $\bigwedge^{c-1}(pr_{1*}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{d_1}}(d_2))$  et sur le fibré vectoriel géométrique qui lui est associé. L'éclaté le long de la section nulle de ce fibré vectoriel est le fibré vectoriel géométrique associé au  $\mathcal{O}(1)$  relatif sur  $\mathbb{P}_{\bar{H}_{d_1}} \bigwedge^{c-1} pr_{1*}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{d_1}}(d_2)^\vee$  : on obtient donc une linéarisation de ce  $\mathcal{O}(1)$ . Par définition,  $\mathcal{O}(0,1)$  est le tiré en arrière de ce fibré par le plongement de Plücker  $\bar{H} \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{H}_{d_1}}(\bigwedge^{c-1} pr_{1*}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{d_1}}(d_2)^\vee)$ . On obtient ainsi une linéarisation de  $\mathcal{O}(0,1)$  sur  $\bar{H}$ .

Par combinaisons linéaires, on construit alors une linéarisation naturelle de tous les fibrés en droites  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$  sur  $\bar{H}$ . Ces linéarisations sont uniques par [57], prop. 1.4.

## 5.4.2 Fibrés amples sur $\bar{H}$

L'objectif de ce paragraphe est la proposition 5.4.6 : on calcule les fibrés en droites amples sur  $\bar{H}$ .

### 5.4.2.1 Lien entre $\bar{H}$ et $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$

L'injection de faisceaux localement libres  $\mathcal{E} \rightarrow \pi_2^*\pi_1^*pr_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2)$  dans le diagramme (5.18) induit une immersion fermée  $\mathbb{P}\mathcal{E}^\vee \hookrightarrow \bar{H} \times \bar{H}_{d_2}$  entre fibrés projectifs sur  $\bar{H}$ . En prenant le produit fibré au-dessus de  $\bar{H}$  de  $c-1$  copies de ces fibrés projectifs, on obtient une immersion fermée  $i : \Sigma \hookrightarrow \bar{H} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$ .

Remarquons que, par le diagramme (5.19), les points géométriques de  $\Sigma$  sont les  $([F_1, \dots, F_c], \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle) \in (\bar{H} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1})(K)$  tels que  $G_i \in \langle F_1, \dots, F_c \rangle$  pour  $2 \leq i \leq c$ . Le diagramme ci-dessous résume les notations que nous utiliserons.



$$\begin{array}{ccc}
& \bar{H} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1} & \\
& \swarrow \pi_2 \times id & \searrow p_1 \\
& \Sigma & \\
& \swarrow e & \searrow q \\
\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1} & & \bar{H} \\
& \searrow p_1 & \swarrow \pi_2 \\
& \bar{H}_{d_1} &
\end{array}$$

Notre objectif est de comparer les espaces  $\bar{H}$  et  $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$  via  $\Sigma$ . On commence par étudier l'application  $e := (\pi_2 \times id) \circ i$ .

La description des points géométriques de  $\Sigma$  et de  $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$  montre que le fermé de  $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$  où  $e$  a des fibres de dimension  $> 0$  a pour points géométriques les  $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$  tels que  $\langle F_1 \rangle \cap \langle G_2, \dots, G_c \rangle \neq \{0\}$ . On note ce fermé  $W$ , et on le munit de sa structure réduite. Notons  $E$  le fermé  $e^{-1}(W)$  de  $\Sigma$ , et munissons-le de sa structure réduite ( $E = e^{-1}(W)$  vaut ensemblistement mais pas nécessairement schématiquement). Les points géométriques de  $E$  sont les points géométriques  $([F_1, \dots, F_c], \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$  de  $\Sigma$  tels que  $\langle F_1, G_2, \dots, G_c \rangle \subsetneq \langle F_1, \dots, F_c \rangle$ .

**Lemme 5.4.1.** *Les schémas  $E$  et  $W$  sont irréductibles.*

**Preuve.** Comme  $W = e(E)$ , il suffit de montrer que  $E$  est irréductible. Pour cela, il suffit de montrer que les fibres géométriques de  $q|_E : E \rightarrow \bar{H}$  sont irréductibles.

Soit  $[F_1, \dots, F_c]$  un point géométrique de  $\bar{H}$ . La fibre géométrique de  $q|_E : E \rightarrow \bar{H}$  correspondante est constituée des  $(\langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$  n'induisant pas une base de  $\langle F_1, \dots, F_c \rangle / \langle F_1 \rangle$ . Elle est donc ensemblistement définie par l'annulation d'un déterminant, et irréductible par irréductibilité du déterminant.  $\square$

**Lemme 5.4.2.** *Le morphisme  $e|_{\Sigma \setminus E} : \Sigma \setminus E \rightarrow (\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}) \setminus W$  est un isomorphisme.*

**Preuve.** Le morphisme  $e = (\pi_2 \times id) \circ i$  est propre comme composée, donc, par changement de base,  $e|_{\Sigma \setminus E}$  est propre. De plus, la description des points géométriques de  $\Sigma$  et  $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$  montre que  $e|_{\Sigma \setminus E}$  réalise une bijection entre points géométriques. Ainsi,  $e|_{\Sigma \setminus E}$  est propre et quasifini, donc fini. Finalement, par lissité générique ( $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$  est de caractéristique générique 0),  $e^{-1}(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$  est un point réduit pour  $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$  générique, de sorte que  $e|_{\Sigma \setminus E}$  est birationnel. Comme  $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$  est régulier donc normal, par le Main Theorem de Zariski,  $e|_{\Sigma \setminus E}$  est un isomorphisme.  $\square$

### Une équation pour $E$

**Proposition 5.4.3.** *Le sous-schéma  $E$  est un diviseur de Cartier dans  $\Sigma$  et  $\mathcal{O}(E) = i^*\mathcal{O}(0, -1, 1, \dots, 1)$ .*

**Preuve.** La construction de  $\Sigma$  comme produit de fibrés projectifs sur  $\bar{H}$  fournit  $c-1$  sous-faisceaux tautologiques  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{c-1}$  de  $q^*\mathcal{E}$ . On a donc un morphisme  $\bigoplus_{k=1}^{c-1} \mathcal{L}_k \rightarrow q^*\mathcal{E}$  dont la fibre géométrique en  $([F_1, \dots, F_c], \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$  est  $\langle G_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle G_c \rangle \rightarrow \langle F_1, \dots, F_c \rangle$ . Remarquons que, par compatibilité entre les faisceaux tautologiques des fibrés projectifs  $\mathbb{P}\mathcal{E}^\vee$  et  $\bar{H} \times \bar{H}_{d_2}$  sur  $\bar{H}$ , on a  $\mathcal{L}_1 = i^*\mathcal{O}(0, 0, -1, 0, \dots, 0), \dots, \mathcal{L}_{c-1} = i^*\mathcal{O}(0, 0, \dots, 0, -1)$ .

D'autre part, en tirant en arrière sur  $\Sigma$  le morphisme  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  du diagramme (5.18), on obtient un morphisme  $q^*\mathcal{E} \rightarrow q^*\mathcal{F}$  dont la fibre géométrique en  $([F_1, \dots, F_c], \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$  est  $\langle F_1, \dots, F_c \rangle \rightarrow \langle F_1, \dots, F_c \rangle / \langle F_1 \rangle$  par le diagramme (5.19). Notons  $\beta : \bigoplus_{k=1}^{c-1} \mathcal{L}_k \rightarrow q^*\mathcal{F}$  la composée de ces deux morphismes de faisceaux.

Les fibres  $\beta_{([F_1, \dots, F_c], \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)} : \langle G_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle G_c \rangle \rightarrow \langle F_1, \dots, F_c \rangle / \langle F_1 \rangle$  de  $\beta$  sont des isomorphismes exactement si  $([F_1, \dots, F_c], \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle) \notin E(K)$ . On en déduit que  $\det(\beta)$  est une injection, et que son conoyau  $\mathcal{K}$  a pour support un sous-schéma fermé de  $\Sigma$  dont la réduction est  $E$ .

On remarque alors que  $\det(\bigoplus_{k=1}^{c-1} \mathcal{L}_k) = i^*\mathcal{O}(0, 0, -1, \dots, -1)$  et que, par définition du fibré de Plücker,  $\det(q^*\mathcal{F}) = i^*\mathcal{O}(0, -1, 0, \dots, 0)$ . Tensorisant par  $i^*\mathcal{O}(0, 1, 0, \dots, 0)$ , on obtient :

$$0 \rightarrow i^*\mathcal{O}(0, 1, -1, \dots, -1) \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma \rightarrow \mathcal{K} \otimes i^*\mathcal{O}(0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow 0.$$

Le fibré en droites  $i^*\mathcal{O}(0, 1, -1, \dots, -1)$  s'identifie ainsi au faisceau d'idéaux d'un diviseur de Cartier  $D$  de  $\Sigma$  qui coïncide ensemblistement avec  $E$ .

Le sous-schéma  $E$  est donc le diviseur de Cartier réduit associé à  $D$  sur le schéma régulier  $\Sigma$ . Comme, par le lemme 5.4.1,  $E$  est irréductible, il existe  $k \geq 1$  tel que  $i^*\mathcal{O}(0, 1, -1, \dots, -1) = \mathcal{O}(-kE)$ . Or la description de  $\Sigma$  comme produit de fibrés projectifs montre que  $i^*\mathcal{O}(0, 1, -1, \dots, -1)$  n'est pas divisible dans  $\text{Pic}(\Sigma)$ . On a donc nécessairement  $k = 1$ , et  $\mathcal{O}(E) = i^*\mathcal{O}(0, -1, 1, \dots, 1)$ .  $\square$

### Des équations pour $W$

Les calculs que nous mènerons au paragraphe suivant nécessitent d'avoir des équations au moins ensemblistes pour  $W$ . C'est l'objet de la proposition 5.4.4.

**Proposition 5.4.4.** *Soit  $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$  un point géométrique de  $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$  n'appartenant pas à  $W$ . Alors il existe un diviseur  $D \in |\mathcal{O}_{\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}}((c-1)(d_2 - d_1) + 1, 1, \dots, 1)|$  contenant  $W$  mais pas  $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ .*

**Preuve.** Soit  $(X_0, \dots, X_N)$  un système de coordonnées sur  $\mathbb{P}^N$ , c'est-à-dire une base de  $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))$ . On note  $\mathfrak{M}_d$  l'ensemble des monômes de degré  $d$  en les  $X_i$  : c'est une base de  $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d))$ . On obtient des coordonnées sur les espaces projectifs  $\bar{H}_{d_1}$  et  $\bar{H}_{d_2}$  en considérant les bases duales  $(a_L)_{L \in \mathfrak{M}_{d_1}}$  et  $(b_M^{(i)})_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}}$  de  $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_1))^\vee = H^0(\bar{H}_{d_1}, \mathcal{O}(1))$  et  $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_2))^\vee = H^0(\bar{H}_{d_2}, \mathcal{O}(1))$ , où

l'exposant  $i$  ( $2 \leq i \leq c$ ) permet de distinguer les coordonnées sur les  $c-1$  copies de  $\bar{H}_{d_2}$ . On choisit notre système de coordonnées de sorte que  $F_1$  ait un coefficient non nul en  $X_0^{d_1}$ , qu'on peut alors supposer égal à 1.

Soit  $2 \leq i \leq c$ . Considérons l'identité

$$a_{X_0^{d_1}}^{d_2-d_1+1} g^{(i)} = q_{d_2-d_1+1}^{(i)} f + r_{d_2-d_1+1}^{(i)} \quad (5.20)$$

obtenue en substituant la variable  $b_M^{(i)}$  à la variable  $b_M$  dans l'identité fournie par le lemme 5.4.5 ci-dessous. Substituant alors les coefficients de  $F_1$  dans les  $a_L$  et les coefficients de  $G_i$  dans les  $b_M^{(i)}$ , on obtient une égalité de la forme  $G_i = Q_i F_1 + R_i$  dans  $K[X_0, \dots, X_N]$ . Comme  $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle) \notin W$ , les  $R_i$  forment une famille libre. On peut donc trouver  $(M_j)_{2 \leq j \leq c}$  des monômes de  $\mathfrak{M}_{d_2}$  tels que la matrice  $(c-1) \times (c-1)$  dont le coefficient  $(i, j)$  est le coefficient de  $M_j$  dans  $R_i$  soit inversible.

On note  $C_j^{(i)} \in \mathbb{Z}[a_L, b_M^{(i)}]_{L \in \mathfrak{M}_{d_1}, M \in \mathfrak{M}_{d_2}}$  le coefficient de  $M_j$  dans  $r_{d_2-d_1+1}^{(i)}$ . Alors  $P = \det(C_j^{(i)})$  est un polynôme homogène de degré  $(c-1)(d_2-d_1+1)$  en les  $a_L$  et, pour tout  $i \in \{2, \dots, c-1\}$ , de degré 1 en les  $b_M^{(i)}$ . On voit  $P$  comme une section de  $\mathcal{O}_{\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}}((c-1)(d_2-d_1+1), 1, \dots, 1)$ . Par choix des  $M_j$ ,  $P$  est non nul en  $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ .

Montrons que  $\{P = 0\}$  contient  $W$ . Comme, par le lemme 5.4.1,  $W$  est intègre, il suffit de voir que  $\{P = 0\}$  contient les points géométriques de l'ouvert dense de  $W$  défini par l'équation  $a_{X_0^{d_1}} \neq 0$ . Soit donc  $(\langle F'_1 \rangle, \langle G'_2 \rangle, \dots, \langle G'_c \rangle)$  un point géométrique de  $W$  tel que le coefficient en  $X_0^{d_1}$  de  $F'_1$  vaille 1. Comme  $(\langle F'_1 \rangle, \langle G'_2 \rangle, \dots, \langle G'_c \rangle) \in W$ , il existe une équation de la forme  $\sum_{i=2}^c \lambda_i G'_i = Q F'_1$  avec  $Q \in K[X_0, \dots, X_N]$  et  $\lambda_i \in K$  non tous nuls. Pour  $2 \leq i \leq c$ , en substituant dans l'égalité (5.20) les coefficients de  $F'_1$  dans les  $a_L$  et les coefficients de  $G'_i$  dans les  $b_M^{(i)}$ , on obtient des égalités de la forme  $G'_i = Q'_i F'_1 + R'_i$ . Il vient  $\sum_{i=2}^c \lambda_i R'_i = (Q - \sum_{i=2}^c \lambda_i Q'_i) F'_1$ . Comme aucun des monômes des  $R'_i$  n'est divisible par  $X_0^{d_1}$  et que le coefficient en  $X_0^{d_1}$  de  $F'_1$  est non nul, on a nécessairement  $Q - \sum_{i=2}^c \lambda_i Q'_i = 0$ , donc  $\sum_{i=2}^c \lambda_i R'_i = 0$ . Par conséquent,  $P(F'_1, G'_2, \dots, G'_c)$  est le déterminant d'une matrice dont les lignes sont liées, et est nul. Ceci montre que  $(\langle F'_1 \rangle, \langle G'_2 \rangle, \dots, \langle G'_c \rangle) \in \{P = 0\}$ .

Enfin, remarquons que  $P$  est divisible par  $a_{X_0^{d_1}}^{c-2}$ . Pour cela, utilisons la dernière partie du lemme 5.4.5 : on a une identité de la forme  $r_{d_2-d_1+1} = a_{X_0^{d_1}} T + b_{X_0^{d_2}} S$ . Par homogénéité,  $S$  ne dépend pas des variables  $(b_M)_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}}$ , de sorte qu'on obtient, pour  $2 \leq i \leq c$  des identités de la forme  $r_{d_2-d_1+1}^{(i)} = a_{X_0^{d_1}} T^{(i)} + b_{X_0^{d_2}} S$ . Ces expressions montrent que, dans la matrice  $(C_j^{(i)})$ , chaque ligne est somme de deux termes : les premiers divisibles par  $a_{X_0^{d_1}}$ , les seconds tous proportionnels. Développer le déterminant montre que  $P$  est divisible par  $a_{X_0^{d_1}}^{c-2}$ .

Posons alors  $\tilde{P} = P/a_{X_0^{d_1}}^{c-2}$  : c'est une section de  $\mathcal{O}_{\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}}((c-1)(d_2-d_1)+1, 1, \dots, 1)$ . Comme  $P$  est non nul en  $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ , c'est aussi le cas de

$\tilde{P}$ . Comme  $W \subset \{P = 0\}$ , que  $W$  est intègre par le lemme 5.4.1, et que  $W$  n'est pas inclus dans  $\{a_{X_0^{d_1}} = 0\}$ ,  $W \subset \{\tilde{P} = 0\}$ . On a montré que  $D = \{\tilde{P} = 0\}$  convenait.  $\square$

**Lemme 5.4.5.** *On se place dans l'anneau*

$$A = \mathbb{Z}[X_s, a_L, b_M]_{0 \leq s \leq N, L \in \mathfrak{M}_{d_1}, M \in \mathfrak{M}_{d_2}}$$

trigradué par le degré total en les  $X_i$ , en les  $a_L$  et les  $b_M$ . On considère les éléments  $f = \sum_{L \in \mathfrak{M}_{d_1}} a_L L$  et  $g = \sum_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}} b_M M$  de  $A$ . Alors, si  $0 \leq j \leq d_2 - d_1 + 1$ , il existe  $q_j, r_j \in A$  homogènes de degrés respectifs  $(d_2 - d_1, j - 1, 1)$  et  $(d_2, j, 1)$ , tels qu'aucun monôme de  $r_j$  ne soit divisible par  $X_0^{d_2+1-j}$  et que

$$a_{X_0^{d_1}}^j g = q_j f + r_j.$$

De plus, si  $j \geq 1$ , tout monôme intervenant dans  $r_j$  est divisible soit par  $a_{X_0^{d_1}}$  soit par  $b_{X_0^{d_2}}$ .

**Preuve.** L'existence de  $q_j$  et  $r_j$  résulte de l'algorithme de division euclidienne.

Plus précisément, on raisonne par récurrence sur  $j$ . Si  $j = 0$ , on prend  $q_0 = 0$  et  $r_0 = g$ . Pour passer de l'égalité pour  $j$  à celle pour  $j + 1$ , on multiplie par  $a_{X_0^{d_1}}$ , on regroupe dans  $a_{X_0^{d_1}} r_j$  les termes divisibles par  $X_0^{d_2-j}$ , et on réécrit ces termes en utilisant l'identité

$$a_{X_0^{d_1}} X_0^{d_2-j} = X_0^{d_2-d_1-j} f + X_0^{d_2-d_1-j} (a_{X_0^{d_1}} X_0^{d_1} - f).$$

Cette construction explicite permet facilement de vérifier la dernière propriété. Quand  $j = 1$ , on remarque que le seul terme de  $a_{X_0^{d_1}} r_0$  qu'on réécrit est  $a_{X_0^{d_1}} b_{X_0^{d_2}} X_0^{d_2}$  de sorte que les termes qui apparaissent sont divisibles par  $b_{X_0^{d_2}}$ . Les autres sont divisibles par  $a_{X_0^{d_1}}$ . Enfin, la propriété pour  $j$  implique immédiatement la propriété pour  $j + 1$ .  $\square$

#### 5.4.2.2 Calcul des fibrés amples

On peut à présent démontrer la proposition suivante :

**Proposition 5.4.6.** *Le fibré  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$  sur  $\bar{H}$  est ample si et seulement si  $l_2 > 0$  et  $\frac{l_1}{l_2} > (c - 1)(d_2 - d_1) + 1$ .*

**Preuve.** Comme  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  est affine,  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$  est ample si et seulement s'il est ample relativement à  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . Par [21] 4.7.1, il suffit de tester l'amplitude de  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$  sur les fibres du morphisme structurel, donc sur les fibres géométriques du morphisme structurel.

La proposition est alors conséquence de la proposition 5.4.7 ci-dessous et du critère de Kleiman : pour une variété projective sur un corps algébriquement clos, le cône ample est l'intérieur du cône nef ([47], 1.4.23).  $\square$

**Proposition 5.4.7.** *Soit  $K$  un corps algébriquement clos. Alors le fibré  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$  sur  $\bar{H} \times_{\mathbb{Z}} K$  est nef si et seulement si  $l_2 \geq 0$  et  $l_1 \geq l_2((c-1)(d_2 - d_1) + 1)$ .*

**Preuve.** Dans toute cette preuve, les variétés qu'on manipule sont définies sur le corps  $K$ . Pour simplifier les notations, les extensions des scalaires à  $K$  seront partout sous-entendues.

Etape 1 : *La condition est nécessaire.*

Supposons que  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$  est nef. On a  $l_2 \geq 0$  car  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$  est  $\pi_2$ -nef. On va montrer la seconde inégalité en calculant le degré de  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$  sur une courbe bien choisie.

Soient  $X_0, X_1 \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))$  des équations linéairement indépendantes,  $H \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_1 - 1))$  une équation non nulle et  $(\lambda_j^{(i)})_{2 \leq i \leq c, 1 \leq j \leq d_2 - d_1}$  des scalaires distincts. Pour  $2 \leq i \leq c$ , on note  $G_i = HX_{i-1} \prod_{j=1}^{d_2 - d_1} (X_0 + \lambda_j^{(i)} X_1)$ . Considérons  $\beta : \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{H}_{d_1}$  le pinceau  $t \mapsto \langle H(X_0 + tX_1) \rangle$ . La section constante  $s : \bar{H}_{d_1} \rightarrow \bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$  de valeur  $(\langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$  fournit un morphisme  $s \circ \beta : \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$ .

Calculons les points de  $\mathbb{P}^1$  dont l'image par  $s \circ \beta$  est dans  $W$ . Soient  $t \in \mathbb{P}^1(K)$  et  $a_2, \dots, a_c \in K$  non tous nuls. Alors  $H(X_0 + tX_1)$  divise  $\sum_{i=2}^c a_i G_i$  si et seulement si  $X_0 + tX_1$  divise  $\sum_{i=2}^c a_i X_{i-1} \prod_{j=1}^{d_2 - d_1} (X_0 + \lambda_j^{(i)} X_1)$ . On voit aisément que cela ne peut se produire que si tous les  $a_i$  sauf un sont nuls. Si c'est  $a_i$  qui est non nul, les valeurs possibles de  $t$  sont soit  $t = \lambda_j^{(i)}$  pour un  $j \in \{1, \dots, d_2 - d_1\}$ , soit  $t = \infty$  si  $i = 2$ . On a montré qu'exactement  $(c-1)(d_2 - d_1) + 1$  points de  $\mathbb{P}^1$  sont envoyés dans  $W$  par  $s \circ \beta$ .

Comme l'image de  $s \circ \beta$  n'est pas incluse dans  $W$  et que  $e$  est birationnel par le lemme 5.4.2, le critère valuatif de propreté permet de relever  $s \circ \beta$  en un morphisme  $\gamma : \mathbb{P}^1 \rightarrow \Sigma$ . Remarquons qu'exactement  $(c-1)(d_2 - d_1) + 1$  points de  $\mathbb{P}^1$  sont envoyés dans  $E$  par  $\gamma$ . Finalement, en composant par  $q$ , on obtient un morphisme  $q \circ \gamma : \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{H}$ .

On calcule alors les degrés des fibrés en droites de  $\bar{H}$  sur  $\mathbb{P}^1$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* q^* \mathcal{O}(1, 0) &= \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* q^* \pi_2^* \mathcal{O}(1) = \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* e^* p_1^* \mathcal{O}(1) \\ &= \mathbb{P}^1 \cdot \beta^* s^* p_1^* \mathcal{O}(1) = \mathbb{P}^1 \cdot \beta^* \mathcal{O}(1) \\ &= 1 \quad \text{car } \beta : \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{H}_{d_1} \text{ est une droite.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* q^* \mathcal{O}(0, 1) &= \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* e^* \mathcal{O}(0, 1, \dots, 1) - \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* \mathcal{O}(E) \\ &\quad \text{par la proposition 5.4.3} \\ &\leq \mathbb{P}^1 \cdot \beta^* s^* \mathcal{O}(0, 1, \dots, 1) - (c-1)(d_2 - d_1) - 1 \\ &\quad \text{par calcul de } \text{Card}(\gamma^{-1}(E)) \\ &= -(c-1)(d_2 - d_1) - 1 \\ &\quad \text{car } s^* \mathcal{O}(0, 1, \dots, 1) = \mathcal{O}. \end{aligned}$$

On montre enfin l'inégalité voulue comme suit :

$$\begin{aligned} l_1 - l_2((c-1)(d_2 - d_1) + 1) &\geq \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* q^* \mathcal{O}(l_1, l_2) \text{ car } l_2 \geq 0 \\ &\geq 0 \qquad \qquad \qquad \text{car } \mathcal{O}(l_1, l_2) \text{ est nef.} \end{aligned}$$

Étape 2 : *La condition est suffisante.*

Supposons à présent les inégalités vérifiées, et montrons que  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$  est nef. Soit pour cela  $C$  une courbe intègre de  $\tilde{H}$ . Notons  $\tilde{C}$  sa normalisation et  $\alpha : \tilde{C} \rightarrow \tilde{H}$  le morphisme naturel. Comme  $q$  est un fibré localement trivial, on peut trouver une section rationnelle  $\beta : \tilde{C} \dashrightarrow \Sigma$  de  $\alpha$  ; on peut de plus supposer que son image n'est pas incluse dans  $E$ . Par critère valuatif de propreté,  $\beta$  est en fait un morphisme. Notons  $\gamma = e \circ \beta$ . Comme  $\beta(\tilde{C}) \not\subset E$ , on a  $\gamma(\tilde{C}) \not\subset W$ . On peut donc choisir par la proposition 5.4.4 un diviseur de Cartier  $D \in |\mathcal{O}_{\tilde{H}_{d_1} \times \tilde{H}_{d_2}^{c-1}}((c-1)(d_2-d_1)+1, 1, \dots, 1)|$  contenant  $W$  mais pas  $\gamma(\tilde{C})$ , donc tel que  $e^*D$  contienne  $E$  mais pas  $\beta(\tilde{C})$ . On calcule alors :

$$\begin{aligned} \tilde{C} \cdot \alpha^* \mathcal{O}_{\tilde{H}}(l_1, l_2) &= \tilde{C} \cdot \beta^* q^* \mathcal{O}_{\tilde{H}}(l_1, l_2) && \text{par projection} \\ &= \tilde{C} \cdot \beta^*(e^* \mathcal{O}_{\tilde{H}_{d_1} \times \tilde{H}_{d_2}^{c-1}}(l_1, l_2, \dots, l_2) - l_2 E) && \text{par 5.4.3} \\ &\geq \tilde{C} \cdot \beta^*(e^* \mathcal{O}_{\tilde{H}_{d_1} \times \tilde{H}_{d_2}^{c-1}}(l_1, l_2, \dots, l_2) - l_2 e^* D) && \text{car } E \subset e^* D, l_2 \geq 0 \\ &= \tilde{C} \cdot \gamma^* \mathcal{O}(l_1 - l_2((c-1)(d_2 - d_1) + 1), 0, \dots, 0) && \text{par projection} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

On a bien montré que  $\mathcal{O}_{\tilde{H}}(l_1, l_2)$  est nef.  $\square$

### 5.4.3 Preuve du théorème 5.1.2

#### 5.4.3.1 Échec d'une stratégie naïve

Au paragraphe 5.3.2, on a montré le théorème 5.1.1 en utilisant l'argument suivant. Le diviseur discriminant  $\Delta = \tilde{H} \setminus H$  était ample sur  $\tilde{H}$ , et son complémentaire  $H$  était donc affine. On montre ici que cette méthode ne permet pas de montrer le théorème 5.1.2 ; plus précisément, si  $c = 2$ , elle ne fonctionne jamais.

En effet, le théorème 7.1.3 permet de calculer le fibré en droites associé au diviseur discriminant  $\Delta = \tilde{H} \setminus H$ . Quand  $c = 2$ , les calculs sont menés dans l'exemple 7.1.11, et on obtient  $\mathcal{O}(\Delta) = \mathcal{O}(l_1, l_2)$  avec  $l_1 = d_2(e_2^{N-1} + 2e_1e_2^{N-2} + \dots + Ne_1^{N-1})$  et  $l_2 = d_1(e_1^{N-1} + 2e_2e_1^{N-2} + \dots + Ne_2^{N-1})$ , et où l'on a posé  $e_i = d_i - 1$ . Comme  $\frac{l_1}{l_2} \leq \frac{d_2}{d_1} \leq d_2 - d_1 + 1$ , la proposition 5.4.6 montre que ce fibré n'est jamais ample.

Quand  $c > 2$ , les formules calculant  $l_1$  et  $l_2$  sont plus compliquées, et font apparaître des sommes alternées, ce qui rend difficile une vérification analogue.

#### 5.4.3.2 Calcul des fonctions $\mu$

L'objectif de ce paragraphe est de calculer les fonctions  $\mu$  intervenant dans le critère d'Hilbert-Mumford pour l'action de  $SL_{N+1}$  sur  $\tilde{H}$  relativement aux

fibrés en droites  $SL_{N+1}$ -linéarisés décrits au paragraphe 5.4.1.3. Ces fonctions  $\mu$  dépendent d'un point géométrique  $P = [F_1, F_2, \dots, F_c] \in \bar{H}(K)$  et d'un sous-groupe à un paramètre non trivial  $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow SL_{N+1,K}$ .

Rappelons brièvement la définition de ces fonctions  $\mu$ . Considérons la fibre en  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) \cdot P$  du fibré en droites géométrique sur  $\bar{H}$  associé à  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ . Le morphisme  $\rho$  induit une action de  $\mathbb{G}_{m,K}$  sur cette fibre. Cette action se fait via un caractère de  $\mathbb{G}_{m,K}$ , c'est-à-dire un entier; on note  $\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho)$  l'opposé de cet entier. Dans les deux lemmes qui suivent, on met  $\rho$  et  $P$  sous une forme qui permettra de calculer  $\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho)$ .

**Lemme 5.4.8.** *Soit  $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow SL_{N+1,K}$  un sous-groupe à un paramètre non trivial. Alors on peut trouver des entiers  $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$  non tous nuls de somme nulle et une base de  $K^{N+1}$  dans laquelle  $\rho(t) \cdot (x_0, \dots, x_N) = (t^{\alpha_0} x_0, \dots, t^{\alpha_N} x_N)$ .*

**Preuve.** Par diagonalisation simultanée d'endomorphismes qui commutent, on peut trouver une base de  $K^{N+1}$  dans laquelle  $\rho$  agit de manière diagonale. Par description des caractères de  $\mathbb{G}_{m,K}$ , il existe des entiers  $\alpha_0, \dots, \alpha_N$  tels que  $\rho(t) \cdot (x_0, \dots, x_N) = (t^{\alpha_0} x_0, \dots, t^{\alpha_N} x_N)$ . Quitte à permuter les vecteurs de la base, on peut supposer que  $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$ . Enfin, comme  $\rho$  est à valeurs dans  $SL_{N+1,K}$ , on a  $\alpha_0 + \dots + \alpha_N = 0$ ; comme  $\rho$  est non trivial, les  $\alpha_i$  sont non tous nuls.  $\square$

Dans le reste de ce paragraphe,  $\rho$  est fixé. On travaille avec un système de coordonnées et des entiers  $\alpha_i$  comme dans le lemme ci-dessus. On conserve les notations du paragraphe 5.2.1.

**Lemme 5.4.9.** *Soit  $P = [F_1, F_2, \dots, F_c] \in \bar{H}(K)$ . Alors il existe des équations  $\Phi_i \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_i))$  pour  $2 \leq i \leq c$  telles que :*

- (i)  $P = [F_1, \Phi_2, \dots, \Phi_c]$
- (ii)  $\deg_\alpha(\Phi_i) \leq \deg_\alpha(F_i)$  pour  $2 \leq i \leq c$ .
- (iii)  $[F_1^\alpha, \Phi_2^\alpha, \dots, \Phi_c^\alpha] \in \bar{H}(K)$ .

**Preuve.** Choisissons  $\Phi_i \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_i))$  pour  $2 \leq i \leq c$  vérifiant les propriétés (i) et (ii), et telles que  $\sum_{i=2}^c \deg_\alpha(\Phi_i)$  soit minimal. C'est possible car on a la minoration  $\deg_\alpha(\Phi_i) \geq d_i \alpha_0$ . Montrons par l'absurde que la condition (iii) est automatiquement vérifiée.

Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver  $Q \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2 - d_1))$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_c \in K$  non tous nuls tels que  $QF_1^\alpha = \sum_{i=2}^c \lambda_i \Phi_i^\alpha$ . En ne gardant dans cette identité que les termes de  $\alpha$ -degré maximal (i.e. quitte à remplacer  $Q$  par  $Q^\alpha$  ou 0 et à remplacer certains des  $\lambda_i$  par 0), on peut supposer que tous les termes de cette identité sont  $\alpha$ -homogènes de même  $\alpha$ -degré. Soit alors  $2 \leq j \leq c$  tel que  $\lambda_j$  soit non nul; on pose  $\Phi'_i = \Phi_i$  si  $i \neq j$  et  $\Phi'_j = \sum_{i=2}^c \lambda_i \Phi_i - QF_1$ .

Les  $\Phi'_i$  vérifient encore la propriété (i). On a bien  $\deg_\alpha(\Phi'_i) = \deg_\alpha(\Phi_i)$  si  $i \neq j$ . De plus, l'expression de  $\Phi'_j$  montre que  $\deg_\alpha(\Phi'_j) \leq \deg_\alpha(\Phi_j)$ , mais que la somme des termes de  $\alpha$ -degré  $\deg_\alpha(\Phi_j)$  dans  $\Phi'_j$  est nulle, i.e.  $\deg_\alpha(\Phi'_j) < \deg_\alpha(\Phi_j)$ . D'une part cela montre que les  $\Phi'_i$  vérifient encore la propriété (ii). D'autre part, cela contredit la minimalité dans le choix des  $\Phi_i$ .  $\square$

Commençons par calculer la fonction  $\mu$  pour l'action de  $SL_{N+1}$  sur  $\bar{H}_{d_1}$  relativement au fibré  $\mathcal{O}(1)$  et à sa linéarisation décrite au paragraphe 5.4.1.3.

**Lemme 5.4.10.** *Soit  $\langle F_1 \rangle \in \bar{H}_{d_1}(K)$ . Alors :*

$$\mu^{\mathcal{O}(1)}(\langle F_1 \rangle, \rho) = \deg_{\alpha}(F_1).$$

**Preuve.** On rappelle que, par définition de l'action duale, si  $F$  est un élément  $\alpha$ -homogène de  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_1)) = \text{Sym}^{d_1}(K^{N+1})^{\vee}$ , l'action de  $\rho$  sur  $F$  est donnée par  $\rho(t) \cdot F = t^{-\deg_{\alpha}(F)} F$ .

Ainsi, si l'on écrit  $F_1 = F_1^{\alpha} + R$ ,

$$\begin{aligned} \rho(t) \cdot \langle F_1 \rangle &= \langle \rho(t) \cdot F_1 \rangle = \langle t^{\deg_{\alpha}(F_1)} \rho(t) \cdot F_1 \rangle \\ &= \langle F_1^{\alpha} + t^{\deg_{\alpha}(F_1)} \rho(t) \cdot R \rangle. \end{aligned}$$

Le terme de droite tendant vers 0, on a  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) \cdot \langle F_1 \rangle = \langle F_1^{\alpha} \rangle$ .

Finalement, dans  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_1))$ ,  $\rho(t) \cdot F_1^{\alpha} = t^{-\deg_{\alpha}(F_1)} F_1^{\alpha}$ , ce qui montre, par définition de la  $SL_{N+1}$ -linéarisation de  $\mathcal{O}(1)$ , que  $\mu^{\mathcal{O}(1)}(\langle F_1 \rangle, \rho) = \deg_{\alpha}(F_1)$ .  $\square$

On calcule ensuite la fonction  $\mu$  pour l'action de  $SL_{N+1}$  sur  $\bar{H}$  relativement au fibré  $\mathcal{O}(0, 1)$  et à sa linéarisation décrite au paragraphe 5.4.1.3.

**Lemme 5.4.11.** *Soit  $P \in \bar{H}(K)$ . On écrit  $P = [F_1, \Phi_2, \dots, \Phi_c]$  où les  $\Phi_i$  ont été choisis comme dans le lemme 5.4.9. Alors :*

$$\mu^{\mathcal{O}(0,1)}(P, \rho) = \sum_{i=2}^c \deg_{\alpha}(\Phi_i).$$

**Preuve.** Comme dans la preuve du lemme 5.4.10, on calcule dans  $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$  :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) \cdot (\langle F_1 \rangle, \langle \Phi_2 \rangle, \dots, \langle \Phi_c \rangle) = (\langle F_1^{\alpha} \rangle, \langle \Phi_2^{\alpha} \rangle, \dots, \langle \Phi_c^{\alpha} \rangle).$$

Comme  $[F_1^{\alpha}, \Phi_2^{\alpha}, \dots, \Phi_c^{\alpha}] \in \bar{H}(K)$ ,  $(\langle F_1^{\alpha} \rangle, \langle \Phi_2^{\alpha} \rangle, \dots, \langle \Phi_c^{\alpha} \rangle)$  est dans le lieu de définition de l'application rationnelle  $q \circ e^{-1} : \bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1} \dashrightarrow \bar{H}$ . Comme celle-ci est  $SL_{N+1}$ -équivariante, donc  $\rho$ -équivariante, on en déduit que, dans  $\bar{H}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) \cdot [F_1, \Phi_2, \dots, \Phi_c] = [F_1^{\alpha}, \Phi_2^{\alpha}, \dots, \Phi_c^{\alpha}].$$

Finalement, dans  $\bigwedge^{c-1}(H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) / \langle F_1^{\alpha} \rangle)$ ,

$$\rho(t) \cdot (\Phi_2^{\alpha} \wedge \dots \wedge \Phi_c^{\alpha}) = t^{-\sum_{i=2}^c \deg_{\alpha}(\Phi_i)} (\Phi_2^{\alpha} \wedge \dots \wedge \Phi_c^{\alpha}),$$

ce qui montre, par définition de la  $SL_{N+1}$ -linéarisation de  $\mathcal{O}(0, 1)$ , que :

$$\mu^{\mathcal{O}(0,1)}(P, \rho) = \sum_{i=2}^c \deg_{\alpha}(\Phi_i).$$

$\square$



Enfin, combinant les lemmes 5.4.10 et 5.4.11, on obtient :

**Proposition 5.4.12.** *Soit  $P \in \bar{H}(K)$ . On écrit  $P = [F_1, \Phi_2, \dots, \Phi_c]$  où les  $\Phi_i$  ont été choisis comme dans le lemme 5.4.9. Alors :*

$$\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho) = l_1 \deg_\alpha(F_1) + l_2 \sum_{i=2}^c \deg_\alpha(\Phi_i).$$

**Preuve.** Ceci résulte de la functorialité des fonctions  $\mu$  pour le morphisme  $\pi_2 : \bar{H} \rightarrow \bar{H}_{d_1}$ , et de l'additivité des fonctions  $\mu$  relativement au fibré en droites linéarisé.  $\square$

### 5.4.3.3 Application du critère d'Hilbert-Mumford

**Proposition 5.4.13.** *Il existe un fibré en droites ample  $SL_{N+1}$ -linéarisé  $\mathcal{L}$  sur  $\bar{H}$  tel que  $H \subset \bar{H}^s(\mathcal{L})$  si et seulement si*

$$d_2(N - c + 2) > d_1((c - 1)(d_2 - d_1) + 1). \quad (5.21)$$

**Preuve.** Rappelons avant tout le critère d'Hilbert-Mumford ([57] Theorem 2.1) : si  $\mathcal{L}$  est un fibré en droites ample  $SL_{N+1}$ -linéarisé sur  $\bar{H}$ , un point géométrique  $P \in \bar{H}(K)$  appartient à  $\bar{H}^s(\mathcal{L})$  si et seulement si, pour tout sous-groupe à un paramètre non trivial  $\rho : \mathbb{G}_{m, K} \rightarrow SL_{N+1, K}$ , on a  $\mu^{\mathcal{L}}(P, \rho) > 0$ .

On a vu au paragraphe 5.4.1.2 que les fibrés en droites sur  $\bar{H}$  étaient tous de la forme  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ , puis au paragraphe 5.4.1.3 que ceux-ci possédaient une unique  $SL_{N+1}$ -linéarisation. Par la proposition 5.4.6, un tel fibré en droites est ample si et seulement si  $l_2 > 0$  et  $\frac{l_1}{l_2} > (c - 1)(d_2 - d_1) + 1$ .

Supposons dans un premier temps que (5.21) est vérifiée et montrons que  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(l_1, l_2)$  avec  $l_1 = kd_2(N + 2 - c) - 1$  et  $l_2 = kd_1$  convient si  $k \gg 0$ . Ce fibré en droites est bien ample :  $l_2 > 0$  et  $\frac{l_1}{l_2} > (c - 1)(d_2 - d_1) + 1$  est vrai pour  $k \gg 0$  par l'hypothèse (5.21). Montrons alors  $H \subset \bar{H}^s(\mathcal{O}(l_1, l_2))$  en appliquant le critère d'Hilbert-Mumford. Soient pour cela  $P = [F_1, F_2, \dots, F_c] \in H(K)$  et  $\rho : \mathbb{G}_{m, K} \rightarrow SL_{N+1, K}$  un sous-groupe à un paramètre non trivial qu'on peut supposer de la forme obtenue dans le lemme 5.4.8. Par le lemme 5.4.9 et la proposition 5.4.12, quitte à modifier  $F_2, \dots, F_c$ , on peut supposer que  $\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho) = l_1 \deg_\alpha(F_1) + l_2 \sum_{i=2}^c \deg_\alpha(F_i)$ . Par le théorème 5.2.1 (ii), pour montrer que  $\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho) > 0$  et conclure, il suffit de vérifier que  $(N + 1)l_1d_1 > l_1d_1 + (c - 1)l_2d_2$  et que  $(N + 1)l_2d_2 > l_1d_1 + (c - 1)l_2d_2$ , i.e. que :

$$\frac{d_2}{d_1} \frac{c - 1}{N} < \frac{l_1}{l_2} < \frac{d_2}{d_1} (N - c + 2).$$

On remarque alors que  $\frac{l_1}{l_2}$  est une fonction croissante de  $k$  qui tend vers  $\frac{d_2}{d_1} (N - c + 2)$ . Cela montre que la seconde inégalité est toujours vraie. Comme  $\frac{c-1}{N} < 1 < N - c + 2$ , cela montre aussi que la première inégalité est vraie pour  $k \gg 0$ .

Réciproquement, supposons que (5.21) n'est pas vérifiée, et soit  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$  un fibré ample sur  $\bar{H}$ . L'amplitude de  $\mathcal{O}(l_1, l_2)$  et le fait que (5.21) n'est pas vraie

montrent que  $\frac{l_1}{l_2} \geq \frac{d_2}{d_1}(N - c + 2)$ , donc que  $(N + 1)l_2d_2 \leq l_1d_1 + (c - 1)l_2d_2$ . Alors, par le théorème 5.2.1 (iii), on peut trouver des entiers  $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$  non tous nuls de somme nulle et des équations  $F_i \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_i))$ ,  $1 \leq i \leq c$ , définissant une intersection complète lisse telles que :

$$l_1 \deg_\alpha(F_1) + l_2 \sum_{i=2}^c \deg_\alpha(F_i) \leq 0.$$

Soient  $\Phi_2, \dots, \Phi_c$  comme dans le lemme 5.4.9. Par la condition (ii) de ce lemme, on a encore :

$$l_1 \deg_\alpha(F_1) + l_2 \sum_{i=2}^c \deg_\alpha(\Phi_i) \leq 0.$$

Notant alors  $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow SL_{N+1,K}$  le sous-groupe à un paramètre défini par  $\rho(t) \cdot (x_0, \dots, x_N) = (t^{\alpha_0}x_0, \dots, t^{\alpha_N}x_N)$ , et  $P = [F_1, F_2, \dots, F_c] \in H(K)$ , la proposition 5.4.12 montre que  $\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho) \leq 0$ , de sorte que, par critère d'Hilbert-Mumford,  $P \notin \bar{H}^s(\mathcal{O}(l_1, l_2))$ .  $\square$

On peut à présent prouver le théorème 5.1.2.

### Preuve du théorème 5.1.2.

Rappelons que, comme expliqué dans l'introduction de ce chapitre,  $SL_{N+1}$  agit proprement sur  $H$  et le quotient grossier  $M$  fourni par le théorème de Keel et Mori est également un quotient géométrique.

Par la proposition 5.4.13, il existe un fibré en droites  $SL_{N+1}$ -linéarisé ample sur  $\bar{H}$  rendant tous les points de  $H$  stables. La théorie géométrique des invariants permet donc de construire un quotient géométrique quasi-projectif de  $H$  par  $SL_{N+1}$  ([66] Theorem 4).

Par [41] Corollary 2.15, comme  $SL_{N+1}$  agit proprement sur  $H$ , un quotient géométrique est aussi un quotient catégorique dans la catégorie des espaces algébriques, et est donc unique. Les deux quotients géométriques mentionnés ci-dessus coïncident donc, de sorte que  $M$  est quasi-projectif.  $\square$

*Remarque 5.4.14.* Tel quel, on a utilisé la séparation de  $\mathcal{M}$ , i.e. la propriété de l'action de  $SL_{N+1}$  sur  $H$ . Cependant, la démonstration donnée ci-dessus donne une nouvelle preuve de ce fait sous les hypothèses du théorème 5.1.2. En effet, par [57] Corollary 2.5,  $SL_{N+1}$  agit proprement sur  $\bar{H}^s(\mathcal{L})$ , donc sur  $H$ .

## 5.5 Hilbert-stabilité

On rappelle que  $N \geq 2$ ,  $1 \leq c \leq N - 1$  et  $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$  sont des entiers fixés et qu'une intersection complète sur un corps  $k$  est, sauf mention explicite du contraire, de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}_k^N$ , et de degrés  $d_1, \dots, d_c$ .

On rappelle également que, sauf s'il est explicitement fait mention du contraire, tous les schémas que nous considérons sont définis sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ . En particulier,  $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^N$ . On note  $pr : \mathbb{P}^N \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  le morphisme structurel.

Dans cette partie, on étudie le lien entre le théorème 5.2.1 et la Hilbert-stabilité des intersections complètes lisses.

Dans un premier temps, on rappelle des faits qui sont standards, en se restreignant au cas des intersections complètes. On explique la construction des fibrés de Plücker sur le schéma de Hilbert, la définition de la Hilbert-stabilité et la forme que prend le critère d'Hilbert-Mumford dans ce cadre.

Dans un deuxième temps, on explique pourquoi le théorème 5.2.1 permet de montrer une forme faible de ce critère d'Hilbert-Mumford pour les intersections complètes lisses.

### 5.5.1 Généralités

Notons  $P$  le polynôme de Hilbert des intersections complètes ; il est bien défini par la proposition 2.1.7 (iii). Si  $K$  est un corps algébriquement clos et  $Z \subset \mathbb{P}_K^N$  est une intersection complète, on note  $\mathcal{I}_Z$  son faisceau d'idéaux. Par annulation de Serre, on dispose pour  $l \gg 0$  de la suite exacte courte  $0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_Z(l)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}_Z(l)) \rightarrow 0$  qui montre que, pour  $l \gg 0$ ,  $h^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_Z(l))$  coïncide avec le polynôme  $Q(l) = \binom{N+l}{N} - P(l)$ .

Considérons le schéma de Hilbert  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$  de  $\mathbb{P}^N$  ; c'est un schéma projectif sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  dont  $H$  est un ouvert. Si  $Z$  est un sous-schéma de  $\mathbb{P}_K^N$  de polynôme de Hilbert  $P$ , on note  $[Z]$  le point géométrique de  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$  correspondant.

Rappelons que, par construction du schéma de Hilbert, on dispose pour  $l \gg 0$  d'une immersion fermée  $i_l : \text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P \hookrightarrow \mathbb{G}(Q(l), pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(l)^\vee)$  dont l'expression au niveau des points géométriques est  $i_l([Z]) = H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_Z(l))$ . En tirant en arrière par  $i_l$  le fibré de Plücker, on obtient, pour  $l \gg 0$ , un fibré en droites ample  $\mathcal{P}_l$  sur  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ .

Le schéma en groupes  $SL_{N+1}$  agit sur  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$  par changement de coordonnées. Le fibré en droites  $\mathcal{P}_l$  est naturellement  $SL_{N+1}$ -linéarisé comme suit :  $SL_{N+1}$  agit sur le faisceau  $pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(l)$ , donc sur  $\bigwedge^{Q(l)}(pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(l))$  et sur le fibré vectoriel géométrique qui lui est associé. L'éclaté le long de la section nulle de ce fibré vectoriel est le fibré vectoriel géométrique associé au  $\mathcal{O}(1)$  relatif sur  $\mathbb{P}(\bigwedge^{Q(l)}(pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(l))^\vee)$ . On obtient ainsi une linéarisation de ce  $\mathcal{O}(1)$ . Or, par définition,  $\mathcal{P}_l$  est le tiré en arrière de  $\mathcal{O}(1)$  par la composée du plongement de Plücker  $\mathbb{G}(Q(l), pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(l)^\vee) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^{Q(l)}(pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(l))^\vee)$  et de  $i_l$  ; on obtient donc une linéarisation de  $\mathcal{P}_l$  sur  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ .

On dit que  $Z$  est Hilbert-stable si  $[Z] \in (\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P)^s(\mathcal{P}_l)$  pour  $l \gg 0$ . Par le critère d'Hilbert-Mumford, il est équivalent de demander que, pour  $l \gg 0$ , pour tout sous-groupe à un paramètre  $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow SL_{N+1,K}$ , on ait  $\mu^{\mathcal{P}_l}([Z], \rho) > 0$ . Pour pouvoir utiliser ce critère, calculons ces fonctions  $\mu$  dans notre situation.

**Proposition 5.5.1.** *Soit  $l \gg 0$  tel que les constructions ci-dessus fonctionnent. Soient  $Z$  une intersection complète sur le corps algébriquement clos  $K$  et  $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow SL_{N+1,K}$  un sous-groupe à un paramètre choisi comme dans le lemme 5.4.8. Alors :*

$$\mu^{\mathcal{P}_l}([Z], \rho) = \min_{\mathfrak{B}} \left( \sum_{F \in \mathfrak{B}} \deg_\alpha(F) \right),$$

où le min porte sur les bases  $\mathfrak{B}$  de  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_Z(l))$ .

**Preuve.** Soit  $\mathfrak{B}$  une base de  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_Z(l))$  telle que  $\sum_{F \in \mathfrak{B}} \deg_\alpha(F)$  soit minimal. Il est possible d'en trouver une car cette quantité est minorée par  $Q(l)l\alpha_0$ . Montrons que  $\{F^\alpha | F \in \mathfrak{B}\}$  est une famille libre de  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l))$ . Si ce n'était pas le cas, il existerait des scalaires  $(a_F)_{F \in \mathfrak{B}}$  non tous nuls tels que  $\sum_{F \in \mathfrak{B}} a_F F^\alpha = 0$ . On choisit  $F \in \mathfrak{B}$  avec  $a_F$  non nul tel que  $\deg_\alpha(F)$  soit maximal. Considérons alors  $\mathfrak{B}'$  qui est l'ensemble  $\mathfrak{B}$  dans lequel on a remplacé  $F$  par  $\sum_{F \in \mathfrak{B}} a_F F$ . Par les choix faits,  $\mathfrak{B}'$  contredit la minimalité de  $\mathfrak{B}$ , ce qui prouve l'assertion.

Ceci montre que, dans  $\mathbb{G}(Q(l), pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(l)^\vee)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) \cdot \langle F \rangle_{F \in \mathfrak{B}} = \langle F^\alpha \rangle_{F \in \mathfrak{B}}.$$

Finalement, dans  $\bigwedge^{Q(l)} H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l))$ ,

$$\rho(t) \cdot \left( \bigwedge_{F \in \mathfrak{B}} F^\alpha \right) = t^{-\sum_{F \in \mathfrak{B}} \deg_\alpha(F)} \left( \bigwedge_{F \in \mathfrak{B}} F^\alpha \right),$$

ce qui montre, par définition de la  $SL_{N+1}$ -linéarisation de  $\mathcal{P}_l$ , que :

$$\mu^{\mathcal{P}_l}([Z], \rho) = \sum_{F \in \mathfrak{B}} \deg_\alpha(F).$$

□

### 5.5.2 Majoration des fonctions $\mu$

Dans ce paragraphe, on majore la quantité  $\mu^{\mathcal{P}_l}([Z], \rho)$  calculée dans la proposition 5.5.1.

**Lemme 5.5.2.** Soient  $Z = \{F_1 = \dots = F_c = 0\}$  une intersection complète sur le corps algébriquement clos  $K$ ,  $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow SL_{N+1,K}$  un sous-groupe à un paramètre choisi comme dans le lemme 5.4.8 et  $l \gg 0$ . Alors :

$$\mu^{\mathcal{P}_l}([Z], \rho) \leq \sum_{i=1}^c \deg_\alpha(F_i) \left( \sum_{i \notin I \subset \{1, \dots, c\}} (-1)^{c-1-|I|} \binom{N+l-\sum_{j \notin I} d_j}{N} \right). \quad (5.22)$$

**Preuve.** Si  $I \subset \{1, \dots, c\}$ , on note  $V_l^I = H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l - \sum_{i \notin I} d_i))$ . Pour  $0 \leq r \leq c$ , on pose  $K_l^r = \bigoplus_{\substack{I \subset \{1, \dots, c\} \\ |I|=r}} V_l^I$ . Considérons la résolution de Koszul de

$\mathcal{O}_Z$  sur  $\mathbb{P}_K^N$ . Si l'on tensorise cette résolution par  $\mathcal{O}(l)$  pour  $l \gg 0$ , le complexe obtenu en prenant les sections globales reste exact par annulation de Serre. On obtient ainsi une suite exacte longue de la forme :

$$0 \rightarrow K_l^0 \rightarrow \dots \xrightarrow{d^{r-1}} K_l^r \xrightarrow{d^r} \dots \rightarrow K_l^c \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}(l)) \rightarrow 0,$$

où  $d^r : V_l^I \rightarrow V_l^J$  est au signe près la multiplication par  $F_i$  si  $J = I \cup \{i\}$  et est nul dans les autres cas. On notera  $N_l^r = \text{Ker}(d^r) = \text{Im}(d^{r-1}) \subset K_l^r$ .

On introduit les notations suivantes. Si  $F \in V_l^I$ , on pose :

$$\deg'_\alpha(F) = \deg_\alpha(F) - \sum_{i \notin I} \deg_\alpha(F_i).$$

Si  $\Phi = (F_I) \in K_l^r$ , on pose  $\deg'_\alpha(\Phi) = \max_I \deg'_\alpha(F_I)$ . De plus, on modifie légèrement les conventions du paragraphe 5.2.1 : dans toute cette preuve, la notation  $\Phi^\alpha$  ou la notion d'élément  $\alpha$ -homogène fait référence à  $\deg'_\alpha$  et non à  $\deg_\alpha$ . Remarquons que si  $0 \leq r < c$  et  $\Phi \in K_l^r$ , par définition de  $\deg'_\alpha$  et vu l'expression de  $d^r$ , on a  $\deg'_\alpha(d^r(\Phi)) \leq \deg'_\alpha(\Phi)$ .

On va montrer par récurrence sur  $0 \leq r \leq c$  l'énoncé suivant : il existe une base  $\mathfrak{B}_l^r$  de  $N_l^r$  telle que :

$$\sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_l^r} \deg'_\alpha(\Phi) \leq \sum_{i=1}^c \deg_\alpha(F_i) \left( \sum_{\substack{i \notin I \subset \{1, \dots, c\} \\ |I| \leq r-1}} (-1)^{r-1-|I|} \dim(V_l^I) \right). \quad (5.23)$$

Pour  $r = 0$ ,  $N_l^0 = \{0\}$ , de sorte qu'on peut prendre  $\mathfrak{B}^0 = \emptyset$ .

Supposons l'énoncé vrai pour  $r$  et montrons-le pour  $r + 1$ . Pour cela, soit  $\mathfrak{B}_l^r$  une base de  $N_l^r$  telle que  $\sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_l^r} \deg'_\alpha(\Phi)$  soit minimal. L'argument de la première partie de la preuve du théorème 5.5.1 montre que  $\mathfrak{B}_l^{r,\alpha} = \{\Phi^\alpha, \Phi \in \mathfrak{B}_l^r\}$  est une famille libre d'éléments  $\alpha$ -homogènes de  $K_l^r$ . Complétons cette famille en une base  $\mathfrak{C}_l^r$  de  $K_l^r$  constituée d'éléments  $\alpha$ -homogènes. Remarquons que  $\sum_{\Phi \in \mathfrak{C}_l^r} \deg'_\alpha(\Phi)$  ne dépend pas de la base  $\mathfrak{C}$  de  $K_l^r$  constituée d'éléments  $\alpha$ -homogènes. Utilisant  $\alpha_0 + \dots + \alpha_N = 0$ , cette quantité est facile à calculer pour la base  $\mathfrak{C}$  constituée des monômes. Il vient donc :

$$\sum_{\Phi \in \mathfrak{C}_l^r} \deg'_\alpha(\Phi) = \sum_{\Phi \in \mathfrak{C}} \deg'_\alpha(\Phi) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, c\} \\ |I|=r}} \dim(V_l^I) \left( - \sum_{i \notin I} \deg_\alpha(F_i) \right). \quad (5.24)$$

Comme  $\{\Phi^\alpha, \Phi \in \mathfrak{B}_l^r \cup (\mathfrak{C}_l^r \setminus \mathfrak{B}_l^{r,\alpha})\} = \mathfrak{C}_l^r$  est une base de  $K_l^r$ ,  $\mathfrak{B}_l^r \cup (\mathfrak{C}_l^r \setminus \mathfrak{B}_l^{r,\alpha})$  est également une base de  $K_l^r$ . En particulier,  $\mathfrak{C}_l^r \setminus \mathfrak{B}_l^{r,\alpha}$  est une base d'un supplémentaire de  $N_l^r$  dans  $K_l^r$ , de sorte que  $\mathfrak{B}_l^{r+1} = d^r(\mathfrak{C}_l^r \setminus \mathfrak{B}_l^{r,\alpha})$  est une base de  $N_l^{r+1}$ . Montrons que cette base convient. Pour cela, on calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_l^{r+1}} \deg'_\alpha(\Phi) &\leq \sum_{\Phi \in (\mathfrak{C}_l^r \setminus \mathfrak{B}_l^{r,\alpha})} \deg'_\alpha(\Phi) \\ &= \sum_{\Phi \in \mathfrak{C}_l^r} \deg'_\alpha(\Phi) - \sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_l^r} \deg'_\alpha(\Phi) \\ &\leq \sum_{i=1}^c \deg_\alpha(F_i) \left( \sum_{\substack{i \notin I \subset \{1, \dots, c\} \\ |I| \leq r}} (-1)^{r-|I|} \dim(V_l^I) \right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé respectivement (5.24) et l'hypothèse de récurrence (5.23) pour évaluer les deux termes. Cela conclut la récurrence.

Pour conclure, faisons  $r = c$  dans (5.23). On obtient une base  $\mathfrak{B}_l^c$  de  $N_l^c = \text{Ker}[H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}(l))] = H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_Z(l))$  car  $l \gg 0$ . Comme  $\deg_\alpha$  et  $\deg'_\alpha$  coïncident pour des éléments de  $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l))$ , et comme  $\dim(V_l^I) = \binom{N+l-\sum_{j \notin I} d_j}{N}$ , on obtient :

$$\sum_{F \in \mathfrak{B}_l^c} \deg_\alpha(F) \leq \sum_{i=1}^c \deg_\alpha(F_i) \left( \sum_{i \notin I \subset \{1, \dots, c\}} (-1)^{c-1-|I|} \binom{N+l-\sum_{j \notin I} d_j}{N} \right).$$

Par la proposition 5.5.1, cela conclut.  $\square$

On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 5.5.3.** *Soient  $Z = \{F_1 = \dots = F_c = 0\}$  une intersection complète sur le corps algébriquement clos  $K$  et  $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow SL_{N+1,K}$  un sous-groupe à un paramètre choisi comme dans le lemme 5.4.8. Alors :*

$$\limsup_{l \rightarrow +\infty} \frac{\mu^{\rho_l}([Z], \rho)}{l^{N-c+1}} \leq \frac{d_1 \dots d_c}{(N-c+1)!} \sum_{i=1}^c \frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i}. \quad (5.25)$$

**Preuve.** Pour  $1 \leq j \leq c$ , on considère l'opérateur  $L_j : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{Q}[X]$  défini par  $L_j(P(X)) = P(X) - P(X - d_j)$ . L'opérateur  $L_j$  envoie un polynôme de degré  $\delta$  et de coefficient dominant  $a$  sur un polynôme de degré  $\delta - 1$  et de coefficient dominant  $a\delta d_j$ .

En développant directement, on obtient :

$$L_1 \circ \dots \circ \hat{L}_i \circ \dots \circ L_c \left( \binom{N+X-d_i}{N} \right) = \sum_{i \notin I \subset \{1, \dots, c\}} (-1)^{c-1-|I|} \binom{N+X-\sum_{j \notin I} d_j}{N},$$

ce qui montre que  $\sum_{i \notin I \subset \{1, \dots, c\}} (-1)^{c-1-|I|} \binom{N+X-\sum_{j \notin I} d_j}{N}$  est un polynôme de degré  $N - c + 1$  en  $X$  et de coefficient dominant  $\frac{d_1 \dots d_i \dots d_c}{(N-c+1)!}$ .

Par conséquent, le terme de droite dans l'inégalité (5.22) est un polynôme en  $l$  de degré  $\leq N - c + 1$  et dont le coefficient de  $l^{N-c+1}$  est  $\frac{d_1 \dots d_c}{(N-c+1)!} \sum_{i=1}^c \frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i}$ . En divisant par  $l^{N-c+1}$  l'inégalité (5.22), et en faisant tendre  $l$  vers  $+\infty$ , on montre le résultat voulu.  $\square$

### 5.5.3 Condition nécessaire de Hilbert-stabilité

La proposition 5.5.3 a pour corollaire immédiat une condition nécessaire de Hilbert-stabilité, qui est le résultat principal de cette partie.

**Corollaire 5.5.4.** *Soit  $Z = \{F_1 = \dots = F_c = 0\}$  une intersection complète Hilbert-stable sur le corps algébriquement clos  $K$ . Alors, si  $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$  sont des entiers de somme nulle, et quelque soit le système de coordonnées choisi,*

$$\sum_{i=1}^c \frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i} \geq 0. \quad (5.26)$$

*Remarque 5.5.5.* Le Theorem 1.1 de [64] montre que si  $Z$  est Chow-stable, l'inégalité (5.26) est stricte.

Rappelons que, par un théorème de Fogarty ([17], voir aussi [57] App. 4C), la Chow-stabilité de  $Z$  implique la Hilbert-stabilité de  $Z$  (en général, on n'a pas l'implication inverse). Ainsi, le corollaire 5.5.4 et le Theorem 1.1 de [64] ne peuvent se déduire l'un de l'autre.

Enfin, l'article [64] affirme (c'est la preuve du Corollary 1.2) que, si  $c = 2$ , et si l'inégalité (5.26) est vérifiée et est stricte,  $Z$  est Hilbert-stable. L'argument donné est malheureusement erroné.

Quand  $Z$  est lisse, l'inégalité (5.26) est vraie par le théorème 5.2.1 pour  $k_1 = \dots = k_c = 1$ . De plus, cette inégalité est stricte si l'on n'a pas  $c = 1$  et  $d_1 = 2$ . Autrement dit, le théorème 5.2.1 implique une forme faible de la Hilbert-stabilité (et de la Chow-stabilité) des intersections complètes lisses.

Quand  $d_1 = \dots = d_c$ , on peut appliquer les résultats de la partie 5.3. Dans ce cas,  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$  est la grassmannienne  $\bar{H}$ . Tous les fibrés amples  $\mathcal{P}_l$  introduits ci-dessus sont donc nécessairement proportionnels au fibré de Plücker sur  $\bar{H}$ . Alors, par la remarque 5.3.1, toutes les intersections complètes lisses sont Hilbert-stables.

Signalons le seul autre cas (à ma connaissance) pour lequel la Hilbert-stabilité est connue.

Quand  $N = 3$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 3$ , la Hilbert-stabilité des intersections complètes lisses est conséquence des travaux de Casalaina-Martin, Jensen et Laza [11]. Plus précisément, ils montrent que les intersections complètes lisses sont Chow-stables, ce qui implique leur Hilbert-stabilité par le théorème de Fogarty déjà mentionné ([17], voir aussi [57] App. 4C). On discute plus précisément le lien entre ces travaux et nos résultats au paragraphe 6.2.4.

Enfin, quand  $d_1 < d_2 = \dots = d_c$ , on peut faire un lien avec la partie 5.4. Par la proposition 5.4.12, le terme de gauche de (5.26) est exactement la quantité intervenant dans critère d'Hilbert-Mumford pour  $Z$  relativement au fibré en droites  $SL_{N+1}$ -linéarisé  $\mathcal{O}(d_2, d_1)$  sur  $\bar{H}$ .

Ceci s'explique de la manière suivante. Le fibré en droites  $\mathcal{P}_l|_{H^{ic}}$  vu comme élément de  $\text{Pic}(\bar{H}) \simeq \text{Pic}(H^{ic})$  est de la forme  $\mathcal{O}(\lambda_{1,l}, \lambda_{2,l})$  et  $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{1,l}}{\lambda_{2,l}} = \frac{d_2}{d_1}$ .

Cependant, par la proposition 5.4.6,  $\mathcal{O}(d_2, d_1)$  n'est jamais ample sur  $\bar{H}$ , de sorte qu'on ne peut pas appliquer le critère d'Hilbert-Mumford. En un certain sens, la positivité du terme de gauche de (5.26) pour  $Z$  lisse n'est pas assez forte pour impliquer la quasi-projectivité de l'espace de modules grossier  $M$ .





# Chapitre 6

## Exemples

### 6.1 Conventions et notations

On considère deux cas particuliers des champs de modules étudiés dans les chapitres précédents. Le premier ( $N = 3$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 3$ ) est un espace de modules de courbes, et le second ( $N = 4$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 3$ ) un espace de modules de surfaces K3 polarisées. Dans ces deux cas, le champ de modules et son espace de modules grossier sont construits classiquement, et ont été très étudiés.

Ces exemples concrets permettent de mettre en évidence les limites des constructions de théorie géométrique des invariants effectuées en 5.4.

Ils font également le lien avec d'autres travaux : l'article [11] au paragraphe 6.2.4 et l'article [50] au paragraphe 6.3.3.

Dans tout ce chapitre, on travaille sur  $\text{Spec}(\mathbb{C})$ . Leur foncteur des points montre que la formation du schéma de Hilbert (resp. du champ de modules) des intersections complètes commute au changement de base. De plus, la formation de l'espace de modules grossier commute au changement de base par le morphisme plat  $\text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ . On pourra donc sans conflit avec les chapitres précédents omettre partout la mention de  $\text{Spec}(\mathbb{C})$ . Par exemple, on écrira  $\mathcal{M}$  à la place de  $\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ .

À ce détail près, on conserve les notations du chapitre 2 et du paragraphe 5.4.1.

### 6.2 Courbes de genre 4

Dans cette partie, on fait  $N = 3$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 3$ .

### 6.2.1 Identification du champ de modules

On note  $H'$  le sous-schéma ouvert de  $H^{ic}$  qui paramètre les courbes qui sont intègres et nodales avec au plus un nœud. Le champ quotient  $[PGL_4 \backslash H']$  est noté  $\mathcal{M}'$ , de sorte qu'on a les immersions ouvertes suivantes :  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}^{ic}$ .

*Remarque 6.2.1.* On déduit aisément de la proposition 2.3.1 une description de  $\mathcal{M}'$  comme catégorie fibrée en groupoïdes : il suffit de modifier (2.5) en demandant que les fibres géométriques de  $p$  soient intègres et nodales avec au plus un nœud.

On note  $\mathcal{M}_4$  (resp.  $\bar{\mathcal{M}}_4$ ) le champ de modules des courbes lisses (resp. stables) de genre 4. On considère le sous-champ ouvert  $\mathcal{M}'_4$  de  $\bar{\mathcal{M}}_4$  paramétrant les courbes stables de genre 4 qui sont soit lisses soit intègres avec une unique singularité nodale. Une courbe intègre de genre 4 avec une unique singularité nodale est dite hyperelliptique si sa normalisation (qui est une courbe lisse de genre 3) est hyperelliptique et si son involution hyperelliptique échange les deux images réciproques du nœud. On note  $\mathcal{M}_4^{nh}$  (resp.  $\mathcal{M}'_4^{nh}$ ) les sous-champs ouverts de  $\mathcal{M}_4$  (resp.  $\mathcal{M}'_4$ ) paramétrant les courbes non hyperelliptiques.

On peut maintenant identifier les champs de modules  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$ .

**Proposition 6.2.2.** *Les champs  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}'_4^{nh}$  sont isomorphes.*

*Les champs  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_4^{nh}$  sont isomorphes*

**Preuve.** Pour montrer la première assertion, on va identifier les foncteurs des points de  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}'_4^{nh}$ . Soit  $T$  un schéma. La catégorie  $\mathcal{M}'_4^{nh}(T)$  a pour objets les familles  $p : X \rightarrow T$  propres, plates et de présentation finie dont les fibres géométriques sont des courbes stables de genre 4 intègres avec au plus un nœud et non hyperelliptiques. La catégorie  $\mathcal{M}'(T)$  est, elle, décrite en (2.5) en prenant en compte la remarque 6.2.1. Pour montrer que ces catégories sont équivalentes, on va procéder en trois temps. Tout d'abord, on montre que les conditions sur les fibres géométriques des familles sont les mêmes. Ensuite, on remarque que la donnée de  $\lambda \in \text{Pic}_{(X/T)(\text{fppf})}(T)$  dans (2.5) est superflue. Enfin, on vérifie que la condition de liberté locale et de compatibilité au changement de base dans (2.5) est automatique. Comme, dans les deux cas, les flèches sont données par les carrés cartésiens, cela montre que les catégories  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}'_4^{nh}$  sont équivalentes.

Vu les propositions 2.1.4 et 2.1.7, la condition sur les fibres géométriques des familles de  $\mathcal{M}'(T)$  dit exactement que ce sont des courbes  $C$  intègres nodales avec au plus un nœud, dont le faisceau dualisant est très ample et plonge  $C$  dans  $\mathbb{P}^3$  comme intersection complète d'une quadrique et d'une cubique. On a alors  $h^0(C, \omega_C) = h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(1)) = 4$ , de sorte qu'une telle courbe est automatiquement de genre arithmétique 4. La condition « intègre de genre arithmétique 4 et nodale » montre que  $C$  est stable. Par un théorème de Rosenlicht (voir [36] Th. 4.3 (a)  $\Leftrightarrow$  (e)), pour une courbe  $C$  intègre et nodale, la condition que  $\omega_C$  soit très ample est équivalente au fait que  $C$  ne soit pas hyperelliptique. Par [6] p.118, il est alors automatique que le modèle canonique de  $C$  soit intersection complète d'une quadrique et d'une cubique (la preuve donnée n'utilise la lissité de  $C$  que via le théorème de Noether, qui est toujours vrai dans notre cas par [36] Prop.

5.5). Ces arguments montrent que les conditions sur les fibres géométriques des familles de  $\mathcal{M}'(T)$  et  $\mathcal{M}'_4{}^{nh}(T)$  sont les mêmes.

Soit un objet de  $\mathcal{M}'(T)$  comme en (2.5); montrons qu'on a nécessairement  $\lambda = \omega_{X/T} \in \text{Pic}_{(X/T)(\text{fppf})}(T)$ , de sorte que la donnée de  $\lambda$  est superflue. Par le lemme 1.1.8,  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $X_U \rightarrow U$ . Choissant une trivialisatation de  $p_{U,*}\mathcal{L}$ , on réalise  $X_U$  comme sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}_U^N$ . On en déduit un morphisme  $\psi : U \rightarrow H^{ic}$  tel que  $X_U = \psi^*\mathcal{X}^{ic}$  et  $\mathcal{L} = \psi^*\mathcal{O}(1)$ . Il suffit alors de vérifier que  $\mathcal{O}(1) = \omega_{\mathcal{X}^{ic}/H^{ic}} \in \text{Pic}_{(\mathcal{X}^{ic}/H^{ic})(\text{fppf})}(H^{ic})$ ; c'est une conséquence des propositions 1.2.1 et 2.1.4.

Finalement, soit  $p : X \rightarrow T$  un objet de  $\mathcal{M}'_4{}^{nh}(T)$ , et montrons que la condition que  $p_*\omega_{X/T}$  est localement libre et de formation compatible à tout changement de base est automatique. Pour cela, on considère  $W \rightarrow \mathcal{M}'_4{}^{nh}$  une présentation de  $\mathcal{M}'_4{}^{nh}$ , et on note  $V = W \times_{\mathcal{M}'_4{}^{nh}} U$  le produit fibré. Soient  $p_W : X_W \rightarrow W$  et  $p_V : X_V \rightarrow V$  les familles de courbes associées. Comme  $\mathcal{M}'_4{}^{nh}$  est lisse,  $W$  est réduit, et la proposition 1.1.6 montre que  $p_{W,*}\omega_{X_W/W}$  est localement libre de rang 4 de formation commutant à tout changement de base. Par la proposition 1.1.2, il en va de même de  $p_{V,*}\omega_{X_V/V}$ . Finalement, comme  $W \rightarrow \mathcal{M}'_4{}^{nh}$  est une présentation de  $\mathcal{M}'_4{}^{nh}$ ,  $V \rightarrow U$  est lisse et surjectif, de sorte que la formation de  $p_*\omega_{X/T}$  commute à tout changement de base par la proposition 1.1.4 et que ce faisceau est localement libre de rang 4 par [23] 2.5.2 (iv).

Comme  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'_4{}^{nh}$  sont les sous-champs ouverts de  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}'_4{}^{nh}$  paramétrant des courbes lisses, on déduit la seconde assertion de la première.  $\square$

On utilisera les notations évidentes pour les espaces de modules grossiers. Par exemple,  $M'_4{}^{nh}$  est l'espace de modules grossier de  $\mathcal{M}'_4{}^{nh}$ . Soit  $q : H' \rightarrow M'_4{}^{nh}$  l'application quotient. On montre :

**Lemme 6.2.3.** *Le morphisme  $q : H' \rightarrow M'_4{}^{nh}$  est un quotient géométrique affine de  $H'$  par  $SL_4$ .*

**Preuve.** Le champ  $\mathcal{M}'_4{}^{nh} = [PGL_4 \backslash H']$  est séparé comme sous-champ ouvert de  $\bar{\mathcal{M}}_4$ . Par la proposition 1.3.2, on en déduit que  $PGL_4$  donc  $SL_4$  agit proprement sur  $H'$ . D'autre part, l'espace de modules grossier fourni par le théorème de Keel et Mori est un quotient géométrique (voir [62]), de sorte que  $M'_4{}^{nh}$  est un quotient géométrique de  $H'$  par  $SL_4$ . Ainsi, par [57] Prop. 0.7,  $q$  est affine.  $\square$

Enfin, comme le lieu hyperelliptique est de codimension 2 dans  $M_4$  et qu'une courbe de genre 3 générale n'est pas hyperelliptique,  $M'_4 \setminus M'_4{}^{nh}$  est de codimension 2 dans  $M'_4$ .

## 6.2.2 Courbes complètes

Notons  $A_4$  l'espace de modules grossier des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension 4 et  $t : M_4 \rightarrow A_4$  le morphisme de Torelli. On rappelle que  $t$  est injectif.

Une remarque due à Mumford (voir [59]) montre que par tout point de  $M_4$  passe une courbe complète. Pour voir cela, on considère la compactification  $\bar{M}_4^{\text{Sat}}$  de  $M_4$  construite en en prenant l'adhérence dans la compactification de Satake  $\bar{A}_4^{\text{Sat}}$  de  $A_4$ . C'est une compactification projective de  $M_4$  dont le bord est de codimension 2. En prenant des sections hyperplanes générales de  $\bar{M}_4^{\text{Sat}}$ , on obtient des courbes complètes dans  $\bar{M}_4^{\text{Sat}}$  qui n'intersectent pas le bord, i.e. des courbes complètes dans  $M_4$ .

Comme le lieu hyperelliptique est de codimension 2 dans  $M_4$ , le même argument permet de construire des courbes complètes dans  $M_4^{nh}$ . Vu la proposition 6.2.2, on obtient :

**Proposition 6.2.4.** *Par tout point de l'espace de modules grossier  $M$  passe une courbe complète.*

On en déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 6.2.5.** *L'espace de modules grossier  $M$  n'est pas affine. Le schéma  $H$  n'est pas non plus affine.*

**Preuve.** Comme  $M$  contient des courbes complètes, il ne peut être affine.

Si  $H$  était affine d'anneau  $A$ , on pourrait raisonner comme au paragraphe 5.3.2 : le spectre des invariants  $\text{Spec}(A^{SL_4})$  serait un quotient géométrique affine de  $H$  pour l'action de  $SL_4$ , qui coïnciderait avec  $M$  par unicité du quotient géométrique pour une action propre. L'espace algébrique  $M$  serait alors affine, ce qui est absurde.  $\square$

Ce résultat renforce le constat du paragraphe 5.4.3.1 : dans au moins un cas du théorème 5.1.2,  $H$  n'est pas affine, et il était donc impossible d'appliquer la stratégie de preuve du théorème 5.1.1. Il n'y a pas d'autres valeurs des paramètres pour lesquelles je sache que  $M$  n'est pas affine ; un autre cas particulier intéressant est discuté au paragraphe 6.3.4.

Enfin, je ne sais pas si  $H$  lui-même contient des courbes complètes. De manière générale, on ne sait pas s'il existe des courbes complètes dans l'ouvert du schéma de Hilbert de  $\mathbb{P}^N$  paramétrant des courbes lisses (voir [12]).

### 6.2.3 Compactification d'Igusa

L'objectif de ce paragraphe est la proposition 6.2.7. Introduisons les notations qui nous seront utiles.

Soit  $A'_4$  la compactification partielle de  $A_4$  paramétrant également les dégénérescences de rang 1 ;  $A'_4 \setminus A_4$  est un diviseur qu'on note  $D$ . On considère la compactification toroïdale d'Igusa (dite aussi centrale)  $\bar{A}_4^{\text{Igu}}$  de  $A_4$  : c'est une compactification de  $A'_4$  telle que  $\bar{A}_4^{\text{Igu}} \setminus A'_4$  est de codimension  $\geq 2$  dans  $\bar{A}_4^{\text{Igu}}$ . On notera encore  $D$  l'adhérence de  $D$  dans  $\bar{A}_4^{\text{Igu}}$ . On pourra se référer à [29] pour plus de détails.

Notons  $\bar{M}_4$  l'espace de modules grossier des courbes stables de genre 4. Le morphisme de Torelli  $t : M_4 \rightarrow A_4$  se prolonge en  $t : M'_4 \rightarrow A'_4$ , et en

$t : \bar{M}_4 \rightarrow \bar{A}_4^{\text{Igu}}$  (voir, par exemple, [3]). Notons  $\bar{M}_4^{\text{Igu}}$  la normalisation de l'image de  $\bar{M}_4$  dans  $\bar{A}_4^{\text{Igu}}$ . C'est une compactification de  $M'_4$  telle que  $\bar{M}_4^{\text{Igu}} \setminus M'_4$  soit de codimension  $\geq 2$  dans  $\bar{M}_4^{\text{Igu}}$ . En effet, les composantes irréductibles de  $\bar{M}_4 \setminus M_4$  qui paramètrent des courbes réductibles sont envoyées génériquement dans  $A_4$  par le morphisme de Torelli  $t$  et, restreint à ces composantes,  $t$  a des fibres de dimension  $> 0$ .

Le diagramme ci-dessous résume les notations introduites :

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \longrightarrow & H' & \xrightarrow{i} & \bar{H} \\
 \downarrow & & \downarrow q & & \\
 M_4^{nh} & \longrightarrow & M_4^{mh} & \longrightarrow & \bar{M}_4^{\text{Igu}} \\
 \downarrow t & & \downarrow t & & \downarrow \\
 A_4 & \longrightarrow & A'_4 & \longrightarrow & \bar{A}_4^{\text{Igu}}.
 \end{array}$$

L'article [29] décrit le groupe de Picard rationnel de  $\bar{A}_4^{\text{Igu}}$  (Prop. I.6) et son cône ample (Th. I.8). Hulek et Sankaran y montrent que  $\text{Pic}(\bar{A}_4^{\text{Igu}}) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}L \oplus \mathbb{Q}D$  où  $L$  est le  $\mathbb{Q}$ -fibré en droites modulaire et  $D$  la classe du  $\mathbb{Q}$ -diviseur de Cartier  $\bar{A}_4^{\text{Igu}} \setminus A_4$ . Le cône ample de  $\text{Pic}(\bar{A}_4^{\text{Igu}}) \otimes \mathbb{Q}$  est alors  $\{aL - bD \mid b > 0, a > 12b\}$ .

Calculons les tirés en arrière de ces fibrés en droites sur  $H'$ . Pour cela, on note  $i : H' \rightarrow \bar{H}$  l'inclusion. On notera encore  $L$  et  $D$  les restrictions de  $L$  et  $D$  à  $M_4^{mh}$  ou à  $\bar{M}_4^{\text{Igu}}$ .

**Lemme 6.2.6.** *On a :*

- (i)  $q^*L \simeq i^*\mathcal{O}(4, 4)$
- (ii)  $q^*D \simeq i^*\mathcal{O}(33, 34)$

**Preuve.**

- (i) Notons  $\mathcal{X}' \subset \mathbb{P}^3 \times H'$  la famille paramétrée par  $H'$  et  $pr_2 : \mathcal{X}' \rightarrow H'$  la projection. Par définition,  $q^*L \simeq \det(pr_{2,*}\omega_{\mathcal{X}'/H'})$ . Par dualité de Serre-Grothendieck, on a donc  $q^*L \simeq \det(R^1pr_{2,*}\mathcal{O}_{\mathcal{X}'})^\vee \simeq i^*\det(R^1pr_{2,*}\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}})^\vee$ . Pour calculer ce faisceau, on rappelle de la partie 5.4.1 que  $\pi_2^*\bar{\mathcal{X}}_{d_1}$  est le lieu des zéros dans  $\mathbb{P}^N \times \bar{H}$  d'une section de  $\mathcal{O}(d_1; 1, 0)$  et que  $\bar{\mathcal{X}}$  est le lieu des zéros dans  $\pi_2^*\bar{\mathcal{X}}_{d_1}$  d'une section de  $\mathcal{O}(d_2; 0, 1)$ . On a donc les suites exactes courtes suivantes :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}}(-d_1; -1, 0) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}} \rightarrow \mathcal{O}_{\pi_2^*\bar{\mathcal{X}}_{d_1}} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\pi_2^*\bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(-d_2; 0, -1) \rightarrow \mathcal{O}_{\pi_2^*\bar{\mathcal{X}}_{d_1}} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}} \rightarrow 0.$$

Écrivant les suites exactes longues d'images directes supérieures pour le morphisme  $pr_2$  associées à ces deux suites exactes courtes ainsi qu'à la

première de celles-ci tensorisée par  $\mathcal{O}(-d_2; 0, -1)$ , exploitant la formule de projection pour identifier les termes qui interviennent et utilisant les cas d'annulation classiques de la cohomologie des fibrés en droites sur  $\mathbb{P}^N$ , il vient  $R^1 pr_{2,*} \mathcal{O}_{\bar{X}} \simeq \mathcal{O}(-1, -1) \otimes H^3(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(-5))$ . Comme  $H^3(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(-5)) \simeq H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(1))^\vee$  est un espace vectoriel de dimension 4,  $\det(R^1 pr_{2,*} \mathcal{O}_{\bar{X}})^\vee \simeq \mathcal{O}(4, 4)$ , comme voulu.

- (ii) Notons  $\Delta = \bar{H} \setminus H$ , et montrons que  $q^*D = i^*\Delta$  comme diviseurs de Cartier. Qu'ils coïncident ensemblistement est évident : c'est le lieu où les courbes qu'on paramètre sont singulières. Il reste à voir que  $q^*D$  est génériquement réduit. Un point général de  $\Delta$  a un stabilisateur sous  $PGL_4$  trivial (car une courbe générale de genre 3 n'a pas d'automorphismes non trivial) de sorte qu'au voisinage d'un point général de  $D$ ,  $\mathcal{M}'$  et son espace de modules grossier  $M'$  coïncident. Comme l'application quotient  $H' \rightarrow M'$  est lisse, et que  $D \subset M'$  est réduit,  $q^*D$  est bien génériquement réduit. Finalement,  $\mathcal{O}(\Delta) \simeq \mathcal{O}(33, 34)$  est une application du théorème 7.1.3, et plus précisément de l'exemple 7.1.11.

□

On peut à présent montrer le résultat principal de ce paragraphe :

**Proposition 6.2.7.** *Soient  $l_1, l_2 > 0$  des entiers tels que  $1 < \frac{l_1}{l_2} < \frac{15}{14}$ . Notons  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(l_1, l_2)$ , c'est un fibré en droites  $SL_4$ -linéarisé sur  $\bar{H}$ . Alors :*

- (i)  $A = \bigoplus_k H^0(\bar{H}, \mathcal{L}^{\otimes k})^{SL_4}$  est une algèbre de type fini et  $\text{Proj}(A) = \bar{M}_4^{\text{Igu}}$ .
- (ii)  $H' \subset \bar{H}^s(\mathcal{L})$ .
- (iii)  $SL_4 \backslash \bar{H}^{ss}(\mathcal{L})$  s'identifie à un ouvert de  $\bar{M}_4^{\text{Igu}}$ .

**Preuve.** Posons  $a = m(34l_1 - 33l_2)$  et  $b = 4m(l_1 - l_2)$  où  $m$  est choisi assez grand pour que  $aL - bD$  soit un diviseur de Cartier sur  $\bar{A}_4^{\text{Igu}}$ . Comme  $1 < \frac{l_1}{l_2} < \frac{15}{14}$  et par description du cône ample de  $\bar{A}_4^{\text{Igu}}$ ,  $aL - bD$  est ample. D'autre part, par le lemme 6.2.6,  $q^*(aL - bD) \simeq \mathcal{L}^{\otimes 4m}$ . Comme, dans la preuve de la proposition, on peut remplacer  $\mathcal{L}$  par un de ses multiples, on peut maintenant supposer qu'il existe un fibré ample  $\mathcal{N}$  sur  $\bar{A}_4^{\text{Igu}}$  tel que  $q^*\mathcal{N} = \mathcal{L}$ .

- (i) On peut alors écrire :

$$A = \bigoplus_k H^0(\bar{H}, \mathcal{L}^{\otimes k})^{SL_4} = \bigoplus_k H^0(H', \mathcal{L}^{\otimes k})^{SL_4} \quad (6.1)$$

$$= \bigoplus_k H^0(M_4^{mh}, \mathcal{N}^{\otimes k}) \quad (6.2)$$

$$= \bigoplus_k H^0(\bar{M}_4^{\text{Igu}}, \mathcal{N}^{\otimes k}). \quad (6.3)$$

Les égalités (6.1) et (6.3) sont conséquence du théorème de Hartogs car  $\bar{H} \setminus H'$  est de codimension  $\geq 2$  dans  $\bar{H}$ ,  $\bar{M}_4^{\text{Igu}} \setminus M_4^{mh}$  est de codimension

$\geq 2$  dans  $\bar{M}_4^{\text{Igu}}$ , et  $\bar{H}$  et  $\bar{M}_4^{\text{Igu}}$  sont normaux. Pour montrer l'inégalité (6.2), il suffit de vérifier que le morphisme naturel de faisceaux sur  $M_4^{\text{nh}}$  :

$$\mathcal{N}^{\otimes k} \rightarrow (q_* q^* \mathcal{N}^{\otimes k})^{SL_4} \quad (6.4)$$

est un isomorphisme pour tout  $k$ . Il suffit de le faire localement sur  $M_4^{\text{nh}}$ . Pour cela, soit  $U = \text{Spec}(R)$  un ouvert affine de  $M_4^{\text{nh}}$  sur lequel  $\mathcal{N}$  est trivial. Par le lemme 6.2.3,  $q^{-1}(U)$  est affine, d'anneau  $S$  tel que  $R = S^{SL_4}$ . Au-dessus de  $U$ , le morphisme (6.4) est visiblement un isomorphisme.

Alors, comme  $\mathcal{N}$  est ample sur  $\bar{M}_4^{\text{Igu}}$ ,  $A$  est bien une algèbre de type fini, et  $\text{Proj}(A) = \bar{M}_4^{\text{Igu}}$ .

- (ii) Soient  $x \in H'$  et  $y = q(x) \in M_4^{\text{nh}}$ . Comme  $\mathcal{N}$  est ample sur  $\bar{M}_4^{\text{Igu}}$ , on peut trouver un entier  $k \geq 1$  et une section  $\sigma \in H^0(\bar{M}_4^{\text{Igu}}, \mathcal{N}^{\otimes k})$  dont le lieu des zéros contient  $\bar{M}_4^{\text{Igu}} \setminus M_4^{\text{nh}}$  mais pas  $y$ . Comme  $\mathcal{N}$  est ample, l'ouvert  $\{\sigma \neq 0\}$  de  $\bar{M}_4^{\text{Igu}}$  est affine, et contient  $y$ . Ainsi, par le lemme 6.2.3, l'ouvert  $U = \{q^* \sigma \neq 0\}$  de  $H'$  est affine, et contient  $x$ . Par l'égalité (6.1),  $q^* \sigma = i^* \tau$  avec  $\tau \in H^0(\bar{H}, \mathcal{L}^{\otimes k})^{SL_4}$ . Comme le complémentaire de l'ouvert affine  $U$  dans  $\bar{H}$  est nécessairement de codimension pure 1 (voir [27] II Prop. 3.1), et que  $\bar{H} \setminus H'$  est de codimension  $\geq 2$  dans  $\bar{H}$ ,  $\tau$  doit s'annuler sur  $\bar{H} \setminus H'$  de sorte que  $\{\tau \neq 0\} = U$ . On a montré que  $x \in \bar{H}^{ss}(\mathcal{L})$ , donc que  $H' \subset \bar{H}^{ss}(\mathcal{L})$ . De plus, comme  $SL_4$  agit sur  $H'$  avec stabilisateurs finis,  $H' \subset \bar{H}^s(\mathcal{L})$ .
- (iii) D'une part,  $\text{Proj}(A) = \bar{M}_4^{\text{Igu}}$  est recouvert par des ouverts affines de la forme  $\text{Spec}(A_{(f)})$  pour  $f \in A_+$ . D'autre part, sa construction montre que  $SL_4 \backslash \bar{H}^{ss}(\mathcal{L})$  est recouvert par des ouverts affines de la forme  $\text{Spec}(A_{(f)})$  pour  $f \in A_+$  tel que  $\{f \neq 0\}$  soit affine. Comme les données de recollement sont les mêmes, le second s'identifie à un ouvert du premier. □

*Remarque 6.2.8.* Par le théorème 5.4.6, les fibrés en droites sur  $\bar{H}$  considérés dans la proposition 6.2.7 ne sont jamais amples. En particulier, on n'aurait jamais pu appliquer le critère d'Hilbert-Mumford pour montrer cette proposition.

En fait, je ne sais pas montrer la proposition 6.2.7 sans exploiter la connaissance a priori du quotient  $\bar{M}_4^{\text{Igu}}$ .

Ce que cette remarque met en évidence est le fait que la compactification  $\bar{H}$  de  $H'$  utilisée dans la partie 5.4 pour appliquer la théorie géométrique des invariants n'est peut-être pas la compactification naturelle pour le faire. On peut en effet imaginer que, sur une autre compactification de  $H'$ , un fibré ample aurait pu permettre d'appliquer le critère d'Hilbert-Mumford, et d'obtenir  $\bar{M}_4^{\text{Igu}}$  comme compactification GIT du quotient  $M_4'$ .

### 6.2.4 Chow-stabilité

L'article récent [11] étudie très en détail une autre compactification de  $M_4^{\text{nh}}$  qui peut être obtenue par théorie géométrique des invariants en utilisant un

fibré en droites sur  $\bar{H}$  qui n'est pas ample. On résume ci-dessous les résultats qu'ils obtiennent ; le lecteur se référera à [11] pour plus de détails.

**Proposition 6.2.9.** *Soit  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(3, 2)$  : c'est un fibré en droites  $SL_4$ -linéarisé sur  $\bar{H}$ . Alors :*

- (i)  $A = \bigoplus_k H^0(\bar{H}, \mathcal{L}^{\otimes k})^{SL_4}$  est une algèbre de type fini. On pose  $\bar{M}_4^{GIT} = \text{Proj}(A)$ .
- (ii)  $H' \subset \bar{H}^s(\mathcal{L})$ .
- (iii)  $SL_4 \backslash \bar{H}^{ss}(\mathcal{L})$  s'identifie à un ouvert de  $\text{Proj}(A)$ .

De plus,  $\bar{M}_4^{GIT}$  s'identifie au quotient GIT de la variété de Chow relativement au fibré ample naturel, à un modèle log-canonique de  $\bar{M}_4$ , et à une modification de Looijenga d'un quotient arithmétique de  $\mathbb{B}_9$ .

*Remarque 6.2.10.* Insistons sur le fait que, à la différence de ce qui est fait dans le paragraphe précédent, la variété  $\bar{M}_4^{GIT}$  n'est pas connue a priori. Une partie importante du travail de [11] consiste à montrer que  $\bigoplus_k H^0(\bar{H}, \mathcal{L}^{\otimes k})^{SL_4}$  est de type fini, de sorte à pouvoir définir  $\bar{M}_4^{GIT} = \text{Proj}(A)$ .

*Remarque 6.2.11.* Par le théorème 5.4.6, le fibré  $\mathcal{L}$  n'est pas ample sur  $\bar{H}$ . Ainsi, la remarque 6.2.8 s'applique également à la proposition 6.2.9.

### 6.3 Surfaces K3 de degré 6

Dans cette partie, on fait  $N = 4$ ,  $c = 2$ ,  $d_1 = 2$  et  $d_2 = 3$ . On fait une étude analogue à celle menée dans la partie précédente.

#### 6.3.1 Généralités sur les surfaces K3

On rappelle ici des résultats classiques de géométrie des surfaces K3.

Une surface K3 sur un corps algébriquement clos est une surface propre et connexe avec au plus des points doubles rationnels telle que  $\omega_S \simeq \mathcal{O}_S$  et  $h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ . Elle est polarisée si elle est munie d'un fibré ample  $\mathcal{L}$ , et primitivement polarisée si la classe de  $\mathcal{L}$  est non divisible dans  $\text{Pic}(S)$ . Le degré de la polarisation est l'entier pair  $d = \mathcal{L}^2$ . On pose  $d = 2g - 2$ .

Une surface K3 primitivement polarisée  $(S, \mathcal{L})$  sur un corps algébriquement clos est dite unigonale si  $\mathcal{L}$  n'est pas sans point base. Elle est dite digonale si  $\mathcal{L}$  est sans point base mais pas très ample. Elle est dite non hyperelliptique si elle n'est ni unigonale ni digonale. Les résultats classiques sur les systèmes linéaires sur les surfaces K3 ([54], [63], voir aussi [50] 8A) montrent :

**Proposition 6.3.1.** *Soit  $(S, \mathcal{L})$  une surface K3 primitivement polarisée. Soit  $\tilde{S}$  la résolution minimale de  $S$ . Alors :*

- (i)  $S$  est singulière si et seulement s'il existe un diviseur  $D$  sur  $\tilde{S}$  tel que  $\mathcal{L}D = 0$  et  $D^2 = -2$ .
- (ii)  $(S, \mathcal{L})$  est unigonale si et seulement s'il existe un diviseur  $D$  sur  $\tilde{S}$  tel que  $\mathcal{L}D = 1$  et  $D^2 = 0$ .



- (iii) Si  $(S, \mathcal{L})$  est non unigonale, elle est digonale si et seulement si  $\mathcal{L}^2 = 2$ , ou s'il existe un diviseur  $D$  sur  $\tilde{S}$  tel que  $\mathcal{L}D = 2$  et  $D^2 = 0$ .
- (iv) Si  $(S, \mathcal{L})$  est non hyperelliptique, le système linéaire  $|\mathcal{L}|$  plonge  $S$  dans un espace projectif comme une variété projectivement normale.

**Proposition 6.3.2.** *Soit  $(S, \mathcal{L})$  une surface K3 primitivement polarisée non hyperelliptique de degré 6. Alors le système linéaire  $|\mathcal{L}|$  plonge  $S$  dans  $\mathbb{P}^4$  comme intersection complète d'une quadrique et d'une cubique.*

**Preuve.** La même démonstration que pour les courbes de genre 4 ([6] p.118) fonctionne ; il faut utiliser la proposition 6.3.1 (iv) à la place du théorème de Noether.  $\square$

On note  $\mathcal{F}'_d$  le champ de modules des surfaces K3 munies d'une polarisation primitive de degré  $d$ . Par définition, si  $T$  est un schéma,

$$\mathcal{F}'_d(T) = \left\{ \begin{array}{l} \text{morphisms de schémas } p : X \rightarrow T \text{ propres, plats} \\ \text{et de présentation finie munis de } \lambda \in \text{Pic}_{(X/T)(\text{fppf})}(T) \\ \text{dont les fibres géométriques sont isomorphes} \\ \text{à des surfaces K3 primitivement polarisées de degré } d \end{array} \right\} \quad (6.5)$$

On note  $\mathcal{F}_d$  (resp.  $\mathcal{F}_d^{nh}$ , resp.  $\mathcal{F}_d^{lh}$ ) les sous-champ ouvert paramétrant des surfaces K3 polarisées lisses (resp. non hyperelliptiques, resp. lisses et non hyperelliptiques).

### 6.3.2 Identification du champ de modules

On note  $H'$  le sous-schéma ouvert de  $H^{ic}$  qui paramètre les surfaces dont les singularités sont au plus des points doubles rationnels. Le champ quotient  $[PGL_5 \backslash H']$  est noté  $\mathcal{M}'$ , de sorte qu'on a les immersions ouvertes suivantes :  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}^{ic}$ .

*Remarque 6.3.3.* On déduit aisément de la proposition 2.3.1 une description de  $\mathcal{M}'$  comme catégorie fibrée en groupoïdes sur (Sch) : il suffit de modifier (2.5) en demandant que les fibres géométriques de  $p$  aient au plus des points doubles rationnels.

**Proposition 6.3.4.** *Les champs  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{F}_6^{nh}$  sont isomorphes. Les champs  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{F}_6^{lh}$  sont isomorphes*

**Preuve.** On procède comme pour la preuve de la proposition 6.2.2.

Pour montrer le premier énoncé, on identifie les foncteurs des points de  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{F}_6^{nh}$  décrits respectivement en (2.5) en prenant en compte la remarque 6.3.3 et en (6.5). Au vu de la remarque 2.3.3, la condition de liberté locale et de commutation à tout changement de base de  $p_{U,*}\mathcal{L}$  dans (2.5) est automatique. Il reste à vérifier que les conditions sur les fibres géométriques des familles de  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{F}_6^{nh}$  sont identiques. Vu la proposition 2.1.7, la condition sur les fibres géométriques des familles de  $\mathcal{M}'$  dit exactement que ce sont des surfaces

polarisées  $(S, \mathcal{L})$  avec au plus des points doubles rationnels telles que  $\mathcal{L}$  soit très ample et plonge  $S$  dans  $\mathbb{P}^4$  comme intersection complète d'une quadrique et d'une cubique. Par les propositions 2.1.4, 2.1.6 et 2.1.9 (i), on a alors  $\omega_S \simeq \mathcal{O}_S$ ,  $h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$  et  $S$  connexe, de sorte que  $(S, \mathcal{L})$  est une surface  $K3$  munie d'une polarisation de degré 6 ; comme 6 est sans facteur carré, cette polarisation est automatiquement primitive. Pour une surface  $K3$  primitivement polarisée  $(S, \mathcal{L})$ , la condition que  $\mathcal{L}$  soit très ample est équivalente au fait que  $(S, \mathcal{L})$  ne soit pas hyperelliptique. Quand la polarisation est de degré 6, il est automatique que le modèle canonique de  $S$  soit intersection complète d'une quadrique et d'une cubique par la proposition 6.3.2.

Le deuxième énoncé se déduit du premier.  $\square$

### 6.3.3 Compactification de Looijenga

L'application des périodes permet réaliser l'espace de modules  $F'_d$  comme un quotient par un groupe arithmétique  $\Gamma_d$  de l'espace symétrique  $\mathbb{D}$  associé au groupe orthogonal  $O(2, 19)$ . Par la proposition 6.3.1 (i), (ii) et (iii), les ouverts  $F_d$ ,  $F_d'^{nh}$  et  $F_d^{nh}$  de  $F'_d$  sont alors des quotients par  $\Gamma_d$  du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans dans  $\mathbb{D}$ .

L'article de Looijenga [50] construit des compactifications projectives de tels quotients. De plus, il est facile de contrôler la dimension du bord de ces compactifications. Une des motivations de [50] est que ces compactifications s'identifient souvent à des quotients construits à l'aide de théorie géométrique des invariants.

On note  $\bar{F}_6'^{nh}$  la compactification de Looijenga de  $F_6'^{nh}$ . Par [50] Coro. 8.5 pour  $g = 4$ , le bord de cette compactification est de dimension 3. L'énoncé qui nous intéresse est traité dans [50], Th. 8.6 pour  $g = 4$ . Il y est malheureusement légèrement erroné : Looijenga utilise l'amplitude du fibré en droites  $\mathcal{O}(1, 1)$  sur  $\bar{H}$  ; or il n'est pas ample par la proposition 5.4.6. Cette correction mineure effectuée, on obtient :

**Proposition 6.3.5.** *Soit  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1, 1)$  : c'est un fibré en droites  $SL_5$ -linéarisé sur  $\bar{H}$ . Alors :*

- (i)  $A = \bigoplus_k H^0(\bar{H}, \mathcal{L}^{\otimes k})^{SL_5}$  est une algèbre de type fini et  $\text{Proj}(A) = \bar{F}_6'^{nh}$ .
- (ii)  $H' \subset \bar{H}^s(\mathcal{L})$ .
- (iii)  $SL_5 \backslash \bar{H}^{ss}(\mathcal{L})$  s'identifie à un ouvert de  $\bar{F}_6'^{nh}$ .

*Remarque 6.3.6.* Comme précédemment, on voit en appliquant le théorème 5.4.6 que le fibré  $\mathcal{L}$  n'est pas ample sur  $\bar{H}$ . Ainsi, la remarque 6.2.8 s'applique également à la proposition 6.3.5.

*Remarque 6.3.7.* Le théorème 8.6 de [50] est également erroné pour  $g = 3$  et  $g = 5$ , pour des raisons différentes. On explique pourquoi en reprenant les notations de [50].

Quand  $g = 3$ , le bord de  $\hat{X}_3^\circ$  est un diviseur alors que le bord du quotient GIT  $PSL(W_3) \backslash Y_3^{ss}$  est de codimension  $\geq 2$ , de sorte qu'ils ne peuvent coïncider.

Quand  $g = 5$ , toutes les surfaces  $K3$  non hyperelliptiques ne sont pas intersections complètes de trois quadriques (c'est le cas si et seulement si elles ne

sont pas trigonales). Par conséquent,  $PSL(W_5)\backslash U_5$  est seulement un ouvert de  $X_5^\circ$ . Il n'est alors plus possible d'identifier les algèbres d'invariants.

#### 6.3.4 Courbes complètes

La compactification de Looijenga  $\bar{F}_6^{nh}$  de l'espace de modules grossier  $M' = F_6'^{nh}$  considérée au paragraphe précédent montre que  $M'$  contient des courbes complètes. On peut se demander, comme dans le paragraphe 6.2.2, si l'espace de modules grossier  $M = F_6^{nh}$  contient, lui, des courbes complètes. Ou bien, si ce n'est pas le cas, est-il même affine? Une variante plus naturelle est de poser la même question pour l'espace de modules grossier  $F_6$ . Je ne sais pas répondre à ces questions.

Plus généralement, qu'en est-il de l'espace de modules grossier  $F_d$  pour  $d \geq 2$  pair? L'article [9] montre que  $F_2$  est affine (ex. 2.1) mais que  $F_{28}$  contient des courbes complètes (paragraphe 3). Il serait intéressant de distinguer ce qui se passe suivant la valeur de  $d$ . Une stratégie naturelle pour contruire des courbes complètes, que je ne sais pas mener à bien, est d'utiliser les compactifications de Looijenga des espaces de modules de surfaces K3 lisses polarisées par un sous-réseau.



# Chapitre 7

## Degrés du discriminant

### 7.1 Introduction

On travaille sur un corps de base  $K$ , qui sera souvent sous-entendu. Par exemple,  $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}_K^N$ .

Une formule classique de Boole montre que, si  $K$  est de caractéristique 0, l'ensemble des hypersurfaces singulières de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^N$  est un diviseur de degré  $(N+1)(d-1)^N$  dans l'espace projectif de toutes les hypersurfaces. On obtient ici des formules analogues pour des intersections complètes de codimension et de degrés quelconques dans  $\mathbb{P}^N$ , en toute caractéristique.

#### 7.1.1 Énoncé du théorème principal

On fixe  $1 \leq c \leq N+1$  et  $1 \leq d_1, \dots, d_c$  des entiers. On notera  $e_i = d_i - 1$ . On va s'intéresser aux intersections complètes de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}^N$ , solutions d'équations homogènes de degrés  $d_1, \dots, d_c$  : on notera  $n = N - c$  leur dimension.

Pour cela, on considère  $V = \bigoplus_{1 \leq i \leq c} H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_i))$ . Les éléments de  $V$  sont la donnée de  $c$  polynômes homogènes de degrés  $d_1, \dots, d_c$  en  $N+1$  variables  $X_0, \dots, X_N$ . Soit  $D$  le fermé de  $V$  constitué des  $(F_1, \dots, F_c)$  tels que  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$  ne soit pas lisse de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}^N$ . On le munit de sa structure réduite. Par le lemme 7.3.2, la variété  $D$  est irréductible. Notons  $\Delta$  une de ses équations (par convention,  $\Delta = 1$  si  $\text{codim}_V(D) > 1$ ). On appellera  $D$  le lieu discriminant et  $\Delta$  le discriminant.

*Remarque 7.1.1.* Les lemmes 7.4.4 et 7.4.6, au vu du corollaire 7.3.3, montreront que  $\text{codim}_V(D) > 1$  exactement quand  $d_1 = \dots = d_c = 1$  et  $c < N+1$ .

Le discriminant est visiblement homogène en les coefficients de chacune des équations  $F_i$ . Le but de ce texte est de calculer ces degrés d'homogénéité partiels. Soyons plus précis.

Plusieurs transformations de  $V$  laissent  $D$  invariant. C'est le cas des actions

$\rho$  et  $\rho_i$  de  $\mathbb{G}_m$  et  $\rho'$  de  $GL_{N+1}$  décrites ci-dessous :

$$\begin{aligned}\rho(\lambda) &: (F_1, \dots, F_c) \mapsto (\lambda F_1, \dots, \lambda F_c) \\ \rho_i(\lambda) &: (F_1, \dots, F_c) \mapsto (F_1, \dots, F_{i-1}, \lambda F_i, F_{i+1}, \dots, F_c) \\ \rho'(M) &: (F_1, \dots, F_c) \mapsto (F_1 \circ M^{-1}, \dots, F_c \circ M^{-1}).\end{aligned}\quad (7.1)$$

Les actions duales induites sur  $\text{Sym}^\bullet V^*$  préservent la droite  $\langle \Delta \rangle$ . Ces actions sur  $\langle \Delta \rangle$  se font via un caractère du groupe. Il existe donc des entiers  $\text{deg}$ ,  $\text{deg}_i$  et  $\text{deg}_{var}$  tels que

$$\begin{aligned}\rho(\lambda).\Delta &= \lambda^{-\text{deg}} \Delta \\ \rho_i(\lambda).\Delta &= \lambda^{-\text{deg}_i} \Delta \\ \rho'(M).\Delta &= \det(M)^{\text{deg}_{var}} \Delta.\end{aligned}\quad (7.2)$$

Par exemple,  $\text{deg}$  est le degré total du polynôme homogène  $\Delta$ . Les autres nombres s'interprètent comme des degrés d'homogénéité partiels. Les identités  $\rho(\lambda) = \rho_1(\lambda) \circ \dots \circ \rho_c(\lambda)$  et  $\rho'(\lambda^{-1} \text{Id}) = \rho_1(\lambda)^{\text{od}_1} \circ \dots \circ \rho_c(\lambda)^{\text{od}_c}$  montrent qu'ils sont liés par les relations :

$$\text{deg} = \sum_{i=1}^c \text{deg}_i \quad (7.3)$$

$$(N+1) \text{deg}_{var} = \sum_{i=1}^c d_i \text{deg}_i. \quad (7.4)$$

*Remarque 7.1.2.* On peut aussi décrire les  $\text{deg}_i$  comme suit. Considérons comme espace de paramètres  $E = \prod_{1 \leq i \leq c} \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_i))$  et notons encore  $D$  le fermé irréductible de  $E$  constitué des  $([F_1], \dots, [F_c])$  tels que  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$  ne soit pas lisse de codimension  $c$  dans  $\mathbb{P}^N$ , muni de sa structure réduite. Alors, quand  $D$  est un diviseur de  $E$ , sa classe dans  $\text{Pic}(E) \simeq \mathbb{Z}^c$  est  $\mathcal{O}(\text{deg}_1, \dots, \text{deg}_c)$ .

Le résultat principal de ce texte est le suivant :

**Théorème 7.1.3.** *On a les égalités suivantes :*

$$\text{deg}_i = \frac{1}{\mu} d_1 \dots \hat{d}_i \dots d_c \sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})} \left( \frac{e_i^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_i - e_l} \right) \quad (7.5)$$

$$\text{deg}_{var} = \frac{1}{\mu} d_1 \dots d_c \sum_{l=1}^c \frac{e_l^N}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})} \quad (7.6)$$

où  $\mu = 1$  si  $K$  n'est pas de caractéristique 2 ou si  $n$  est impair, et  $\mu = 2$  si  $K$  est de caractéristique 2 et  $n$  est pair.

*Remarque 7.1.4.* Il faut interpréter cet énoncé, comme tous les énoncés similaires de ce texte, de la manière suivante : le terme de gauche est une fonction polynomiale en les  $d_i$  dont le polynôme est donné par le terme de droite. Que le terme de droite soit un polynôme en les  $d_i$  est conséquence du lemme 7.3.6 (i).

*Remarque 7.1.5.* Dans l'égalité (7.5), il faut interpréter  $\frac{e_i^{N+1} - e_i^{N+1}}{e_i - e_i}$  comme une notation pour le polynôme  $(N+1)e_i^N$ .

*Remarque 7.1.6.* Par (7.3), on peut également calculer  $\deg$ . Cependant, on ne peut simplifier avantageusement l'expression obtenue. Même pour  $c = 2$ , l'exemple 7.1.11 montre que la formule pour  $\deg$  est nettement moins élégante que celles pour  $\deg_{var}$ ,  $\deg_1$  et  $\deg_2$ .

On déduira de ce théorème le résultat qui suit :

**Théorème 7.1.7.** *Soit  $K = \mathbb{Q}$ , de sorte qu'on peut considérer le discriminant  $\Delta$  comme un polynôme irréductible à coefficients entiers. Soit  $p$  un nombre premier. Alors la réduction modulo  $p$  de  $\Delta$  est irréductible si  $p \neq 2$  ou si  $n$  est impair. C'est le carré d'un polynôme irréductible si  $p = 2$  et  $n$  est pair.*

### 7.1.2 Quelques exemples

On commence par illustrer le théorème 7.1.3. On suppose pour simplifier que  $\mu = 1$ . Par exemple, on peut prendre  $K$  de caractéristique différente de 2.

EXEMPLE 7.1.8. Quand  $c = 1$ ,  $D$  est l'ensemble des équations d'hypersurfaces singulières de degré  $d_1$  dans  $\mathbb{P}^N$  :  $\Delta$  est donc le discriminant usuel. Les formules (7.5) et (7.6) montrent qu'on a alors :

$$\begin{aligned} \deg_1 &= (N+1)e_1^N \\ \deg_{var} &= e_1^N. \end{aligned}$$

On retrouve la formule classique de Boole, qu'on pourra par exemple trouver dans [18] Chap.1, 4.15 et Chap.9, 2.10a.

EXEMPLE 7.1.9. Quand  $c = N+1$ ,  $D$  est l'ensemble des  $N+1$ -uplets d'équations homogènes admettant une solution commune dans  $\mathbb{P}^N$  :  $\Delta$  est donc le résultant usuel.

Pour évaluer la formule (7.5) dans ce cas, on peut remarquer que la quantité  $\sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})} \left( \frac{e_i^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_i - e_l} \right)$  est un polynôme de degré 0 en les  $e_j$ , c'est-à-dire une constante. Pour la calculer, on peut faire par exemple  $d_j = j$ , de sorte que  $\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'}) = (-1)^{N+1-l} (l-1)! (N+1-l)!$ . L'expression obtenue s'évalue facilement à l'aide de la formule du binôme. Tous calculs faits, cette constante vaut 1, et on obtient :

$$\begin{aligned} \deg_i &= d_1 \dots \hat{d}_i \dots d_{N+1} \\ \deg_{var} &= d_1 \dots d_{N+1}. \end{aligned}$$

Là encore, ces formules sont classiques. On peut les trouver dans [18] Chap.13, 1.1.

EXEMPLE 7.1.10. Quand  $d_1 = \dots = d_c = d$ ,  $D$  est l'ensemble des systèmes linéaires de degré  $d$  et de dimension  $c - 1$  dont le lieu de base est singulier.

Dans ce cas particulier également, les formules générales se simplifient nettement. Comme, par symétrie, tous les  $\deg_i$  sont égaux, il suffit par (7.4) et (7.3) de calculer  $\deg_{var}$ . Dans l'expression (7.6),  $\sum_{l=1}^c \frac{e_l^N}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})}$  est un polynôme homogène de degré  $N - c + 1$  en les  $e_j$ . Par conséquent,  $\deg_{var} = \lambda d^c e^{N-c+1}$  où  $\lambda$  est une constante à calculer. On évalue cette constante en faisant  $d_l = l\varepsilon$  dans le polynôme  $\sum_{l=1}^c \frac{e_l^N}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})}$ , en calculant cette quantité à l'aide de la formule du binôme, puis en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0. Tous calculs faits,

$$\begin{aligned} \deg_i &= \binom{N+1}{c} d^{c-1} (d-1)^{N-c+1} \\ \deg_{var} &= \binom{N}{c-1} d^c (d-1)^{N-c+1}. \end{aligned}$$

Ces formules auraient aussi pu être obtenues à l'aide de résultats de [18], par exemple de Chap.13, 2.5.

Supposons de plus  $d = 1$  et  $c < N + 1$ . Les degrés s'annulent : cela correspond aux cas où  $D$  est de codimension  $> 1$  dans  $V$  (voir la remarque 7.1.1).

Supposons enfin  $d = 1$  et  $c = N + 1$ , le polynôme  $\Delta$  est le déterminant usuel d'une matrice de taille  $N + 1$  ; on retrouve son degré total  $\deg = N + 1$ .

EXEMPLE 7.1.11. Spécialisons maintenant les formules (7.5) et (7.6) au cas d'intersections complètes de codimension 2, c'est-à-dire  $c = 2$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \deg_1 &= d_2(e_2^{N-1} + 2e_1e_2^{N-2} + \dots + Ne_1^{N-1}) \\ \deg_2 &= d_1(e_1^{N-1} + 2e_2e_1^{N-2} + \dots + Ne_2^{N-1}) \\ \deg_{var} &= d_1d_2 \frac{e_2^N - e_1^N}{e_2 - e_1}. \end{aligned}$$

Illustrons enfin le théorème 7.1.7 en explicitant deux cas particuliers classiques.

EXEMPLE 7.1.12. Quand  $N = 1$  et  $c = 1$ ,  $\Delta$  est le discriminant usuel d'un polynôme en une variable, vu comme un polynôme homogène en deux variables. Sa description classique en fonction des racines de ce polynôme (voir par exemple [60] 1.3.2) montre que ce polynôme est irréductible en caractéristique différente de 2, et le carré d'un polynôme irréductible en caractéristique 2. Comme  $n = 0$  est pair, c'est ce que prédit le théorème 7.1.7.

Signalons le cas particulier bien connu où  $d = 2$ . Le discriminant du polynôme  $aX^2 + bX + c$  est  $b^2 - 4ac$ . C'est toujours irréductible, sauf en caractéristique 2,  $b^2$  étant visiblement un carré.

EXEMPLE 7.1.13. Quand  $N$  est impair,  $c = 1$  et  $d = 2$ , les intersections complètes considérées sont des quadriques. Une telle quadrique est lisse si et



seulement si la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique qui la définit est non dégénérée (y compris en caractéristique 2, car  $N$  est impair).

Le discriminant  $\Delta$  est alors le déterminant de cette forme bilinéaire symétrique. En caractéristique 2, une forme bilinéaire symétrique est également antisymétrique, de sorte que son déterminant est le carré de son pfaffien. Cela montre que  $\Delta$  est un carré modulo 2. Comme  $n = N - 1$  est pair, c'est ce que prédit le théorème 7.1.7.

### 7.1.3 Stratégie de la démonstration

Dans la preuve du théorème 7.1.3, on peut, quitte à le remplacer par une clôture algébrique, choisir  $K$  algébriquement clos. On commence de plus par supposer  $K$  de caractéristique 0.

La proposition 7.3.1 permet d'interpréter  $D$  comme la variété duale d'une variété torique lisse convenable. Dans leur livre [18], Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ont étudié ces variétés ; ils obtiennent notamment une formule combinatoire permettant de calculer le degré de la variété duale d'une variété torique lisse ([18] Chap.9, 2.8).

Dans la deuxième partie de ce texte, on généralise cet énoncé pour obtenir une formule analogue calculant des degrés d'homogénéité partiels : c'est l'objet du théorème 7.2.3. On utilise de manière cruciale les résultats de [18].

Dans la troisième partie de ce texte, on démontre le théorème 7.1.3 en caractéristique 0 en évaluant cette formule dans notre cas particulier. Les calculs sont menés dans les propositions 7.3.9 et 7.3.10.

Finalement, on explique dans la quatrième partie les modifications à apporter à la preuve du théorème 7.1.3 pour qu'elle fonctionne en toute caractéristique.

Le seul obstacle que l'on rencontre sont les spécificités de la théorie de la dualité projective en caractéristique finie, qui ont été étudiées tout d'abord par Wallace [70], et au sujet desquelles on pourra consulter le survey [35] de Kleiman. Elles ont pour conséquence que le résultat de [18] que nous utilisons a besoin d'être légèrement modifié pour valoir en caractéristique finie. Cette modification effectuée, la preuve est identique.

Il convient de remarquer que si ces arguments supplémentaires sont indispensables en toute caractéristique finie, le théorème 7.1.3 ne voit son énoncé modifié qu'en caractéristique 2.

Enfin, le théorème 7.1.7 se déduit aisément du théorème 7.1.3.

## 7.2 Duale d'une variété torique

Dans cette partie,  $K$  est supposé algébriquement clos de caractéristique 0.

L'objectif est de montrer le théorème 7.2.3. Étant donnée une variété torique projective lisse, on calcule combinatoirement l'action du tore sur l'équation de sa variété duale.

### 7.2.1 Notations

On commence par fixer des notations.

Soit  $0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \tilde{T} \rightarrow T \rightarrow 0$  une suite exacte courte de tores,  $\tilde{T}$  étant de dimension  $k \geq 1$  et  $T$  de dimension  $k - 1$ . Soit  $0 \rightarrow \mathfrak{X}(T) \rightarrow \mathfrak{X}(\tilde{T}) \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \rightarrow 0$  la suite exacte courte de leurs groupes de caractères. On notera  $\mathfrak{X}_1 = h^{-1}(1)$  : c'est un espace principal homogène sous  $\mathfrak{X}(T)$ .

Soit  $A = \{\chi_1, \dots, \chi_{|A|}\} \subset \mathfrak{X}_1$  un sous-ensemble fini engendrant  $\mathfrak{X}_1$  comme espace affine. On notera  $\tilde{X}_A \subset (K^A)^*$  la variété torique affine de tore  $\tilde{T}$  associée. C'est, par définition, l'adhérence des  $(\chi_1(t), \dots, \chi_{|A|}(t))$ ,  $t \in \tilde{T}$ . La variété  $\tilde{X}_A$  est un cône ; on peut considérer son projectivisé  $X_A \subset \mathbb{P}((K^A)^*)$  qui est une variété torique projective de tore  $T$ . Le polytope correspondant est l'enveloppe convexe  $Q$  de  $A$  dans  $\mathfrak{X}_{1, \mathbb{R}} = \mathfrak{X}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ .

Notons  $X_A^\vee \subset \mathbb{P}(K^A)$  la variété duale de  $X_A$  munie de sa structure réduite et  $\tilde{X}_A^\vee \subset K^A$  son cône affine. On note  $\Delta_A$  une équation homogène de  $X_A^\vee$  (par convention,  $\Delta_A = 1$  si  $X_A$  est déficiente, c'est-à-dire si  $\text{codim}_{\mathbb{P}(K^A)}(X_A^\vee) > 1$ ). Le tore  $\tilde{T}$  agit sur  $(K^A)^*$  en préservant  $\tilde{X}_A$ . Par conséquent, l'action duale  $t \cdot \sum c_a \chi_a \mapsto \sum c_a \chi_a^{-1}(t) \chi_a$  de  $\tilde{T}$  sur  $K^A$  préserve  $\tilde{X}_A^\vee$ . L'action induite de  $\tilde{T}$  sur  $\text{Sym}^\bullet(K^A)^*$  préserve donc la droite  $\langle \Delta_A \rangle$  ; cette action se fait via un caractère de  $\tilde{T}$  que l'on notera  $\Xi_A : t \cdot \Delta_A = \Xi_A(t) \Delta_A$ . Ainsi, on a :

$$\Delta_A \left( \sum c_a \chi_a(t) \chi_a \right) = \Xi_A(t) \Delta_A \left( \sum c_a \chi_a \right). \quad (7.7)$$

En spécialisant cette identité à des sous-groupes à un paramètre convenables, on peut calculer les degrés d'homogénéité partiels de  $\Delta_A$ . Par exemple, en spécialisant au sous-groupe à un paramètre correspondant au cocaractère  $h$ , il vient  $\Delta_A(\lambda f) = \lambda^{h(\Xi_A)} \Delta_A(f)$  pour tout  $f \in K^A$ , soit

$$\deg(\Delta_A) = h(\Xi_A).$$

### 7.2.2 Équation de la duale

Le théorème [18] Chap. 9, 2.8 dû à Gelfand, Kapranov et Zelevinsky permet de calculer  $\deg(\Delta_A) = h(\Xi_A)$  en fonction du polytope  $Q$  si  $X_A$  est lisse. Nous allons généraliser cet énoncé en obtenant une formule pour  $\Xi_A$ . La démonstration est très proche de celle de [18], et utilise de manière essentielle les résultats de ce livre. En particulier, elle repose sur une formule pour  $\Delta_A$  que nous rappelons dans ce paragraphe.

Si  $\Gamma$  est une face de  $Q$ , on considèrera  $\tilde{\Gamma}$  le cône sur  $\Gamma$  de sommet 0 dans  $\mathfrak{X}(\tilde{T})_{\mathbb{R}}$ ,  $\Gamma^0$  et  $\tilde{\Gamma}^0$  leurs intérieurs relatifs,  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  le sous-espace affine de  $\mathfrak{X}_{1, \mathbb{R}}$  engendré par  $\Gamma$ , et  $\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{X}(\tilde{T})_{\mathbb{R}}$  engendré par  $\tilde{\Gamma}$ . L'espace affine  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  est muni du réseau naturel  $\Gamma_{\mathbb{Z}} = \Gamma_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{X}_1(T)$  ; on notera  $\mu_{\Gamma}$  la mesure de Lebesgue sur  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  normalisée de sorte à ce que le simplexe unité soit de mesure 1. De même, on notera  $\tilde{\Gamma}_{\mathbb{Z}}$  le réseau  $\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})$  de  $\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}$ .

On note  $S$  le semi-groupe de  $\mathfrak{X}(\tilde{T})$  engendré par  $A$ . Si  $u \in S$ , on note  $\tilde{\Gamma}(u)$  la plus petite face de  $\tilde{Q}$  contenant  $u$ . Si  $l \geq 0$ , on notera  $S_l$  (resp.  $\tilde{\Gamma}_l$ ) l'ensemble

des  $u \in S$  (resp. des  $u \in \tilde{\Gamma}$ ) tels que  $h(u) = l$ . Gardons en mémoire que :

$$S_l = \tilde{Q}_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T}) \text{ pour } l \gg 0. \quad (7.8)$$

En effet c'est la traduction combinatoire de la surjectivité de l'application de restriction  $H^0(\mathbb{P}((K^A)^*), \mathcal{O}(l)) \rightarrow H^0(X_A, \mathcal{O}(l))$ , elle-même conséquence du théorème d'annulation de Serre.

On considère les  $K$ -espaces vectoriels :

$$C^i(A, l) = \bigoplus_{u \in S_{i+l}} \bigwedge^i (\tilde{\Gamma}(u)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K).$$

Si  $f = \sum c_a \chi_a \in K^A$ , on définit des applications linéaires

$$\begin{aligned} \partial_f : C^i(A, l) &\rightarrow C^{i+1}(A, l) \\ (u, \omega) &\mapsto - \sum c_a (u + \chi_a, \chi_a \wedge \omega), \end{aligned}$$

de sorte que  $(C^\bullet(A, l), \partial_f)$  soit un complexe. Soit de plus  $e = (e(i))$  la donnée de bases de chacun des  $C^i(A, l)$ .

**Théorème 7.2.1** ([18] Chap.9, 2.7). *On suppose que  $X_A$  est lisse. Alors, si  $l \gg 0$ , on a*

$$\Delta_A(f) = \det(C^\bullet(A, l), \partial_f, e)^{(-1)^k},$$

où chacun des deux termes est bien défini à une constante multiplicative non nulle près.

Pour la définition du déterminant d'un complexe exact muni de bases, on renvoie à [18] App.A. On rappelle seulement ci-dessous la proposition facile [18] App.A 9, car nous en aurons besoin pour la suite, et que les signes sont malheureusement faux dans [18].

**Proposition 7.2.2.** *Soit  $(W^\bullet, d)$  un complexe exact, et  $e = (e(i))$ ,  $e' = (e'(i))$  deux jeux de bases.*

*Soient  $M(i)$  les matrices de transition :  $e(i)_p = \sum_{q=1}^{\dim W_i} M(i)_{p,q} e'(i)_q$ . Alors,*

$$\det(W^\bullet, d, e') = \det(W^\bullet, d, e) \prod_i \det(M(i))^{(-1)^i}.$$

### 7.2.3 Action du tore

Énonçons enfin la formule pour  $\Xi_A$  et démontrons-la.

**Théorème 7.2.3.**

$$\Xi_A = \sum_{\Gamma \subset Q} (-1)^{\text{codim}(\Gamma)} (\dim(\Gamma) + 1) \int_{\Gamma} u d\mu_{\Gamma}(u).$$

**Preuve.** Soit  $t \in \tilde{T}$ . On introduit les applications linéaires :

$$\begin{aligned} g_t^{i,l} : C^i(A, l) &\rightarrow C^i(A, l) \\ (u, \omega) &\mapsto u(t)(u, \omega). \end{aligned} \quad (7.9)$$

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^i(A, l) & \xrightarrow{\partial_f} & C^{i+1}(A, l) \\ g_t^{i,l} \downarrow & & g_t^{i+1,l} \downarrow \\ C^i(A, l) & \xrightarrow{\partial_{t^{-1} \cdot f}} & C^{i+1}(A, l) \end{array}$$

de sorte que  $g_t^{\bullet,l} : (C^\bullet(A, l), \partial_f) \rightarrow (C^\bullet(A, l), \partial_{t^{-1} \cdot f})$  est un morphisme de complexes. Par la proposition 7.2.2, notant  $(e'(i)) = (g_t^{i,l})^{-1}(e(i))$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \det(C^\bullet(A, l), \partial_{t^{-1} \cdot f}, e) &= \det(C^\bullet(A, l), \partial_f, e') \\ &= \det(C^\bullet(A, l), \partial_f, e) \prod_i \det(g_t^{i,l})^{(-1)^i}. \end{aligned}$$

Par le théorème 7.2.1, ceci se réécrit :

$$\Delta_A(t^{-1} \cdot f)^{(-1)^k} = \Delta_A(f)^{(-1)^k} \prod_i \det(g_t^{i,l})^{(-1)^i} \text{ pour } l \gg 0.$$

La définition (7.7) de  $\Xi_A$  montre alors que :

$$\Xi_A(t) = \prod_{i \geq 0} \det(g_t^{i,l})^{(-1)^{i+k}} \text{ pour } l \gg 0.$$

Utilisant la définition (7.9) de  $g_t^{i,l}$ , on calcule alors :

$$\Xi_A(t) = \prod_{i \geq 0} \prod_{u \in S_{i+l}} u(t)^{(-1)^{i+k} \dim_{\mathbb{Z}} \wedge^i(\tilde{\Gamma}(u)_{\mathbb{Z}})} \text{ pour } l \gg 0,$$

ce qui se réécrit :

$$\Xi_A = \sum_{i \geq 0} \sum_{u \in S_{i+l}} (-1)^{i+k} \dim \wedge^i(\tilde{\Gamma}(u)_{\mathbb{R}}) \cdot u \text{ pour } l \gg 0.$$

On change alors l'ordre de sommation en regroupant les  $u$  suivant la plus grande face de  $Q$  à laquelle ils appartiennent. En prenant de plus (7.8) en compte, on obtient :

$$\Xi_A = \sum_{\Gamma \subset Q} \sum_{i \geq 0} (-1)^{i+k} \binom{\dim(\Gamma) + 1}{i} \sum_{u \in \tilde{\Gamma}_{i+l}^0 \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} u \text{ pour } l \gg 0.$$

Appliquant alors les lemmes 7.2.5 et 7.2.4, il vient :

$$\begin{aligned}\Xi_A &= \sum_{\Gamma \subset Q} (-1)^{\dim(\Gamma)+1+k} (\dim(\Gamma) + 1) \int_{\Gamma} u d\mu_{\Gamma}(u) \\ &= \sum_{\Gamma \subset Q} (-1)^{\text{codim}(\Gamma)} (\dim(\Gamma) + 1) \int_{\Gamma} u d\mu_{\Gamma}(u).\end{aligned}$$

□

Le lemme ci-dessous est connu et est par exemple conséquence de [10] 4.5. Cependant, en l'absence de référence où il apparaît sous une forme directement utilisable, j'en donne une preuve rapide utilisant la polynomialité de la fonction d'Ehrhart (voir par exemple [55] 12.2).

**Lemme 7.2.4.** *Soit  $\Gamma$  une face de  $Q$ . Alors, pour  $l \geq 0$ , la fonction*

$$l \mapsto \sum_{u \in \tilde{\Gamma}_l^0 \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} u$$

*est polynomiale de terme dominant  $\frac{l^{\dim(\Gamma)+1}}{\dim(\Gamma)!} \int_{\Gamma} u d\mu_{\Gamma}(u)$ .*

**Preuve.** Montrons d'abord qu'il s'agit d'un polynôme de degré  $\leq \dim(\Gamma) + 1$  pour  $l \geq 0$ . En raisonnant par récurrence sur la dimension de  $\Gamma$  et en appliquant une formule d'inclusion-exclusion pour les faces de  $Q$  incluses dans  $\Gamma$ , on voit qu'il suffit de montrer cette propriété pour la fonction  $l \mapsto \sum_{u \in \tilde{\Gamma}_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} u$ .

Il faut montrer que pour toute forme linéaire entière  $\psi$  sur  $\mathfrak{X}(\tilde{T})$ , l'application  $P_{\psi}(l) = \sum_{u \in \tilde{\Gamma}_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} \psi(u)$  est polynomiale pour  $l \geq 0$ . Si  $\psi = h$ , cette fonction est  $P_h(l) = \sum_{u \in \tilde{\Gamma}_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} l = l \text{Card}(\tilde{\Gamma}_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T}))$ , soit  $l$  fois la fonction d'Ehrhart de  $\Gamma$ , et est donc polynomiale en  $l$  de degré  $\leq \dim(\Gamma) + 1$ .

Autrement, quitte à ajouter à  $\psi$  un multiple de  $h$ , on peut supposer  $\psi$  positive sur  $Q$ . La fonction  $P_{\psi}$  est alors la fonction d'Ehrhart du polytope auxiliaire  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \oplus \mathfrak{X}_{1, \mathbb{R}} \mid y \in Q, 0 \leq x \leq \psi(y)\}$ , et est donc polynomiale en  $l$  de degré  $\leq \dim(\Gamma) + 1$ .

Il reste à calculer le coefficient dominant. C'est :

$$\begin{aligned}\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l^{\dim(\Gamma)+1}} \sum_{u \in \tilde{\Gamma}_l^0 \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} u &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l^{\dim(\Gamma)}} \sum_{u \in \tilde{\Gamma}_l^0 \cap \frac{1}{l} \mathfrak{X}(\tilde{T})} u \\ &= \frac{1}{\dim(\Gamma)!} \int_{\Gamma} u d\mu_{\Gamma}(u),\end{aligned}$$

où l'on a identifié dans la dernière égalité une intégrale et une limite de sommes de Riemann en prenant en compte la normalisation que nous avons choisie : la mesure du cube unité est  $\dim(\Gamma)!$ . □

Le lemme suivant est facile et classique :

**Lemme 7.2.5.** Soit  $N \geq 0$  et  $P$  un polynôme de degré  $N$  et de coefficient dominant  $a_N$ . Alors

$$\sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N}{i} P(X+i) = (-1)^N N! a_N.$$

**Preuve.** Soit  $\Phi : P(X) \mapsto P(X+1)$  l'endomorphisme de l'anneau des polynômes. Par la formule du binôme,  $(\text{Id} - \Phi)^N(P) = \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N}{i} P(X+i)$ . C'est alors un calcul immédiat de vérifier que  $(\text{Id} - \Phi)$  fait baisser le degré d'un polynôme de 1 et multiplie son coefficient dominant par l'opposé de son degré.  $\square$

### 7.3 Degrés d'homogénéité du discriminant

Dans toute cette partie,  $K$  est encore supposé algébriquement clos de caractéristique 0. On applique le théorème 7.2.3 pour démontrer le théorème principal 7.1.3 sous cette hypothèse.

#### 7.3.1 Interprétation torique du lieu discriminant

On commence par expliquer pourquoi notre problème s'inscrit dans le cadre général décrit ci-dessus des variétés duales de variétés toriques.

Considérons le groupe abélien libre de rang  $c+N+1$  engendré par  $(Y_i)_{1 \leq i \leq c}$  et  $(X_j)_{0 \leq j \leq N}$ . On note  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  les applications coordonnées suivant  $Y_i$  et  $X_j$ . Soit  $\mathfrak{X}(\tilde{T})$  le sous-réseau de rang  $c+N$  défini par l'équation  $\sum_i d_i \alpha_i = \sum_j \beta_j$ . On note  $h = \sum_i \alpha_i : \mathfrak{X}(\tilde{T}) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\mathfrak{X}(T)$  son noyau qui est un groupe abélien libre de rang  $k = c+N-1$ , et  $\mathfrak{X}_1 = h^{-1}(1)$ . On a par dualité les morphismes de tores suivants :

$$(K^*)^{(c+N+1)} \rightarrow \tilde{T} \rightarrow T. \quad (7.10)$$

On introduit l'ensemble  $A = \{Y_i X_0^{e_0} \dots X_N^{e_N}\}_{1 \leq i \leq c, e_j \geq 0, \sum e_j = d_i}$  de  $\mathfrak{X}_1$ , qui l'engendre comme espace affine. L'espace vectoriel  $K^A$  s'identifie naturellement à  $V = \bigoplus_{1 \leq i \leq c} H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_i))$ .

**Proposition 7.3.1.** On a l'égalité suivante entre fermés de  $V = K^A$  :

$$D = \tilde{X}_A^\vee.$$

**Preuve.** Soit  $H$  l'hyperplan de  $(K^A)^*$  d'équation  $f = \sum_i Y_i F_i = 0$ .

$H$  est tangent à  $\tilde{X}_A$  en un point de  $\tilde{T}$  (7.11)

$\Leftrightarrow \{f = 0\}$  n'est pas un diviseur lisse de  $\tilde{T}$

$\Leftrightarrow \{f = 0\}$  n'est pas un diviseur lisse de  $(K^*)^{(c+N+1)}$

$\Leftrightarrow \exists (y_1, \dots, y_c, x_0, \dots, x_N) \in (K^*)^{(c+N+1)}$  tels que

$$F_i(x_0, \dots, x_N) = 0 \text{ et } \sum_i y_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0, \dots, x_N) = 0$$

$\Leftrightarrow$  les  $F_i$  ont un zéro commun à coordonnées non nulles en lequel leurs

dérivées partielles vérifient une relation linéaire à coefficients non nuls. (7.12)

Notons  $U$  le sous-ensemble de  $K^A$  constitué de ces hyperplans. Par (7.11) et la définition de la variété duale, son adhérence est  $\tilde{X}_A^\vee$ . Par (7.12) et le critère jacobien,  $U \subset D$ . Mieux : (7.12) et le lemme 7.3.2 (i) et (ii) montrent que  $U$  est dense dans  $D$ .

Par conséquent,  $D = \tilde{X}_A^\vee$ .  $\square$

**Lemme 7.3.2.** *La variété  $D$  est irréductible. De plus, si  $(F_1, \dots, F_c)$  est un point général de  $D$ , les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) *La variété  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$  possède un point singulier à coordonnées toutes non nulles.*

(ii) *Si  $I \subsetneq \{1, \dots, c\}$ , la variété  $\{(F_i = 0)_{i \in I}\}$  est lisse de codimension  $|I|$ .*

**Preuve.** Soit  $Z \subset V \times \mathbb{P}^N$  le fermé constitué des  $(F_1, \dots, F_c, P)$  tels que la variété  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$  ait un espace tangent de dimension  $> c$  en  $P$ . On notera  $p_1 : Z \rightarrow V$  et  $p_2 : Z \rightarrow \mathbb{P}^N$  les deux projections. Comme  $D = p_1(Z)$ , pour montrer que  $D$  est irréductible, il suffit de montrer que  $Z$  l'est. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout  $P \in \mathbb{P}^N$ ,  $p_2^{-1}(P)$  est irréductible. Utilisant l'homogénéité sous  $PGL_{N+1}$ , il suffit de montrer que  $p_2^{-1}([1 : 0 : \dots : 0])$  est irréductible. En écrivant le critère jacobien en coordonnées, on voit que c'est conséquence du fait classique que l'ensemble des matrices  $(N+1) \times c$  de rang  $< c$  est irréductible.

Montrons (i). L'ouvert  $W \subset \mathbb{P}^N$  des points à coordonnées toutes non nulles est dense. Son image réciproque par le morphisme dominant  $p_2$  est donc dense dans  $Z$ , et  $p_1(p_2^{-1}(W))$  est dense dans  $D = p_1(Z)$ , ce qu'on voulait.

Montrons (ii). Par Bertini, on choisit des  $(F_i)_{i \in I}$  tels que  $\{(F_i = 0)_{i \in I}\}$  soit lisse de codimension  $|I|$  dans  $\mathbb{P}^N$ , et on pose  $F_i = 0$  si  $i \notin I$ . Ceci montre qu'il existe  $(F_1, \dots, F_c) \in D$  tel que  $\{(F_i = 0)_{i \in I}\}$  soit lisse de codimension  $|I|$ . Comme  $D$  est irréductible, un point général de  $D$  vérifie cette propriété.  $\square$

On déduit immédiatement de la proposition 7.3.1 le corollaire suivant :

**Corollaire 7.3.3.** *On a  $\text{codim}_V(D) > 1$  si et seulement si  $X_A$  est déficiente.*

On peut de plus relier les degrés d'homogénéité qu'on cherche à calculer au caractère  $\Xi_A$ .

**Corollaire 7.3.4.** *On a les relations suivantes :*

$$(i) \text{ deg} = h(\Xi_A).$$

$$(ii) \text{ deg}_i = \alpha_i(\Xi_A).$$

$$(iii) \text{ deg}_{\text{var}} = \beta_j(\Xi_A).$$

**Preuve.** Montrons (ii), qui est la seule relation que nous utiliserons. Les autres se prouvent de manière analogue. On écrit, pour  $f = \sum c_a \chi_a \in K^A = V$  :

$$\begin{aligned} \lambda^{\text{deg}_i} \Delta_A(f) &= (\rho_i(\lambda^{-1}) \cdot \Delta_A)(f) \quad \text{par (7.2)} \\ &= \Delta_A(\rho_i(\lambda) \cdot f) \\ &= \Delta_A\left(\sum \lambda^{\alpha_i(\chi_a)} c_a \chi_a\right) \text{ par (7.1) et la définition de } \alpha_i \\ &= \lambda^{\alpha_i(\Xi_A)} \Delta_A(f) \quad \text{par (7.7)}. \end{aligned}$$

Finalement, il vient  $\text{deg}_i = \alpha_i(\Xi_A)$ , ce qu'on voulait.  $\square$

### 7.3.2 Le polytope $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$

Dans ce paragraphe, et dans ce paragraphe seulement, on prend temporairement des conventions légèrement plus générales : on autorise les  $d_i$  à être des nombres réels strictement positifs. On définit toujours  $\mathfrak{X}_{1, \mathbb{R}}$  comme l'espace affine d'équations  $\sum_i d_i \alpha_i = \sum_j \beta_j$  et  $\sum_i \alpha_i = 1$  dans  $\mathbb{R}^{c+N+1}$ . On pose  $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$  le polytope d'inéquations  $\{\alpha_i \geq 0\}_{1 \leq i \leq c}$  et  $\{\beta_j \geq 0\}_{0 \leq j \leq N}$  dans  $\mathfrak{X}_{1, \mathbb{R}}$ . Il est de dimension  $c + N - 1$ .

Si  $I \subset \{1, \dots, c\}$  et  $J \subset \{0, \dots, N\}$  sont des parties non vides, le sous-ensemble  $\Gamma_{I, J}$  de  $Q$  défini par les équations  $\{\alpha_i = 0\}_{i \notin I}$  et  $\{\beta_j = 0\}_{j \notin J}$  est une face de  $Q$  isomorphe à  $Q(|I|, |J| - 1, (d_i)_{i \in I})$ . De plus, toutes les faces de  $Q$  sont de cette forme.

En particulier, quand les  $d_i$  sont entiers, les sommets de  $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$  sont des éléments de  $A$ . Comme de plus  $A \subset Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$ , on voit que  $Q = Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$ . On en déduit le résultat suivant :

**Proposition 7.3.5.** *La variété torique  $X_A$  est lisse.*

**Preuve.** La description explicite des faces de  $Q$  obtenue ci-dessus permet de vérifier facilement le critère de lissité [58] 2.22 (iv).  $\square$

Nous allons effectuer quelques calculs d'intégrales qui seront utiles par la suite. Pour les mener, nous aurons plusieurs fois besoin de la seconde partie du lemme ci-dessous :

**Lemme 7.3.6.** *Soit  $P \in \mathbb{Z}[d_1, \dots, d_c][X]$ . On introduit :*

$$R = \sum_{l=1}^c \frac{P(d_l)}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})}.$$



(i)  $R \in \mathbb{Z}[d_1, \dots, d_c]$ .

(ii) Si  $P$  est de degré  $\leq c - 2$  en  $X$ ,  $R = 0$ .

**Preuve.** On introduit  $R' = \sum_{l=1}^c \frac{P(X_l)}{\prod_{l' \neq l} (X_l - X_{l'})} \in \mathbb{Z}[d_1, \dots, d_c](X_1, \dots, X_c)$ . Multipliant par  $X_{l_1} - X_{l_2}$ , puis spécialisant en  $X_{l_1} = X_{l_2}$ , on obtient 0. Par conséquent,  $R' \in \mathbb{Z}[d_1, \dots, d_c][X_1, \dots, X_c]$ .

En faisant  $X_l = d_l$ , on montre que  $R \in \mathbb{Z}[d_1, \dots, d_c]$ .

Si de plus  $P$  est de degré  $\leq c - 2$  en  $X$ ,  $R'$  est un polynôme de degré  $< 0$  en les  $X_i$ , et est donc nul. En faisant  $X_l = d_l$ , cela implique  $R = 0$ .  $\square$

Calculons tout d'abord le volume du polytope  $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$ . On rappelle notre convention d'attribuer une mesure 1 au simplexe unité.

**Proposition 7.3.7.**

$$\mu(Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})) = \sum_{l=1}^c \frac{d_l^{c+N-1}}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})}.$$

**Preuve.** On procède par récurrence sur  $c$ . Pour  $c = 1$ , c'est la formule du volume du simplexe de côté  $d_1$ . Si  $c \geq 2$ , on applique Fubini en remarquant que l'image de  $Q(c-1, N, (sd_i + (1-s)d_c)_{1 \leq i \leq c-1})$  par l'application

$$(y_1, \dots, y_c, x_0, \dots, x_N) \mapsto ((1-s)y_1, \dots, (1-s)y_c, x_0, \dots, x_N)$$

est  $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c}) \cap \{\alpha_c = s\}$ . Entre les espaces affines qui nous intéressent cette application est de déterminant  $(1-s)^{c-2}$ . On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence. Il vient :

$$\begin{aligned} & \mu(Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})) \\ &= (c+N-1) \int_0^1 (1-s)^{c-2} \mu(Q(c-1, N, (sd_i + (1-s)d_c)_{1 \leq i \leq c-1})) ds \\ &= \sum_{l=1}^{c-1} \int_0^1 \frac{((1-s)d_c + sd_l)^{c+N-2}}{\prod_{l' \neq l, c} (d_l - d_{l'})} ds \\ &= \sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} (d_l^{c+N-1} - d_c^{c+N-1}) \\ &= \sum_{l=1}^c \frac{d_l^{c+N-1}}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} \text{ par le lemme 7.3.6 (ii)}. \end{aligned}$$

$\square$

Enfin, nous utiliserons dans le paragraphe suivant le calcul de l'intégrale ci-dessous :

**Proposition 7.3.8.**

$$\int_{Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})} \alpha_c(u) d\mu(u) = \frac{1}{(c+N)} \sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} \left( \frac{d_c^{c+N} - d_l^{c+N}}{d_c - d_l} \right).$$

**Preuve.** On applique Fubini comme dans le calcul précédent.

$$\begin{aligned}
& \int_{Q(c,N,(d_i)_{1 \leq i \leq c})} \alpha_c(u) d\mu(u) \\
&= (c+N-1) \int_0^1 s(1-s)^{c-2} \mu(Q(c-1, N, (sd_i + (1-s)d_c)_{1 \leq i \leq c-1})) ds \\
&= (c+N-1) \sum_{l=1}^{c-1} \int_0^1 s \frac{((1-s)d_c + sd_l)^{c+N-2}}{\prod_{l' \neq l, c} (d_l - d_{l'})} ds \\
&= \sum_{l=1}^{c-1} \left[ \int_0^1 \frac{((1-s)d_c + sd_l)^{c+N-1}}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} ds - \frac{d_c^{c+N-1}}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} \right],
\end{aligned}$$

où l'on a intégré par parties. Calculant l'intégrale du terme de gauche, et appliquant le lemme 7.3.6 (ii) pour sommer le terme de droite, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{Q(c,N,(d_i)_{1 \leq i \leq c})} \alpha_c(u) d\mu(u) \\
&= \frac{1}{(c+N)} \left[ \sum_{l=1}^{c-1} \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} \left( \frac{d_c^{c+N} - d_l^{c+N}}{d_c - d_l} \right) + \frac{(c+N)d_c^{c+N-1}}{\prod_{l' \neq c} (d_c - d_{l'})} \right] \\
&= \frac{1}{(c+N)} \sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} \left( \frac{d_c^{c+N} - d_l^{c+N}}{d_c - d_l} \right).
\end{aligned}$$

□

### 7.3.3 Homogénéité en les équations

Montrons la première partie du théorème 7.1.3. Par symétrie, on peut supposer  $i = c$ .

**Proposition 7.3.9.**

$$\deg_c = d_1 \dots d_{c-1} \sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})} \left( \frac{e_c^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_c - e_l} \right).$$

**Preuve.** On utilise la relation 7.3.4 (ii), et la formule 7.2.3 pour  $\Xi_A$  qui s'applique car  $X_A$  est lisse par la proposition 7.3.5 :

$$\deg_c = \sum_{\Gamma \subset Q(c,N,(d_i)_{1 \leq i \leq c})} (-1)^{\text{codim}(\Gamma)} (\dim(\Gamma) + 1) \int_{\Gamma} \alpha_c(u) d\mu_{\Gamma}(u).$$

Les faces de  $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$  sont les  $\Gamma_{I,J}$ . L'intégrale qui intervient est nulle si  $c \notin I$  car  $\alpha_c$  s'annule alors identiquement sur  $\Gamma_{I,J}$ . Si  $c \in I$ , on reconnaît l'intégrale calculée en 7.3.8. Il vient :

$$\deg_c = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, c-1\} \\ \emptyset \neq J \subset \{0, \dots, N\}}} \sum_{l \in I \cup \{c\}} \frac{(-1)^{c+N-|I|-|J|}}{\prod_{\substack{l' \in I \cup \{c\} \\ l' \neq l}} (d_l - d_{l'})} \left( \frac{d_c^{|I|+|J|} - d_l^{|I|+|J|}}{d_c - d_l} \right).$$

En paramétrant  $J$  par  $j = |J|$ , et en remarquant que le terme  $j = 0$  dans la somme ci-dessous est nul par le lemme 7.3.6 (ii), on obtient :

$$\deg_c = \sum_{j=0}^{N+1} \binom{N+1}{j} \sum_{I \subset \{1, \dots, c-1\}} \sum_{\substack{l \in I \cup \{c\} \\ l' \in I \cup \{c\} \\ l' \neq l}} \frac{(-1)^{c+N-|I|-j}}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} \left( \frac{d_c^{|I|+j} - d_l^{|I|+j}}{d_c - d_l} \right).$$

Appliquons la formule du binôme.

$$\deg_c = \sum_{I \subset \{1, \dots, c-1\}} \sum_{\substack{l \in I \cup \{c\} \\ l' \in I \cup \{c\} \\ l' \neq l}} \frac{(-1)^{c-|I|-1}}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} \left( \frac{d_c^{|I|} e_c^{N+1} - d_l^{|I|} e_l^{N+1}}{d_c - d_l} \right).$$

Échangeons alors les sommations sur  $I$  et sur  $l$ . On note  $\bar{I}$  le complémentaire de  $I$  dans  $\{1, \dots, c-1\}$ , et on remarque que dans la somme ci-dessous la contribution des termes pour lesquels  $l \in \bar{I}$  est nulle.

$$\deg_c = \sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} \frac{1}{d_c - d_l} M_l, \text{ où}$$

$$M_l = \sum_{\bar{I} \subset \{1, \dots, c-1\}} (-1)^{|\bar{I}|} (d_c^{c-1-|\bar{I}|} e_c^{N+1} - d_l^{c-1-|\bar{I}|} e_l^{N+1}) \prod_{l' \in \bar{I}} (d_l - d_{l'}).$$

Calculons  $M_l$ . On commence par développer le produit pour obtenir :

$$M_l = \sum_{\substack{\bar{I} \subset \{1, \dots, c-1\} \\ H \subset \bar{I}}} (d_c^{c-1-|\bar{I}|} e_c^{N+1} - d_l^{c-1-|\bar{I}|} e_l^{N+1}) (-1)^{|H|+|\bar{I}|} d_l^{|\bar{I}|-|H|} \prod_{l' \in H} d_{l'}.$$

En sommant d'abord sur  $H$ , puis sur le cardinal  $i = |\bar{I}| - |H|$ , on obtient pour  $M_l$  l'expression suivante :

$$\sum_{H \subset \{1, \dots, c-1\}} \prod_{l' \in H} d_{l'} \sum_{i=0}^{c-|H|-1} \binom{c-|H|-1}{i} (-d_l)^i (d_c^{c-1-i-|H|} e_c^{N+1} - d_l^{c-1-i-|H|} e_l^{N+1}).$$

Appliquons à nouveau la formule du binôme.

$$M_l = \sum_{H \subset \{1, \dots, c-1\}} \prod_{l' \in H} d_{l'} \left( (d_c - d_l)^{c-1-|H|} e_c^{N+1} - (d_l - d_l)^{c-1-|H|} e_l^{N+1} \right).$$

Le terme de droite se calcule en remarquant que  $(d_l - d_l)^{c-1-|H|}$  est non nul seulement si  $|H| = c - 1$ , c'est-à-dire si  $H = \{1, \dots, c-1\}$ . Quant au terme de gauche, on peut le factoriser aisément. Il reste :

$$M_l = e_c^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} (d_{l'} + d_c - d_l) - e_l^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} d_{l'}.$$

Reprenant le calcul de  $\deg_c$ , on voit que :

$$\deg_c = \sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} \left( \frac{e_c^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} (d_{l'} + d_c - d_l) - e_l^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} d_{l'}}{d_c - d_l} \right).$$

Par le lemme 7.3.6 (ii), comme  $\frac{e_c^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} (d_{l'} + d_c - d_l) - e_l^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} d_{l'}}{d_c - d_l}$  est un polynôme de degré  $c - 2$  en  $d_l$ , on calcule pour conclure :

$$\begin{aligned} \deg_c &= \sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} \left( \frac{e_c^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} d_{l'} - e_l^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} d_{l'}}{d_c - d_l} \right) \\ &= d_1 \dots d_{c-1} \sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})} \left( \frac{e_c^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_c - e_l} \right). \end{aligned}$$

□

### 7.3.4 Homogénéité en les variables

Montrons la seconde partie du théorème 7.1.3.

**Proposition 7.3.10.**

$$\deg_{var} = d_1 \dots d_c \sum_{l=1}^c \frac{e_l^N}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})}.$$

**Preuve.** On pourrait procéder par calcul direct comme en 7.3.9. On va plutôt profiter du calcul déjà effectué en 7.3.9 et de la relation (7.4). Il vient :

$$\begin{aligned} \deg_{var} &= \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^c d_i \deg_i \\ &= \frac{d_1 \dots d_c}{N+1} \sum_{i=1}^c \sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})} \left( \frac{e_i^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_i - e_l} \right). \end{aligned}$$

Utilisant alors le calcul reporté dans le lemme 7.3.11, et vu la remarque 7.1.5, on obtient :

$$\begin{aligned} \deg_{var} &= \frac{d_1 \dots d_c}{N+1} \sum_{l=1}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})} \left( \frac{e_l^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_l - e_l} \right) \\ &= d_1 \dots d_c \sum_{l=1}^c \frac{e_l^N}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 7.3.11.**

$$\sum_{l=1}^c \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (e_l - e_{l'})} \left( \frac{e_i^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_i - e_l} \right) = 0.$$

**Preuve.** Fixons  $l$  et introduisons  $\Phi_l = \sum_{i \neq l} \frac{1}{\prod_{i' \neq i}(e_i - e_{i'})} \prod_{l' \neq i, l} (e_l - e_{l'})$ , qu'on considère comme une fraction rationnelle en  $e_l$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}((e_i)_{i \neq l})$ . Écrivons sa décomposition en éléments simples  $\Phi_l = \sum_{i \neq l} \frac{f_i}{e_l - e_i}$ . En multipliant  $\Phi_l$  par  $(e_l - e_i)$ , et en substituant  $e_l = e_i$  dans l'expression obtenue, on calcule  $f_i = -1$ . On a montré :

$$\sum_{i \neq l} \frac{1}{\prod_{i' \neq i}(e_i - e_{i'})} \frac{1}{e_l - e_i} = - \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(e_l - e_{l'})} \sum_{i \neq l} \frac{1}{e_l - e_i}.$$

Multiplions cette identité par  $e_l^{N+1}$ , sommions sur  $l$ , puis échangeons dans le terme de gauche le rôle des variables muettes  $i$  et  $l$  pour obtenir :

$$\sum_{l=1}^c \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(e_l - e_{l'})} \frac{e_i^{N+1}}{e_i - e_l} = - \sum_{l=1}^c \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^c \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(e_l - e_{l'})} \frac{e_l^{N+1}}{e_l - e_i}.$$

Faisons tout passer dans le terme de gauche : le lemme est démontré.  $\square$

## 7.4 Caractéristique finie

On explique dans cette partie comment modifier la preuve proposée ci-dessus pour démontrer le théorème 7.1.3 quand  $K$  est de caractéristique finie. On en déduit alors une preuve du théorème 7.1.7.

### 7.4.1 Équation de la duale

On conserve les notations de la partie 7.2.

Le théorème [18] Chap.9, 2.7, que nous avons énoncé en 7.2.1 décrivait l'équation de la variété duale d'une variété torique lisse  $X_A \subset \mathbb{P}((K^A)^*)$ . Il ne vaut tel quel qu'en caractéristique 0, et son énoncé doit être modifié en général. À cet effet, on introduit les notations suivantes.

Soit  $W_{X_A} \subset \mathbb{P}((K^A)^*) \times \mathbb{P}(K^A)$  la variété d'incidence de  $X_A$ , c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des couples  $(x, H) \in \mathbb{P}((K^A)^*) \times \mathbb{P}(K^A)$  tels que  $H$  soit tangent en le point lisse  $x$  de  $X_A$ . Notons  $p_1$  et  $p_2$  les projections de  $W_{X_A}$  sur  $X_A$  et  $X_A^\vee = p_2(W_{X_A})$  respectivement. On munit  $W_{X_A}$  et  $X_A^\vee$  de leur structure réduite.

Si  $X_A$  n'est pas déficiente, c'est-à-dire si  $X_A^\vee$  est une hypersurface de  $\mathbb{P}(K^A)$ , on note  $\mu$  le degré de l'application génériquement finie  $p_2 : W_{X_A} \rightarrow X_A^\vee$ . Le théorème 7.2.1 admet alors la généralisation suivante :

**Théorème 7.4.1.** *On suppose que  $X_A$  est lisse, et  $l \gg 0$ .*

(i) *Si  $X_A$  n'est pas déficiente,*

$$\Delta_A(f)^\mu = \det(C^\bullet(A, l), \partial_f, e)^{(-1)^k},$$

*où chacun des deux termes est bien défini à une constante multiplicative non nulle près.*

(ii) Si  $X_A$  est déficiente, rappelons que  $\Delta_A(f) = 1$  par convention. Alors

$$\Delta_A(f) = \det(C^\bullet(A, l), \partial_f, e)^{(-1)^k},$$

au sens où le terme de droite est également une constante non nulle.

**Preuve.** La preuve de [18] Chap.9, 2.7 ne nécessite qu'une modification mineure, que l'on va décrire. Cette preuve fait appel au théorème [18] Chap.2, 2.5. Au cours de la preuve de cet autre théorème, on utilise (page 59) le fait que si  $X_A$  n'est pas déficiente,  $p_2 : W_{X_A} \rightarrow X_A^\vee$  est birationnelle. En caractéristique 0, c'est une conséquence du théorème de réflexivité. Cependant, en caractéristique finie,  $p_2 : W_{X_A} \rightarrow X_A^\vee$  est seulement génériquement finie, de degré  $\mu$ .

En prenant cette modification en compte, et en adaptant les arguments de manière évidente, on prouve le théorème.  $\square$

Tous les autres arguments que nous avons utilisés sont encore valables. Nous utiliserons librement les résultats déjà obtenus, notamment l'identification de  $D$  à la variété duale d'une variété torique explicite (proposition 7.3.1).

## 7.4.2 Calcul du degré $\mu$

Pour appliquer le théorème 7.4.1, il faut calculer la quantité  $\mu$  dans les cas où  $X_A$  n'est pas déficiente : c'est le but de la proposition 7.4.2. On conserve les notations du paragraphe 7.3.1.

**Proposition 7.4.2.** *Supposons qu'on n'ait pas  $d_1 = \dots = d_c = 1$  et  $c < N + 1$ .*

*Alors  $X_A$  n'est pas déficiente. Si  $K$  n'est pas de caractéristique 2 ou si  $n$  est impair,  $\mu = 1$ . Sinon,  $\mu = 2$ .*

On commence par montrer plusieurs lemmes. Les arguments qui suivent sont légèrement alourdis par le fait qu'il faut manipuler avec précaution les points doubles ordinaires en caractéristique 2.

**Lemme 7.4.3.** (i) *Supposons que  $c = N + 1$ . Alors pour  $(F_1, \dots, F_c) \in D$  général,  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$  est un unique point réduit.*

(ii) *Supposons que  $c < N + 1$  et qu'il existe  $i$  tel que  $d_i \geq 2$ . Alors pour  $(F_1, \dots, F_c) \in D$  général,  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$  est de codimension  $c$  et a un unique point singulier, qui est un point double ordinaire.*

(iii) *Supposons qu'on n'ait pas  $d_1 = \dots = d_c = 1$  et  $c < N + 1$ . Alors pour  $(F_1, \dots, F_c) \in D$  général, les différentielles des  $F_i$  sont liées en un unique point de  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$ , et ce par une unique relation.*

**Preuve.** (i) Cette propriété est ouverte dans  $D$  qui est irréductible par le lemme 7.3.2 : il suffit donc d'exhiber un jeu d'équations vérifiant cette propriété. Par Bertini, on choisit  $F_1, \dots, F_{c-1}$  généraux de sorte que le schéma  $\{F_1 = \dots = F_{c-1} = 0\}$  soit réunion de points réduits. On choisit alors  $F_c$  de sorte à ce qu'il passe par un de ces points et évite les autres.

- (ii) Par description de la déformation verselle d'un point double ordinaire (voir [1] Exp. XV Prop. 1.3.1), cette propriété est ouverte dans  $D$ . Comme  $D$  est irréductible par le lemme 7.3.2, il suffit donc d'exhiber un jeu d'équations vérifiant cette propriété. On considère le système linéaire constitué des  $F_i$  passant par  $P = [0 : \dots : 0 : 1]$ ,  $y$  étant singuliers et dont les termes d'ordre 2 sont un multiple d'une forme quadratique ordinaire fixée. Le théorème de Bertini assure que le membre général de ce système linéaire a pour unique point singulier  $P$ ; c'est un point double ordinaire. On prend alors  $F_1, \dots, \hat{F}_i, \dots, F_c$  générales passant par  $P$ . Le théorème de Bertini assure que  $(F_1, \dots, F_c)$  convient.
- (iii) Les deux premiers points permettent de décrire, pour  $(F_1, \dots, F_c) \in D$  général, les dimensions des espaces tangents de  $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$ . On en déduit le résultat. □

**Lemme 7.4.4.** *Supposons qu'on n'ait pas  $d_1 = \dots = d_c = 1$  et  $c < N + 1$ . Alors :*

- (i) *La variété  $X_A$  n'est pas défective.*  
(ii) *De plus, si  $H$  est un élément général de  $D = \tilde{X}_A^\vee$  vu comme un hyperplan de  $\mathbb{P}((K^A)^*)$ ,  $H$  est tangent à  $X_A$  en un unique point.*

**Preuve.** (i) Choisissons  $H \in D$  général comme dans les lemmes 7.4.3 (iii) et 7.3.2 (i) et (ii). L'équivalence entre (7.11) et (7.12) dans la preuve de 7.3.1 montre alors qu'il existe un unique point  $t$  de  $T$  en lequel  $H$  est tangent à  $X_A$ . En particulier,  $t$  est isolé dans  $p_2^{-1}(H)$ . Comme  $W_{X_A}$  est irréductible, cela implique que  $p_2$  est génériquement finie. Ainsi,  $X_A$  n'est pas défective.

(ii) Soit  $H \in D$  général comme au point précédent. Choisissons-le de plus hors de  $X_A^\vee \setminus p_2(p_1^{-1}(X_A \setminus T))$ , qui est un fermé strict car  $p_2$  est génériquement finie. L'hyperplan  $H$  n'est tangent à  $X_A$  qu'en des points de  $T$ , et est tangent à  $T$  en un unique point. Cela conclut. □

**Lemme 7.4.5.** *Supposons qu'on n'ait pas  $d_1 = \dots = d_c = 1$  et  $c < N + 1$ . Alors si  $H$  est un élément général de  $D = \tilde{X}_A^\vee$  vu comme un hyperplan de  $\mathbb{P}((K^A)^*)$ ,  $X_A \cap H$  a un unique point singulier qui est un point double ordinaire.*

**Preuve.** On choisit  $H = (F_1, \dots, F_c)$  général comme dans le lemme précédent, et comme dans le lemme 7.4.3 (i) (resp. (ii)). On notera  $Z = \{F_1 = \dots = F_c = 0\} \subset \mathbb{P}^N$  et  $\tilde{Z} \subset \mathbb{A}^{N+1}$  le cône affine sur  $Z$ .

Les choix faits montrent que  $H$  est tangent à  $X_A$  en un unique point  $t \in T$ . La preuve de la proposition 7.3.1 montre que si  $t' = (y_1, \dots, y_c, x_0, \dots, x_N) \in (K^*)^{c+N+1}$  est un antécédent de  $t$  par l'application (7.10),  $x = [x_0, \dots, x_N]$  est l'unique point de  $Z$  (resp. l'unique point singulier de  $Z$ ), que c'est un point réduit (resp. un point double ordinaire), et que l'unique relation entre les différentielles des  $F_i$  en  $\tilde{x} = (x_0, \dots, x_N)$  est donnée par  $\sum_i y_i \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\tilde{x}) = 0$ ,  $0 \leq j \leq N$ .

Soit  $q$  la forme quadratique induite par  $H$  sur  $T_t T$ . On raisonne par l'absurde en la supposant non ordinaire : il existe  $w \in T_t T$  non nul tel que  $w \in \text{rad}(q)$  et  $q(w) = 0$ . On note  $q'$  la forme quadratique que  $q$  induit sur  $T_{t'}(K^*)^{c+N+1}$  via l'application (7.10). Le noyau de la surjection  $T_{t'}(K^*)^{c+N+1} \rightarrow T_t T$  est engendré par  $w'_1 = (y_1, \dots, y_c, 0, \dots, 0)$  et  $w'_2 = (-d_1 y_1, \dots, -d_c y_c, x_0, \dots, x_N)$ . Notons  $w' = (u_1, \dots, u_c, v_0, \dots, v_N)$  un antécédent de  $w$ , de sorte que  $w' \in \text{rad}(q')$ ,  $q'(w') = 0$  et  $w' \notin \langle w'_1, w'_2 \rangle$ .

La condition  $w' \in \text{rad}(q')$  signifie que  $w'$  appartient au noyau de la matrice de la forme bilinéaire associée à  $q'$ , c'est-à-dire au noyau de la Hessienne de  $H$  en  $t'$ . C'est un système d'équations qui s'écrit :

$$\sum_j v_j \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\tilde{x}) = 0, \quad 1 \leq i \leq c. \quad (7.13)$$

$$\sum_j v_j \frac{\partial^2 \sum_i y_i F_i}{\partial X_j \partial X_k}(\tilde{x}) = \sum_i u_i \frac{\partial F_i}{\partial X_k}(\tilde{x}), \quad 0 \leq k \leq N. \quad (7.14)$$

Considérons  $\tilde{v} = (v_0, \dots, v_N)$  comme un vecteur tangent à  $\mathbb{A}^{N+1}$  en  $\tilde{x}$ . L'équation (7.13) montre que le vecteur  $\tilde{v}$  appartient à  $T_{\tilde{x}} \tilde{Z}$ . Montrons qu'il est non radial. Si c'était le cas, on pourrait, quitte à retrancher à  $w'$  un multiple de  $w'_2$ , le supposer nul. L'équation (7.14) fournit alors la relation  $\sum_i u_i \frac{\partial F_i}{\partial X_k}(\tilde{x}) = 0$ ,  $0 \leq k \leq N$  entre les différentielles des  $F_i$  en  $\tilde{x}$ . Ce n'est possible par hypothèse que si  $w'$  est proportionnel à  $w'_1$ , ce qui contredit  $w' \notin \langle w'_1, w'_2 \rangle$ . Ainsi  $\tilde{v}$  n'est pas radial.

On distingue alors deux cas.

- (i) Supposons que  $c = N + 1$ . Un vecteur  $v \in T_x Z$  se relevant en  $\tilde{v}$  est alors un élément non nul de  $T_x Z$ , et  $Z$  n'est donc pas un point réduit. C'est la contradiction recherchée.
- (ii) Supposons que  $c < N + 1$  et qu'il existe  $i$  tel que  $d_i \geq 2$ .

Vu l'unique relation liant les différentielles en  $\tilde{x}$  des  $F_i$ , la forme quadratique qui est l'équation dans  $T_{\tilde{x}} \tilde{Z}$  du cône tangent à  $\tilde{Z}$  en  $\tilde{x}$  est la restriction à  $T_{\tilde{x}} \tilde{Z}$  de la forme quadratique induite par les termes d'ordre deux de  $\sum y_i F_i$ . On note  $\tilde{Q}$  cette forme quadratique.

Montrons que  $\tilde{v} \in \text{rad}(\tilde{Q})$ . L'équation (7.14) signifie que si un vecteur est orthogonal à  $(\frac{\partial}{\partial X_k}(\sum_i u_i F_i)(\tilde{x}))_{0 \leq k \leq N}$  pour le produit scalaire usuel, il est automatiquement orthogonal à  $\tilde{v}$  pour la forme bilinéaire associée à  $\tilde{Q}$ . Or tous les vecteurs de  $T_{\tilde{x}} \tilde{Z}$  sont orthogonaux à  $(\frac{\partial}{\partial X_k}(\sum_i u_i F_i)(\tilde{x}))_{0 \leq k \leq N}$ , vu comme un gradient. On a bien montré  $\tilde{v} \in \text{rad}(\tilde{Q})$ .

On vérifie ensuite que l'équation  $q'(w') = 0$  est la même équation que  $\tilde{Q}(\tilde{v}) = 0$ . Soit alors  $v \in T_x Z$  se relevant en  $\tilde{v}$ , et  $Q$  la forme quadratique sur  $T_x Z$ , équation du cône tangent à  $Z$  en  $x$ , induisant  $\tilde{Q}$  sur  $T_{\tilde{x}} \tilde{Z}$ . On a montré que  $v$  est un élément non nul de  $\text{rad}(Q)$  sur lequel  $Q$  s'annule. La forme quadratique  $Q$  n'est donc pas ordinaire et  $x$  ne peut être un point double ordinaire de  $Z$ . C'est absurde. □



On peut alors prouver la proposition 7.4.2 :

**Preuve de la proposition 7.4.2.** La variété  $X_A$  n'est pas défective par 7.4.4 (i), de sorte que  $\mu$  est bien défini.

Soit  $H$  un point général de  $X_A^\vee$ . Soit  $p_2^{-1}(H) \subset X_A$  le lieu schématique le long duquel  $H$  est tangent à  $X_A$ ; par définition de  $\mu$ , on a  $\mu = \text{long}(p_2^{-1}(H))$ . Par [35] I (8) et (9),  $p_2^{-1}(H) = \text{Sing}(X_A \cap H)$  où le lieu singulier de  $X_A \cap H$  est muni de la structure schématique donnée par le  $(k-1)$ -ième idéal de Fitting du faisceau des différentielles de Kähler.

Comme  $H$  est choisi général, par le lemme 7.4.5,  $X_A \cap H$  a un unique point singulier qui est un point double ordinaire. Pour calculer  $\text{Sing}(X_A \cap H)$ , on peut travailler dans le complété de  $X_A \cap H$  en ce point. Par [1] Exp. XV Th. 1.2.6, celui-ci est isomorphe au lieu des zéros dans  $K[[x_1, \dots, x_k]]$  de la forme quadratique ordinaire canonique  $x_1x_2 + \dots + x_{k-1}x_k$  si  $k$  est pair ou  $x_1x_2 + \dots + x_{k-2}x_{k-1} + x_k^2$  si  $k$  est impair.

Sur ces équations, il est facile de calculer le  $(k-1)$ -ième idéal de Fitting du faisceau des différentielles : c'est  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  sauf si  $k$  est impair et  $K$  est de caractéristique 2 auquel cas c'est  $\langle x_1, \dots, x_{k-1}, x_k^2 \rangle$ . Dans le premier cas, le sous-schéma qu'il définit est un point réduit et  $\mu = \text{long}(p_2^{-1}(H)) = 1$ . Dans le second cas, il définit un sous-schéma de longueur 2 et  $\mu = \text{long}(p_2^{-1}(H)) = 2$ . Comme  $n = N - c$  est de parité opposée à  $k = c + N - 1$ , la proposition est démontrée.  $\square$

### 7.4.3 Preuve du théorème principal

On commence par montrer que dans les cas non traités par le lemme 7.4.4,  $X_A$  est défective.

**Lemme 7.4.6.** *Supposons  $d_1 = \dots = d_c = 1$  et  $c < N + 1$ . Alors  $X_A$  est défective.*

**Preuve.** Les  $F_i$  sont des formes linéaires. La sous-variété  $D$  de  $V$  correspond au lieu où elles ne sont pas indépendantes, et est donc décrit par l'annulation d'un certain nombre de mineurs. On en déduit aisément que ce lieu est de codimension  $\geq 2$  dans  $V$ . Par le corollaire 7.3.3,  $X_A$  est alors défective.  $\square$

On obtient alors une preuve du théorème 7.1.3.

**Preuve du théorème 7.1.3.** On distingue deux cas.

- (i) Supposons qu'on n'ait pas  $d_1 = \dots = d_c = 1$  et  $c < N + 1$ . Alors, par le lemme 7.4.4,  $X_A$  n'est pas défective, et la preuve du théorème 7.1.3 en caractéristique nulle fonctionne encore. Il faut seulement remplacer le théorème 7.2.1 par le théorème 7.4.1 (i), et évaluer  $\mu$  à l'aide de la proposition 7.4.2.
- (ii) Si  $d_1 = \dots = d_c = 1$  et  $c < N + 1$ ,  $X_A$  est défective par le lemme 7.4.6. Par le corollaire 7.3.3,  $D$  est de codimension  $\geq 2$  dans  $V$ , de sorte que  $\Delta = 1$ , et que tous les degrés qu'on cherche à calculer sont nuls. D'autre part,

la preuve fournie en caractéristique nulle fonctionne sans modifications en caractéristique quelconque, en faisant intervenir le théorème 7.4.1 (ii) à la place du théorème 7.2.1. Les termes de droite dans l'énoncé du théorème 7.1.3 sont donc également nuls. Le facteur  $\frac{1}{\mu}$  ne joue alors aucun rôle, et le théorème est démontré. □

#### 7.4.4 Réduction modulo $p$ du discriminant

On montre dans ce paragraphe le théorème 7.1.7.

**Preuve du théorème 7.1.7.** La situation décrite dans le paragraphe 7.1.1 se met en famille sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  : on dispose d'un fibré vectoriel géométrique  $V_{\mathbb{Z}}$  sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , et d'un sous-schéma fermé réduit  $D_{\mathbb{Z}}$  de celui-ci. On note  $\Delta_{\mathbb{Q}}$  et  $\Delta_{\mathbb{F}_p}$  les polynômes discriminant sur  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{F}_p$ .

Si  $d_1 = \dots = d_c = 1$  et  $c < N + 1$ ,  $\Delta_{\mathbb{Q}} = 1$  par le lemme 7.4.6 et le corollaire 7.3.3, et le théorème est évident. Dans le cas contraire, toutes les fibres sont des hypersurfaces par le lemme 7.4.4 et le corollaire 7.3.3. Elles coïncident ensemble avec le lieu discriminant, et sont donc irréductibles par le lemme 7.3.2. Par conséquent, la réduction modulo  $p$  de  $\Delta_{\mathbb{Q}}$  s'annule précisément sur le lieu discriminant, et est donc une puissance de  $\Delta_{\mathbb{F}_p}$ . Comparant les degrés à l'aide du théorème 7.1.3, on voit que cette puissance est 1 sauf si  $p = 2$  et  $n$  est pair, auquel cas cette puissance vaut 2. Comme  $\Delta_{\mathbb{F}_p}$  est irréductible par définition, cela conclut. □

# Bibliographie

- [1] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. II.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 340. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 II), dirigé par P. Deligne et N. Katz.
- [2] V. ALEXEEV : Boundedness and  $K^2$  for log surfaces. *Internat. J. Math.*, 5(6):779–810, 1994.
- [3] V. ALEXEEV et A. BRUNYATE : Extending the Torelli map to toroidal compactifications of Siegel space. *eprint arXiv :1102.3425*, 2011.
- [4] D. ALLCOCK, J. A. CARLSON et D. TOLEDO : The complex hyperbolic geometry of the moduli space of cubic surfaces. *J. Algebraic Geom.*, 11(4): 659–724, 2002.
- [5] D. ALLCOCK, J. A. CARLSON et D. TOLEDO : The moduli space of cubic threefolds as a ball quotient. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 209(985):xii+70, 2011.
- [6] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. A. GRIFFITHS et J. HARRIS : *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, volume 267 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [7] U. BHOSLE : Pencils of quadrics and hyperelliptic curves in characteristic two. *J. Reine Angew. Math.*, 407:75–98, 1990.
- [8] C. BORCEA : Smooth global complete intersections in certain compact homogeneous complex manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 344:65–70, 1983.
- [9] R. E. BORCHERDS, L. KATZARKOV, T. PANTEV et N. I. SHEPHERD-BARRON : Families of  $K3$  surfaces. *J. Algebraic Geom.*, 7(1):183–193, 1998.
- [10] M. BRION et M. VERGNE : An equivariant Riemann-Roch theorem for complete, simplicial toric varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 482:67–92, 1997.
- [11] S. CASALAINA-MARTIN, D. JENSEN et R. LAZA : The geometry of the ball quotient model of the moduli space of genus four curves. *eprint arXiv :1109.5669v1*, 2011.
- [12] M.-C. CHANG et Z. RAN : Closed families of smooth space curves. *Duke Math. J.*, 52(3):707–713, 1985.

- [13] B. CONRAD : The Keel-Mori theorem via stacks. <http://math.stanford.edu/~conrad/papers/coarsespace.pdf>, 2005.
- [14] O. DEBARRE, A. ILIEV et L. MANIVEL : On the period map for prime Fano threefolds of degree 10. *eprint arXiv :0812.3670v1*, à paraître dans *J. of Algebraic Geom.*, 2011.
- [15] P. DELIGNE et D. MUMFORD : The irreducibility of the space of curves of given genus. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (36):75–109, 1969.
- [16] B. FANTECHI, L. GÖTTSCHE, L. ILLUSIE, S. L. KLEIMAN, N. NITSURE et A. VISTOLI : *Fundamental algebraic geometry*, volume 123 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. Grothendieck’s FGA explained.
- [17] J. FOGARTY : Truncated Hilbert functors. *J. Reine Angew. Math.*, 234:65–88, 1969.
- [18] I. M. GEL’FAND, M. M. KAPRANOV et A. V. ZELEVINSKY : *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [19] A. GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (4):228, 1960.
- [20] A. GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. II. étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8):222, 1961.
- [21] A. GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. III. étude cohomologique des faisceaux cohérents. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11):167, 1961.
- [22] A. GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. III. étude cohomologique des faisceaux cohérents. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (17):91, 1963.
- [23] A. GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. IV. étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (24):231, 1965.
- [24] A. GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. IV. étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (28):255, 1966.
- [25] A. GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. IV. étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32):361, 1967.
- [26] P. HACKING, S. KEEL et J. TEVELEV : Stable pair, tropical, and log canonical compactifications of moduli spaces of del Pezzo surfaces. *Invent. Math.*, 178(1):173–227, 2009.
- [27] R. HARTSHORNE : *Ample subvarieties of algebraic varieties*. Notes written in collaboration with C. Musili. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 156. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

- [28] R. HARTSHORNE : *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [29] K. HULEK et G. K. SANKARAN : The nef cone of toroidal compactifications of  $A_4$ . *Proc. London Math. Soc. (3)*, 88(3):659–704, 2004.
- [30] S. ISHII : Moduli space of polarized del Pezzo surfaces and its compactification. *Tokyo J. Math.*, 5(2):289–297, 1982.
- [31] V. A. ISKOVSKIĖ : Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties. In *Current problems in mathematics, Vol. 12 (Russian)*, pages 159–236, 239 (loose errata). VINITI, Moscow, 1979.
- [32] V. A. ISKOVSKIĖ et Y. G. PROKHOROV : Fano varieties. In *Algebraic geometry, V*, volume 47 de *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–247. Springer, Berlin, 1999.
- [33] N. M. KATZ et P. SARNAK : *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, volume 45 de *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [34] S. KEEL et S. MORI : Quotients by groupoids. *Ann. of Math. (2)*, 145(1):193–213, 1997.
- [35] S. L. KLEIMAN : Tangency and duality. In *Proceedings of the 1984 Vancouver conference in algebraic geometry*, volume 6 de *CMS Conf. Proc.*, pages 163–225, Providence, RI, 1986. Amer. Math. Soc.
- [36] S. L. KLEIMAN et R. V. MARTINS : The canonical model of a singular curve. *Geom. Dedicata*, 139:139–166, 2009.
- [37] F. F. KNUDSEN : The projectivity of the moduli space of stable curves. III. The line bundles on  $M_{g,n}$ , and a proof of the projectivity of  $\bar{M}_{g,n}$  in characteristic 0. *Math. Scand.*, 52(2):200–212, 1983.
- [38] M.-A. KNUS, A. MERKURJEV, M. ROST et J.-P. TIGNOL : *The book of involutions*, volume 44 de *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. With a preface in French by J. Tits.
- [39] K. KODAIRA et D. C. SPENCER : On deformations of complex analytic structures. I, II. *Ann. of Math. (2)*, 67:328–466, 1958.
- [40] J. KOLLÁR : Projectivity of complete moduli. *J. Differential Geom.*, 32(1):235–268, 1990.
- [41] J. KOLLÁR : Quotient spaces modulo algebraic groups. *Ann. of Math. (2)*, 145(1):33–79, 1997.
- [42] J. KOLLÁR : Non-quasi-projective moduli spaces. *Ann. of Math. (2)*, 164(3):1077–1096, 2006.
- [43] J. KOLLÁR : Livre en préparation. <http://www.math.princeton.edu/~kollar/>, 2011.
- [44] J. KOLLÁR et N. I. SHEPHERD-BARRON : Threefolds and deformations of surface singularities. *Invent. Math.*, 91(2):299–338, 1988.

- [45] G. LAUMON et L. MORET-BAILLY : *Champs algébriques*, volume 39 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*. Springer-Verlag, Berlin, 2000. Classical setting : line bundles and linear series.
- [46] R. LAZA : The moduli space of cubic fourfolds via the period map. *Ann. of Math. (2)*, 172(1):673–711, 2010.
- [47] R. LAZARSELD : *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting : line bundles and linear series.
- [48] R. LAZARSELD : *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.
- [49] Q. LIU : *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 de *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford Science Publications.
- [50] E. LOOIJENGA : Compactifications defined by arrangements. II. Locally symmetric varieties of type IV. *Duke Math. J.*, 119(3):527–588, 2003.
- [51] H. MATSUMURA et P. MONSKY : On the automorphisms of hypersurfaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 3:347–361, 1963/1964.
- [52] T. MATSUSAKA : Polarized varieties with a given Hilbert polynomial. *Amer. J. Math.*, 94:1027–1077, 1972.
- [53] T. MATSUSAKA et D. MUMFORD : Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties. *Amer. J. Math.*, 86:668–684, 1964.
- [54] A. L. MAYER : Families of  $K3$  surfaces. *Nagoya Math. J.*, 48:1–17, 1972.
- [55] E. MILLER et B. STURMFELS : *Combinatorial commutative algebra*, volume 227 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [56] D. MUMFORD : Stability of projective varieties. *Enseignement Math. (2)*, 23(1-2):39–110, 1977.
- [57] D. MUMFORD, J. FOGARTY et F. KIRWAN : *Geometric invariant theory*, volume 34 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2)*. Springer-Verlag, Berlin, third édition, 1994.
- [58] T. ODA : *Convex bodies and algebraic geometry*, volume 15 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese.
- [59] F. OORT : Subvarieties of moduli spaces. *Invent. Math.*, 24:95–119, 1974.
- [60] V. V. PRASOLOV : *Polynomials*, volume 11 de *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Translated from the 2001 Russian second edition by Dimitry Leites.
- [61] A. V. PUKHLIKOV : Fiberwise birational correspondences. *Mat. Zametki*, 68(1):120–130, 2000.
- [62] D. RYDH : Existence and properties of geometric quotients. <http://www.math.kth.se/~dary/papers.html>, 2011.

- [63] B. SAINT-DONAT : Projective models of  $K3$  surfaces. *Amer. J. Math.*, 96:602–639, 1974.
- [64] Y. SANO : On stability criterion of complete intersections. *J. Geom. Anal.*, 14(3):533–544, 2004.
- [65] E. SERNESI : *Deformations of algebraic schemes*, volume 334 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [66] C. S. SESHADRI : Geometric reductivity over arbitrary base. *Advances in Math.*, 26(3):225–274, 1977.
- [67] J. H. SILVERMAN : *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [68] O. TEICHMÜLLER : Veränderliche Riemannsche Flächen. *Deutsche Math.*, 7:344–359, 1944.
- [69] E. VIEHWEG : *Quasi-projective moduli for polarized manifolds*, volume 30 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [70] A. H. WALLACE : Tangency and duality over arbitrary fields. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 6:321–342, 1956.