

# TD2 : FONCTIONS ANALYTIQUES

Olivier de Gaay Fortman

7 - 11 février 2022

Les exercices marqués avec un <sup>†</sup> sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à [olivier.de.gaay.fortman@ens.fr](mailto:olivier.de.gaay.fortman@ens.fr) ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

## Exercice 1

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ . Donner un exemple d'une fonction  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que
  - (a)  $\rho$  est indéfiniment dérivable dans  $\mathbb{R}$ ,
  - (b)  $\rho(x) \geq 0$  pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ ,
  - (c)  $\rho(x) = 0$  pour  $x < -\alpha$  et  $x > \alpha$ , et  $\rho(x) > 0$  pour  $x \in ]-\alpha, \alpha[$ ,
  - (d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et une fonction  $\rho$  comme dans 1, définissons le polynôme

$$P_n(x) = \rho(0) + \frac{\rho'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{\rho^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Choisir  $\rho$  telle que la suite de polynômes  $(P_n)_{n \geq 0}$  ne converge pas uniformément vers  $\rho$  dans  $[-\alpha, \alpha]$ .

3. Donner un exemple d'une fonction  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  non-constante et  $\mathcal{C}^\infty$  et d'un ouvert  $U \subset \mathbb{C}$  tels que  $f|_U = 0$  pour la restriction  $f|_U$  de  $f$  à  $U$ . Existe-t-il une telle fonction  $f$  qui soit analytique?

## Exercice 2

On va utiliser le théorème suivant :

**Théorème.** Soient  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $h(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$  des séries entières convergentes autour de  $z = 0$  avec  $h(0) = b_0 = 0$ . Soient  $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ . Supposons que  $f(z)$  soit absolument convergente pour tout  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| \leq r$ . Supposons aussi que  $\sum_n |b_n| s^n \leq r$ . Définissons  $g = f(h)$  comme la série entière

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right)^n.$$

Alors  $g$  converge absolument dans  $\overline{D}(0, s)$ , et pour tout  $z \in \overline{D}(0, s)$ , on a  $g(z) = f(h(z))$ .

1. Soient  $U \subset \mathbb{C}$  et  $V \subset \mathbb{C}$  ouverts et soient  $g: U \rightarrow V$  et  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  des fonctions analytiques. Montrer que la fonction  $f \circ g: U \rightarrow \mathbb{C}$  est analytique.
2. Soient  $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  des fonctions analytiques. Montrer que toute puissance  $f^n$  ( $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) est analytique dans  $U$ . Dédurre que la fonction produit  $f \cdot g: U \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) \cdot g(z)$  est analytique.
3. Soient  $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions analytiques telles que  $g(z) \neq 0$  pour chaque  $z \in U$ . Montrer que la fonction  $f/g: U \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z)/g(z)$  est analytique.
4. Notons  $\exp(z)$  la fonction analytique  $\sum_{n \geq 0} z^n/n!$  de rayon de convergence  $R = +\infty$ . Montrer que les fonctions

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (\exp(iz) + \exp(-iz)), \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{1}{2i} (\exp(iz) - \exp(-iz))$$

sont analytiques dans  $\mathbb{C}$  et donner leur termes généraux.

5. Montrer que la fonction analytique  $f(z) = \cos^2(z) + \sin^2(z)$  est constante et donner  $f(z) \in \mathbb{C}$ .

### Exercice 3

Montrer qu'une série entière  $\sum_n a_n z^n$  est une fonction analytique dans son disque ouvert de convergence.

### Exercice 4

Soit  $f$  une fonction analytique dans un voisinage de  $z = 0$  dans  $\mathbb{C}$ , et soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de points distincts de  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  qui tend vers 0.

1. Supposons que  $f$  prenne des valeurs réelles aux  $a_n$ . Montrer que  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$  au voisinage de 0.
2. Supposons que  $f$  prenne des valeurs réelles aux points  $a_n$ , et de plus que  $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Montrer que  $f$  est constante dans un voisinage de 0.

### Exercice 5

Supposons qu'une fonction  $f$  soit analytique dans un ensemble ouvert connexe  $U \subset \mathbb{C}$  et ne soit pas identiquement nulle dans  $U$ . Soit  $K \subset \mathbb{C}$  une partie non-vide, fermée et bornée telle que  $K \subset U$ . Montrer l'équation  $f(z) = 0$  n'a qu'un nombre fini de solutions dans  $K$ .

### Exercice 6

Soit  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Déterminer le rayon de convergence de la fonction de Bessel d'ordre  $r$  :

$$J_r(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r \cdot \sum_n \frac{(-1)^n}{n!(n+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

### † Exercice 7

Définissons les quatre ensembles suivants :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{C}, \quad \mathbb{Z} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 \leq |z| < 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$\mathbb{E} = D(0, 1) - \mathbb{Z} \subset D(0, 1) \quad \text{et} \quad \mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x < 0, \frac{\pi}{2} < y < 2\pi\} \subset \mathbb{H}.$$

1. Dessiner  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{H}$ , et donner deux fonctions analytiques  $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$  et  $g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}$  telles que  $f \circ g = \operatorname{id}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  et  $g \circ f = \operatorname{id}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ .
2. Donner deux fonctions analytiques  $f: \mathbb{H} \rightarrow D(0, 1)$  et  $g: D(0, 1) \rightarrow \mathbb{H}$  telles que  $f \circ g = \operatorname{id}: D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$  et  $g \circ f = \operatorname{id}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ .

### † Exercice 8

Soit  $U$  un ouvert connexe dans  $\mathbb{C}$  et  $f$  une fonction analytique sur  $U$  telle que pour tout  $z \in U$ , un des coefficients du développement en série entière de  $f$  s'annule. Montrer que  $f$  est un polynôme.

### † Exercice 9

Soit  $\mu$  une mesure complexe finie sur un espace mesurable  $X$ ,  $\varphi$  une fonction complexe mesurable sur  $X$ , et  $U$  un ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$  qui ne rencontre pas  $\varphi(X)$ . Posons

$$f(z) = \int_X \frac{d\mu(\xi)}{\varphi(\xi) - z}, \quad z \in U.$$

Montrer que  $f$  est une fonction analytique sur  $U$ .