TD1 : Rappel sur les séries entières

Olivier de Gaay Fortman

31 janvier - 4 février 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

Exercice 1

1. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_n a_n$ est absolument convergente. Soit $\sigma \colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ une bijection et $b_n = a_{\sigma(n)}$ pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Montrer que $\sum_n b_n$ est encore absolument convergente, et que $\sum_n a_n = \sum_n b_n \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que la conclusion de 1 n'est plus vraie sans l'hypothèse de convergence absolue :
   (a) Donner un exemple d'une série complexe alternée $\sum_n a_n$ telle que $\sum_n a_n$ soit convergente mais $\sum_n a_n$ ne soit pas absolument convergente.
   (b) Donner un exemple d'une série $\sum_n a_n$ comme en 2a avec une bijection $\sigma \colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ telle que la série $\sum_n a_{\sigma(n)}$ soit divergente.

Exercice 2

1. Soit f une fonction complexe définie dans un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, primitive d'une fonction continue par morceaux f'. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et que $|f'(x)| \leq M$ dans $[a, b]$ pour un $M \in \mathbb{R}_{>0}$. Montrer que l'on a $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}$.
2. Pour quelles fonctions f comme ci-dessus a-t-on l'égalité $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = M\frac{(b-a)^2}{4}$?

Exercice 3

Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble et soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions complexes définies dans E.

1. Supposons que (g_n) converge uniformément dans E vers une fonction complexe $f \colon E \to \mathbb{C}$. Montrer que (g_n) converge simplement vers f dans E.
2. Donner un exemple d'un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ et d'une suite de fonctions complexes $(g_n)_{n\geq 1}$ tels que les g_n convergent simplement vers 0 dans E mais ne convergent pas uniformément vers 0 dans E.
3. Si la série de terme générale $\sum_n g_n$ est normalement convergente dans E, est-elle aussi uniformément convergente dans E ?
4. Supposons maintenant que $E = \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, soit $I_n = [n^2, (n+1)^2] \subset E$ et $f \colon E \to \mathbb{C}$ définie par $f_n(x) = 0$ si $x \notin I_n$ et $f_n(x) = 1/n$ si $x \in I_n$. Montrer que la série de fonctions de terme générale f_n est uniformément convergente dans E, mais pas normalement convergente dans E.

Exercice 4

Soit $(a_n)_{n\ \geq 0}$ une suite de nombres complexes tels que $\Re(a_n) \geq 0$ pour tout n.

1. Montrer que si les deux séries $\sum_n a_n$ et $\sum a_n^2$ sont convergentes, il en est de même de $\sum |a_n|^2$.
2. La série de terme général $|a_n|$ est-elle alors convergente ?

Exercice 5

Soient (a_n), (b_n) deux suites de nombres complexes.

1. On pose $\sigma_n = \sum_{i=1}^n a_i$ et $\sigma_0 = 0$, de sorte que $a_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Déduire la *sommation partielle d'Abel* : $\sum_{i=m}^n a_i b_i = a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=m}^{n-1} \sigma_i (b_i - b_{i+1}) - \sigma_{m-1} b_m + \sigma_n b_n$.
2. Supposons que la suite (a_n) est telle que la suite (σ_n) soit bornée, et que la suite (b_n) soit formée de nombres réels > 0, est décroissante et tend vers 0. Montrer que la série $\sum_n a_n b_n$ est convergente.
3. Soit (a_n) une suite décroissante de nombre réels tendant vers 0 telle que la série de terme général a_n soit divergente. Montrer que la série entière $\sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et est convergente en tout point du cercle $\partial D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sauf au point $z = 1$.

Exercice 6

1. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons $E(f)$ l'ensemble des points du cercle unité $\partial D(0,1) \subset \mathbb{C}$ où la série converge. Montrer que les cas suivants peuvent se produire :

$$(1).\ E(f) = \partial D(0,1), \quad (2).\ E(f) = \emptyset, \quad (3).\ E(f) = \partial D(0,1) \setminus \{z_0\} \text{ avec } z_0 \in \partial D(0,1).$$

2. Définir trois ensembles non-dénombrables S_1, S_2, S_3 de séries entières $f(z) = \sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $R = 1$ tels que chaque $f(z) \in S_i$ satisfasse la condition (i) ci-dessus, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, et tels que deux $f(z), g(z) \in S_i$ avec $f(z) \neq g(z)$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$.

Exercice 7

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ et $-\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série hypergéométrique :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n.$$

†Exercice 8

Soit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Soient $f_1, \ldots, f_m$ des fonctions sommes de séries entières sur le disque unité ouvert $D(0,1)$. On suppose que $|f_1|^2 + \cdots + |f_m|^2$ est constante $D(0,1)$. Que peut-on dire de $f_1, \ldots, f_m$?

†Exercice 9

Soit $f(z)$ une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$. Pour tout $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ on note $M(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$, et $A(r) = \sup_{|z| \leq r} \Re(f(z))$. On va montrer le *Lemme de la Partie Réelle :* pour tous $r, R \in \mathbb{R}$ avec $R > r > 0$, on a l'inégalité $M(r) \leq \frac{R+r}{R-r} |f(0)| + \frac{2r}{R-r} A(R)$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \Re\left(f\left(re^{i\theta}\right)\right) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$.
2. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $r > 0$ on a $|a_n| \leq \frac{2A(r)}{r^n}$. En déduire que pour tous $R > r > 0$ on a $M(r) \leq ((2r)/(R-r)) \cdot A(R)$.
3. Prouver le Lemme de la Partie Réelle.

†Exercice 10

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On considère une série entière $F(z) = \lambda z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$. Montrer que si λ n'est pas une racine de l'unité alors il existe une série entière $\psi(z) = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$ telle que $b_1 \neq 0$ et $F(\psi(z)) = \psi(\lambda z)$. On dit que F est *formellement conjuguée à son modèle linéaire* $z \mapsto \lambda z$.
2. Montrer que si le rayon de convergence de F est strictement positif et $|\lambda| < 1$ alors on peut choisir ψ avec un rayon de convergence strictement positif.