TD 10: Formes modulaires

Olivier de Gaay Fortman · 09 - 13 mai 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Commencer à résoudre les exercices sans †, en utilisant chaque fois les exercices précédents (y compris les avec un †). Finir le reste des exercices seulement si le temps le permet.

1 L'espaces des réseaux

Rappel 1

— Un *réseau* dans $\mathbb{C}$ est un sous-groupe discret $\Lambda \subset \mathbb{C}$ tel que $\mathbb{R} \cdot \Lambda = \mathbb{C}$ (de façon equivalente : il existe $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ et $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$).

— Deux réseaux Λ_i $(i = 1, 2)$ sont *homothétiques* si il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ avec $\lambda \cdot \Lambda_1 = \Lambda_2$.

— Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ par

$$\mathbb{H} \ni z \mapsto \gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}). \tag{1}$$

— La fonction *zeta de Riemann* est la fonction $\zeta \colon \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 1\} \to \mathbb{C}$ définit par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

— La *série d'Eisenstein de poids* $2k$ $(k > 0)$ est la forme modulaire

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(n\tau + m)^{2k}}.$$

Exercice 2

Soient $\omega_1, \omega_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}^*$ avec $\omega_1/\omega_2, \mu_1/\mu_2 \notin \mathbb{R}$. Définissons $\Lambda_1 = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ et $\Lambda_2 = \mathbb{Z}\mu_1 + \mathbb{Z}\mu_2$. Montrer que :

1. On peut étendre l'action (1) à une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.
2. Soit $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$; définissons $j(\gamma, z) = cz + d$ $(z \in \mathbb{C} - \mathbb{R})$ si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $\Im(\gamma z) = \frac{\det(\gamma)\Im(z)}{|j(\gamma,z)|^2}$ quel que soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.
3. Supposons que $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$. Pour que $\Lambda_1 = \Lambda_2$ et $\mu_1/\mu_2 \in \mathbb{H}$, il faut et il suffit qu'il existe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$.
4. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des réseaux dans $\mathbb{C}$; observons que $\mathbb{C}^*$ agit sur $\mathcal{L}$. Il y a une bijection naturelle
$$\mathbb{C}^* \setminus \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}.$$

2 L'anneau des formes modulaires

Le but des exercices suivants (Exercices 3 - 10) sera de démontrer le

Théorème ($\star$)**.** *Le morphisme d'anneaux*

$$\mathbb{C}[x,y] \to \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{M}_k, \quad (x,y) \mapsto (E_4, E_6)$$

est un isomorphisme.

Exercice 3

Soit f une forme modulaire de poids k. Montrer que il existe une fonction holomorphe $\tilde{f}\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \tilde{f}(\exp(2\pi i z))$. En définissant $q = \exp(2\pi i z)$, on obtient

$$f(z) = \tilde{f}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

Cette expansion s'appélle *l'expansion-q* de f.

†Exercice 4

Pour $t, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, soit $\sigma_t(n) = \sum_{d|n, d>0} d^t$. Soit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. En utilisant la formule

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} \exp(2\pi i d z), \quad \forall z \in \mathbb{H}, \tag{2}$$

montrer que

$$G_{2k}(z) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n.$$

Exercice 5

Définissons $E_{2k}(z) = \frac{(2k-1)!}{2(2\pi i)^{2k}} G_{2k}(z)$. Admettons la formule suivante :

$$\zeta(2k) = -\frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{2 \cdot (2k)!}, \quad k > 0. \tag{3}$$

Montrer que

$$E_{2k}(z) = -\frac{B_{2k}}{4k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1} q^n.$$

Puis, définissons $\Delta\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ comme

$$\Delta = \frac{(240E_4)^3 - (-504E_6)^2}{1728}.$$

Montrer que Δ est une forme modulaire de poids 12.

†Exercice 6

Utiliser (3) pour montrer que Δ est *parabolique*, c'est-à-dire $\Delta(\infty) = 0$.

†Exercice 7

Pour une forme modulaire f, on peut montrer que

$$\mathrm{ord}_z(f) = \mathrm{ord}_{\gamma z}(f), \qquad \text{quel que soit } \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Définissons $\mathrm{ord}_{z=\infty}(f) = \mathrm{ord}_{q=0}(\tilde{f})$. Prouver le résultat fondamental suivant :

Théorème (Formule de valence)**.** *Soit f une forme modulaire non-constante. Soit W l'ensemble $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$ privé des orbits de i et ρ, où $\rho = e^{2\pi i/3}$. Alors*

$$\mathrm{ord}_\infty(f) + \frac{1}{2}\mathrm{ord}_i(f) + \frac{1}{3}\mathrm{ord}_\rho(f) + \sum_{w \in W} \mathrm{ord}_w(f) = \frac{k}{12}.$$

Exercice 8

Démontrer le suivant :

1. La série d'Eisenstein normalisée E_4 a un zéro simple à $z = \rho$ et aucun zéro ailleurs.
2. La série d'Eisenstein normalisée E_6 a un zéro simple à $z = i$ et aucun zéro ailleurs.
3. La forme modulaire Δ de poids 12 a un zéro simple à $z = \infty$ et aucun zéro ailleurs.

Exercice 9

Rappelons que M_k est l'espace vectorielle complexe de formes modulaires de poids k, et que $\mathrm{S}_k \subset \mathrm{M}_k$ est l'espace des formes modulaires cuspidales de poids k. Montrer que la multiplication par Δ définit un isomorphisme

$$\mathrm{M}_k \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_{k+12}.$$

Exercice 10

Démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Les espaces M_k et S_k sont de dimension finie pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En plus, $\mathrm{M}_k = \{0\}$ si $k < 0$ où si k est impair, et la dimension de M_k pour $k \geq 0$ pair est*

$$\dim \mathrm{M}_k = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor & \text{si } k \equiv 2 \mod 12, \\ \lfloor k/12 + 1 \rfloor & \text{si } k \not\equiv 2 \mod 12. \end{cases}$$

Exercice 11

Prouver le théorème ($\star$).

3 Fonctions modulaires

†Exercice 12

1. Soit $z \in \mathbb{H}$. Prouver que

$$\sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{mz+n}-\frac{1}{mz+n+1}\right)=0,$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\neq 0}\left(\frac{1}{mz+n}-\frac{1}{mz+n+1}\right)=-\frac{2\pi i}{z}.$$

2. En utilisant l'identité $G_2(z)=2\zeta(2)+\sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^2}$, en déduire que

$$z^{-2}E_2(-1/z)=E_2(z)-\frac{1}{4\pi i z}.$$

Exercice 13

Définissons la *fonction eta de Dedekind* comme suit :

$$\eta\colon \mathbb{H}\to\mathbb{C},\quad \eta(z)=q_{24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),\quad q_{24}=\exp(2\pi i z/24).$$

1. Montrer que η est holomorphe et se n'annule nulle part.
2. Montrer que
$$\frac{d}{dz}\log(\eta(z))=-2\pi i E_2(z).$$
3. En utilisant l'Exercice 11, montrer que
$$\frac{d}{dz}\log(\eta(-1/z))=\frac{d}{dz}\log(\sqrt{-iz}\cdot\eta(z)).$$
4. Conclure que
$$\eta(-1/z)=\sqrt{-iz}\cdot\eta(z).$$
5. Montrer que η^{24} est une fonction modulaire de poids 12.
6. Montrer que $\Delta=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$.

Les coefficients de cette série sont dénotés par $\tau(n)$, d'òu

$$\Delta=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n.$$

La fonction $n\mapsto\tau(n)$ s'appelle *la fonction τ de Ramanujan*. En 1916, Ramanujan a conjecturé quelques propriétés remarquables de τ, à savoir :

— τ est multiplicative, c.a.d. $\tau(nm)=\tau(n)\tau(m)$ pour tout $n,m\in\mathbb{Z}>0\colon (n,m)=1$;
— $\tau(p^r)=\tau(p)\tau(p^{r-1})-p^{11}\tau(p^{r-2})$ pour tout nombre premier p et entier $r\geq 2$;
— $|\tau(p)|\leq 2p^{11/2}$ pour tout nombre premier p.

Les deux premières propriétés ont été prouvées par Mordell en 1917 et la dernière par Deligne en 1974 suite à sa preuve des conjectures de Weil.

Exercice 14

Supposons que f et g sont des formes modulaires du même poids k, avec expansions-q égales à $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$ respectivement. Supposons que

$$a_j = b_j, \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \ldots, \lfloor k/12 \rfloor.$$

Montrer que $f = g$. En particulier, si $a_j = 0$ pour $j = 0, 1, \ldots, \lfloor k/12 \rfloor$, alors $f = 0$.

Exercice 15

Définissons *la fonction* j comme

$$j \colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \quad j(z) = \frac{(240E_4)^3}{\Delta}.$$

Montrer que j est une *fonction modulaire* : une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}$, méromorphe à l'infini, telle que $j(\gamma z) = j(z)$ quel que soit $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Quels sont les pôles de j ?

Montrer que les fonctions modulaires forment un corps F. Puis montrer que $F = \mathbb{C}(j)$, et que j est transcendant sur $\mathbb{C}$.

Remarques.

1. Par l'Exercice 15, la fonction j induit une fonction

$$j \colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H} \to \mathbb{C}. \tag{4}$$

Il se trouve que (4) est une bijection. Par conséquant, l'espace $\mathbb{C}$ est une espace de paramètres (dit une *espace de modules*), paramétrant les classes d'homothétie de réseaux dans $\mathbb{C}$ (c.f. Exercice 2), ou encore les *courbes elliptiques* (c.f. TD 11). C'est de là que vient le mot "forme modulaire".

2. L'expansion-q de j est

$$j(z) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots$$

Les coefficients de cette série sont fameux pour leur rôle dans la théorie du *clair de la lune monstrueux*, les reliant à la théorie de la représentation du *groupe monstre*.