TD 12 : Analyse complexe

Olivier de Gaay Fortman · 23 - 27 mai 2022

Soit $T = \partial D(0,1)$. Rappelons que $L^p(T)$ est l'ensemble des fonction continues complexes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques, intégrables, et telles que la norme $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$ est finie. Pour $f \in L^1(T)$, les *coefficients de Fourier* de f sont

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \quad (n \ \in \mathbb{Z}).$$

Les *séries de Fourier* de f sont les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$. Le *théorème de Parseval* dit que pour $f, g \in L^2(T)$, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Exercice 1

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière avec rayon de convergence $R \geq 1$. Montrer que pour tout $r \in]0,1[$, on a $\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$.

Exercice 2

Soit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Soient $f_1, \ldots, f_m$ des fonctions sommes de séries entières convergentes sur le disque unité ouvert $D(0,1)$. On suppose que la fonction $|f_1|^2 + \cdots + |f_m|^2 : D(0,1) \to \mathbb{R}$ est constante. Que peut-on dire de $f_1, \ldots, f_m$?

Exercice 3

Soit U un ouvert connexe dans $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur U telle que pour tout $z \in U$, un des coefficients du développement en série entière de f s'annule. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 4

Démontrer le théorème de Liouville en appliquant le théorème des résidus à l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}, \quad a \neq b \in \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = Re^{it}.$$

Exercice 5

1. En appliquant la formule de Cauchy à la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}-1-iz}{z^3}$ sur le bord d'un demi-anneau $\{z \in \mathbb{C} \mid \epsilon \leq |z| \leq R, \Im(z) \geq 0\}$ contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t - t}{t^3} \mathrm{d}t$.
2. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2}$ sur le bord d'un secteur angulaire d'angle délimité par les segments $[0, R]$ et $\left[0, Re^{i\frac{\pi}{4}}\right]$ calculer la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 6

Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage U de 0 telle que $f(0) = 0$. On pose $\lambda = f'(0)$ et on suppose que $0 < |\lambda| < 1$.

1. Montrer que si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit alors la suite de fonctions holomorphes formées par les $\psi_n : z \mapsto \frac{f^n(z)}{\lambda^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ converge vers une fonction holomorphe uniformément sur $\mathbb{D}(0, \epsilon)$.
2. En déduire qu'il existe des voisinages V et W de 0 dans $\mathbb{C}$ et un biholomorphisme $\psi : V \to W$ tels que si $z \in V$ alors $f(z) \in V$ et $\psi \circ f(z) = \lambda \cdot \psi(z)$.

Exercice 7

1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit A une partie localement finie de U. Pour tout $\alpha \in A$, on se donne un entier m_α et des nombres complexes $b_0, \ldots, b_{m_\alpha}$. En utilisant le théorème de Mittag-Leffler ci-dessous, montrer qu'il existe une fonction holomorphe f sur U telle que pour $\alpha \in A$ et $k \in \{0, \ldots, m_\alpha\}$ on ait $f^{(k)}(\alpha) = b_k$.
2. Soient f et g des fonctions holomorphes sur U. On suppose que g n'est pas identiquement nulle et que f et g n'ont pas de zéro en commun. Montrer qu'il existe des fonctions holomorphes h_1 et h_2 sur U telles que $f + h_1 g = e^{h_2}$.
3. En déduire que $\mathcal{O}(U)$ est un *anneau de Bézout* : si $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{O}(U)$ alors il existe $h \in \mathcal{O}(U)$ tel que $h_1\mathcal{O}(U) + \cdots + h_n\mathcal{O}(U) = h\mathcal{O}(U)$.

Théorème (Mittag-Leffler)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $A \subset U$ une partie localement fini. Pour tout $\alpha \in A$, on se donne un entier m_α et des nombres complexes $a_1, \ldots, a_{m_\alpha}$. Il existe une fonction méromorphe f sur U telle que $f^{-1}(\{\infty\}) \subseteq A$ et pour tout $\alpha \in A$,*

$$f(z) \underset{z \to \alpha}{=} \sum_{n=1}^{m_\alpha} a_n (z - \alpha)^{-n} + O(1).$$

Exercice 8

Soit $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ un réseau. Supposons que $\theta \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction entière telle qu'ils existent $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$\theta(z + \omega_1) = a_1\theta(z) \quad \text{et} \quad \theta(z + \omega_2) = a_2\theta(z) \quad \text{quel que soit} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer qu'il existent $b, c \in \mathbb{C}$ tels que $\theta(z) = be^{cz}$ quel que soit $z \in \mathbb{C}$.